Devoir sur table (dérivées)
lundi 28 novembre 2016

Les calculatrices et portables sont autorisés. (adaptation d'un exercice d'un sujet de Nouvelle Calédonie 2007)

Toutes les réponses seront rédigées $\boxed{\textbf{en français}}$ **et** $\boxed{\textbf{justifiées}}$**, tous les calculs seront** $\boxed{\textbf{détaillés}}$**.**

Questions de cours.

1. *Donner la dérivée de la fonction "élever au cube".*
2. *Soit n un naturel. Donner la dérivée de la fonction "élever à la puissance n".*
3. *Soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dérivée de son double et de son opposé en fonction de sa dérivée tout court.*

Exercice. On appelle f la fonction $t \mapsto (t+2)(3-t)^2$ définie sur tout $\mathbb{R}$.

1. L'image de a par f vaut
$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & (a+2)(3-a)^2 \\ & = & (a+2)\left(9-6a+a^2\right) \\ & = & 9a-6a^2+a^3+18-12a+2a^2 \\ & = & a^3-4a^2-3a+18, \text{ CQFD.} \end{array}$$
2. Soit x un réel. L'image de x par f' valant
$$f'(x) = \left(3x^2\right) - 4(2x) - 3(1) + (0) = 3x^2 - 8x - 3,$$
la dérivée de f est la fonction $t \mapsto 3t^2 - 8t - 3$.
3. Développons l'expression donnée :
$$(3b+1)(b-3) = 3b^2 - 9b + b - 3 = 3b^2 - 8b - 3 = f'(b)\text{, CQFD}$$
4. Soit x un réel. Le signe de $f'(x) = (3x+1)(x-3)$ est donnée *via* la règle des signes par ceux des facteurs $3x+1$ et $x-3$: négatif sur $\left[-\frac{1}{3};3\right]$ et négatif en dehors.
5. $f(-3) = -6^2 = 36$, croit jusqu $-\frac{1}{3}$ (où vaut $\frac{320}{27} \simeq 12$) décroît jusqu'à 3 (où nul) puis croît jusqu'à $\frac{7}{2}$ (où vaut $\frac{11}{8} = 1,375$)
6. Soit t un réel situé dans l'intervalle $]-\infty, 4]$.
Si $t \leq -\frac{1}{3}$, la croissance de f sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ montre alors la majoration $f(t) \leq f\left(-\frac{1}{3}\right)$.
Si $-\frac{1}{3} \leq t \leq 3$, la décroissance de f sur le segment $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$ montre alors la minoration $f\left(-\frac{1}{3}\right) \geq f(t)$.
Si $t \geq 3$, la croissance de f sur l'intervalle $[3,4]$ livre la majoration $f(t) \leq f(4)$.
Vu par ailleurs les comparaisons $f\left(-\frac{1}{3}\right) \geq 11 > 6 = f(4)$, on a dans tous les cas $f(t) \leq f\left(-\frac{1}{3}\right)$, ce qui montre que, sur l'intervalle $]-\infty, 4]$, la fonction f est maximale en $-\frac{1}{3}$ et son maximum y vaut $\frac{320}{27} \simeq 12$