Probabilités

Marc SAGE

lundi 2 décembre – jeudi 19 décembre

Table des matières

Introduction : activités *découvrir* 3 et 4 p. 189
Jeu (équiprobabilité, arbre de proba) : paradoxe de Monty-Hall
Jeu (espérance) : pile-ou-face truqué
Exercices : 30, 31, 32 p. 204, 39 p. 205, 43, 44 p. 206, 56 p. 209, 60 p. 210
D. M. : paradoxes de Simpson et de Bertrand
D. S. : exos 44 p. 20

Suggestion de lecture : *Enquête sur l'entendement humain* de David Hume (1748).

Nous avons tous une notion intuitive d'un événement *probable* : un événement qui va "sans doute" arriver. Pour agir en conséquence, il peut donc être utile de connaître la probabilité (*i. e.* le fait d'être probable) des événements futurs.

Le strict mininum que notre intelligence peut nous demander de suivre est la loi suivante[1] : *si un événement est hautement improbable, on doit agir comme si cet événement n'aura pas lieu.*

Pour préciser cette notion intuitive de "probable", il est pertinent de *quantifier* les probabilités d'événements pertinents. C'est ce que permet la mathématique.

1 Expérience aléatoire

On appellera ***expérience*** toute action que l'on peut répéter dans les mêmes conditions[2]. L'***issue***[3] de l'expérience est sa fin.

L'adjectif "aléatoire" signifie "hasardeux" et donc (et surtout) "imprévisible". Une ***expérience aléatoire*** est par conséquent une expérience dont l'issue est imprévisible. Par exemple, si l'on jette une pièce en l'air, il est difficile de prévoir le côté qu'elle va montrer une fois immobilisée, le temps de vol ou encore l'angle fait avec l'horizontale une fois arrêtée.

Pour utiliser la mathématique, il faut tout d'abord *modéliser* l'expérience. L'issue seule de l'expérience important pour agir, on va seulement coder les issues possibles par des objets mathématiques. L'ensemble des objets codant les issues est appelé l'***univers*** de l'expérience (et est très souvent noté Ω).

★ Ce codage *ne peut être ni vrai ni faux*, c'est une décision, un acte. Il peut être plus ou moins *pertinent* selon l'étude.

Exemples.

On lance une pièce en l'air. On peut coder les issues par une lettre (P ou F) selon le côté visible une fois immobile (pile ou face) : il sera alors pertinent de choisir pour univers l'ensemble formé de deux éléments $\{P, F\}$. On peut aussi coder les issues par un réel corresponant au temps de vol : l'univers pourra alors être la demi-droite $\mathbf{R}_+$. On peut enfin coder les issues par un réel mesurant l'angle (en degrés) fait par la pièce avec l'horizontale : l'univers pourra alors être le segment $[0, 90]$.

On lance un dé. On peut coder les issues par l'initiale du nombre apparaissant sur la face côté terre : l'univers pourra alors être $\{U, D, T, Q, C, S\}$. On peut aussi coder les issues par un réel mesurant le temps de roulement du dé : l'univers pourra alors être $\mathbf{R}_+$.

En seconde, l'ensemble des objets codant les issues sera toujours *fini* (à l'exception des situations de l'exercice 39).

Définitions. Considérons une expérience dont on a modélisé l'ensemble des issues.

*Un **événement** est une partie de l'univers : il code un certain nombre d'issues.*

*L'**événement certain** est tout l'univers : il code toutes les issues possibles.*

*L'**événement impossible** est l'ensemble vide : il ne code aucune issue.*

*Un **événement élémentaire** est un événement codant une seule issue possible : c'est une partie de l'univers à un seul élément, appelée un singleton.*

Soit E un événement : on note $E \subset \Omega$ (lire "E est inclus dans Ω") pour dire que E est une partie de Ω. Le symbole $\subset$ est appelé symbole d'***inclusion***. On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Observer qu'on a toujours les inclusions $\Omega \subset \Omega$ et $\emptyset \subset \Omega$, lesquelles équivalent resp. aux appartenances $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$.

★ Il est usuel d'appeler *événement* (au sens courant de *ce qui a lieu*) ce qui est modélisé par un événement (au sens mathématique précédent), à savoir un événement (courant) qui réalise l'une au moins des issues modélisées par un événement (mathématique). Afin d'éviter cette confusion, nous irons contre cet usage[4].

Exemples.

