Devoir de rentrée

à rendre le lundi 9 septembre 2013
(non noté, inutile de copier)

La calculatrice est interdite.

Toute affirmation doit être justifiée !

1. *Donner les ensembles de définition et les variations des fonctions suivantes :*

$$x \mapsto x \qquad t \mapsto t^2 \qquad y \mapsto \sqrt{y} \qquad z \mapsto \frac{1}{z} \qquad x \mapsto 18$$
$$\Delta \mapsto \frac{1}{3\Delta - 6} \qquad t \mapsto \frac{1}{t^2-1} \qquad \gamma \mapsto \frac{\gamma\,(2-\gamma)^2}{\gamma\,(2-\gamma)} \qquad y \mapsto y^2$$
$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad a \mapsto \frac{1}{\sqrt{4a^2-9}} \qquad b \mapsto \frac{b+2}{b+1} \qquad c \mapsto \frac{6c-1}{3c+2}.$$

2. *Pour chacune des fonctions ci-dessus, écrire en français un algorithme (une procédure) qui, appliquée à un nombre, donne l'image de ce nombre par la fonction considérée.*
3. *Déterminer l'image, par chacune des fonctions ci-dessus, des nombres* 0, 1, -1, 2 *et* $\frac{3}{2}$. *Commenter.*
4. *Comparer les paires (ou trio) de nombres suivants :*

$$\frac{1}{17} \text{ et } 1,4 \qquad \frac{7}{9} \text{ et } \frac{6}{8} \qquad \frac{2}{4} \text{ et } \frac{15}{30} \qquad \frac{19}{18} \text{ et } 1 \text{ et } \frac{5}{6}$$
$$\sqrt{3} \text{ et } \frac{7}{4} \qquad \sqrt{20} \text{ et } \frac{9}{2} \qquad \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \text{ et } 9-4\sqrt{5} \qquad \sqrt{3-2\sqrt{2}} \text{ et } \sqrt{2}-1.$$

5. *Donner les variations et extrema des trinômes suivants :*

$$\begin{array}{lll} x & \mapsto & x^2+2x+1 \qquad t \mapsto 1-t^2 \qquad z \mapsto 4-9t^2 \qquad c \mapsto -c^2 \\ a & \mapsto & 4a^2+2a+1 \qquad b \mapsto 2b-7-b^2 \qquad \delta \mapsto 3\delta-\delta^2+1 \\ y & \mapsto & -y^2+y \qquad \beta \mapsto 0\beta^2-3\beta+12 \qquad x \mapsto 4-9x^2. \end{array}$$

6. *Trouver tous les nombres dont le cosinus vaut* $-\frac{1}{2}$. *Déterminer l'ensembles des réels* r *tels que* $\cos r = -\frac{1}{2}$. *Caractériser les nombres dont le double du sinus vaut* $\sqrt{3}$. *Résoudre l'équation* $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *d'inconnue réelle* θ.
7. *Commenter le raisonenment suivant.* Soit N un nombre autre que 0 (par exemple 42). On note d le double de N. On a alors successivement les égalités :

$$\begin{array}{ll} & d = 2N \\ \Longrightarrow & d = N+N \qquad \text{(on a développé } 2 = 1+1) \\ \Longrightarrow & d\,(d-N) = (N+N)\,(d-N) \qquad \text{(on a multiplé par } d-N) \\ \Longrightarrow & d^2 - Nd = Nd - N^2 + Nd - N^2 \qquad \text{(on a développé)} \\ \Longrightarrow & d^2 - Nd - Nd = Nd - N^2 - N^2 \qquad \text{(on a soustrait } Nd) \\ \Longrightarrow & d\,(d-N-N) = N\,(d-N-N) \qquad \text{(on a factorisé)} \\ \Longrightarrow & d = N \qquad \text{(on a simplifié par } d-N-N). \end{array}$$

Or le nombre d (que l'on vient de montrer égal à N) vaut par définition $2N$, d'où l'on tire $N = 2N$. Puisque N est non nul, on peut diviser par N, ce qui donne $1 = 2$.