On lancé un dé par terre et on modélise les chiffres obtenus sur la face du dessus par l'univers $\{U, D, T, Q, C, S\}$. L'événement codant "le nombre obtenu est pair" est la partie $\{D, Q, S\}$. L'événement codant "le nombre obtenu est mutiple de 2 et de 3" est le singleton $\{S\}$.

[1] appelée *loi unique du hasard* et formulée comme telle par Émile Borel début XX^e

[2] Puisque le temps s'est nécessairement écoulé entre deux telles actions, il est *stricto sensu impossible* de recréer des conditions identiques. Nous laisserons pour ce cours de côté cette profonde problématique épistémologique.

[3] *issue de secours* : ce qui permet de sortir. Une issue est ainsi ce qui permet de sortir de l'expérience, de l'arrêter.

[4] cependant le dictionnaire CRISCO ne nous a fourni aucun synonyme d'*événement* qui pallierait ce manque

On joue à pile ou face. On définit pour univers $\{P, F\}$. Il y deux événements élémentaires $\{P\}$ et $\{F\}$ codant les issues respectives "on obtient pile" et "on obtient face". L'événement impossible est $\emptyset$ et l'événement certain $\{P, F\}$.

On tire une boule dans une urne contenant deux boules noires, trois rouges et les cinq restantes vertes. On suppose les boules d'une même couleur numérotées à partir de 1. On définit pour l'univers (avec les codages évidents) l'ensemble $\{N1, N2, R1, R2, R3, V1, V2, V3, V4, V5\}$. L'événement codant "la boule tirée est rouge" est la partie $\{R1, R2, R3\}$. L'événement codant "la boule tirée à un numéro pair" est la partie $\{N2, R2, V2, V4\}$.

On choisit une carte dans un jeu (standard) de 52 cartes. On définit pour univers un ensemble à 52 éléments. L'événement codant "on tire une figure" possède 12 éléments, celui "on tire un pique" 13 éléments, celui "on tire un as" 4 éléments.

Définitions. Considérons une expérience dont on a modélisé l'ensemble des issues par un univers Ω. Soient A et B deux événements.

On appelle ***réunion*** *de A et B l'événement codant une issue codée par A ou par B. On la note $A \cup B$ (le symbole "$\cup$" se lit "**union**"). Ainsi a-t-on pour tout $\omega \in \Omega$ l'équivalence*

$$\omega \in A \cup B \iff (\omega \in A) \;\; ou \;\; (\omega \in B) .$$

On appelle ***intersection*** *de A et B l'événement codant une issue codée par A et par B. On la note $A \cap B$ (le symbole "$\cap$" se lit "**inter**"). Ainsi a-t-on pour tout $\omega \in \Omega$ l'équivalence*

$$\omega \in A \cap B \iff (\omega \in A) \;\; et \;\; (\omega \in B) .$$

On dit que A et B sont ***incompatibles*** *s'ils ne codent aucune issue commune,* i. e. *si leur intersection est l'événement impossible, ce qui s'écrit $A \cap B = \emptyset$.*

On appele ***événement contraire*** *de A l'événement $\Omega \setminus A$, noté $\overline{A}$ (le symbole "$\setminus$" se lit "**privé de**").*

Exemples. (exos 30, 31, 32)

L'univers est toujours la réunion de tous les événements élémentaires.

Un événement et son contraire sont toujours incompatibles.

L'événement impossible est incompatible avec n'importe quel autre événement.

Dans l'univers $\{P, F\}$ modélisant le lancé d'une pièce, les événements élémentaires $\{P\}$ et $\{F\}$ sont incompatibles.

Dans l'univers $\{U, D, T, Q, C, S\}$ modélisant le lancé d'un dé, l'intersection des événements codant "obtenir un multiple de 2" et "obtenir un multiple de 3" est l'événement élémentaire $\{S\}$. L'événement contraire à celui codant "obtenir un nombre pair" est celui codant "obtenir un nombre impair", ce qui s'écrit $\overline{\{D, Q, S\}} = \{U, T, C\}$. L'événement contraire à celui codant "obtenir un nombre ≥ 3" est celui codant "obtenir un nombre ≤ 2", ce qui s'écrit $\overline{\{T, Q, C, S\}} = \{U, D\}$.

2 Probabilités sur un ensemble fini

Comment quantifier le fait d'être probable ? Regardons quelques exigences minimales.

1. **(principe de la finitude)** La probabilité d'un événement doit être un *nombre*, qui doit être d'autant plus grand que l'événement considéré est probable. En conséquence elle est *maximale pour l'événement certain.* Il est usuel en mathématique d'imposer ce nombre maximal *fini* et *égal à* 1 et de ne considérer que des probabilités *positives.* Ainsi une probabilité (mathématique) sera-t-elle toujours un nombre du segment $[0, 1]$.
2. **(principe de la somme)** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires le constituant. Ce principe est utilisé lorsque l'on décrit une expérience à l'aide d'un arbre (*cf.* paradoxe de Monty Hall & exo 56 p. 209 & 60 p. 210).
3. **(principe d'équiprobabilité)** Sans information, deux issues doivent être regardées comme étant *équiprobables* (autant probables l'un que l'autre). Ainsi deux événements élémentaires doivent-ils, dans ce cas, avoir la même probabilité.

Ces exigences modélisatrices motivent la définition suivante.

Définition. *Soit Ω un ensemble fini (par exemple l'univers choisi pour codé une expérience aléatoire). On appelle* ***probabilité*** *sur Ω toute fonction $p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ telle que :*

1. *l'image de l'événement certain est 1, ce qui s'écrit*

$$p(\Omega) = 1\,;$$

2. *l'image de la réunion de deux événements incompatibles vaut la somme des images de ces événements, ce qui s'écrit*

$$\forall A \subset \Omega,\ \forall B \subset \Omega,\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

(le symbole "$\forall$" est un "A" renversé[5] qui lit "pour tout" ou "quel que soit" (en accordant au besoin)).

Exemples.

On définit $p : A \longmapsto \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$. C'est le cas équiprobable : tous les événements élémentaires ont même probabilité $\frac{1}{\operatorname{Card} \Omega}$. Par exemple, lorsqu'on lance un dé et qu'on prend pour univers $\{U, D, T, Q, C, S\}$, chaque face aura probabilité $\frac{1}{6}$ d'apparaître.

Considérons une pièce truquée et définisons pour univers $\Omega = \{P, F\}$. Définissons $p(\{F\}) = \frac{1}{3}$, $p(\{P\}) = \frac{2}{3}$ et $p(\emptyset) = 0$. On obtient bien une probabilité sur Ω.

Propriétés. Soit p une probabilité sur un ensemble fini Ω.

1. *L'événement impossible a une probabilité nulle :*

$$p(\emptyset) = 0.$$

2. *Soient E et F deux parties de Ω.*

$$\text{Si } E \subset F, \text{ alors } p(F \setminus E) = p(F) - p(E)\,.$$

3. *La probabilité d'un événement contraire est le complémentaire à 1 de la probabilité de l'événement :*

$$\forall A \subset \Omega,\ p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)\,.$$

4. *Soient A, B, C trois événements deux à deux incompatibles. On a alors*

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

(ce qui se généralise à un nombre quelconque d'événements deux à deux incompatibles).

5. *La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.*

Démonstration. (partie difficile du cours qui peut être sautée : ce n'est pourant qu'un aperçu de ce que font les mathématiciens, à savoir *démontrer* ce qu'ils affirment)

1. Puisque l'intersection $\emptyset \cap \emptyset$ est vide, les événements $\emptyset$ et $\emptyset$ sont incompatibles, ce qui permet d'écrire $p(\emptyset \cup \emptyset) = p(\emptyset) + p(\emptyset)$, *i. e.* $p(\emptyset) = 2p(\emptyset)$, d'où $p(\emptyset) = 0$.
2. Puisque l'intersection $E \cap F \setminus E$ est vide, les événements E et $F \setminus E$ sont incompatibles, ce qui permet d'écrire $p(E) + p(F \setminus E) = p(E \cup F \setminus E) = p(F)$, d'où le résultat en soustrayant $p(E)$.
3. Soit $A \subset \Omega$. On applique le point précédent à $E = A$ et $F = \Omega$, ce qui donne $p(\Omega \setminus A) = p(\Omega) - p(A)$, *i. e.* $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$.
4. L'intersection $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ est vide, donc les événements A et $B \cap C$ sont incompatibles, ce qui permet d'écrire $p(A \cup (B \cup C)) = p(A) + p(B \cup C) = p(A) + (p(B) + p(C))$, d'où l'égalité voulue.
5. Puisque Ω est la réunion des singletons $\{\omega\}$ pour ω décrivant Ω, il suffit d'appliquer le point précédent aux $\{\omega\}$. On vérifie pour cela qu'ils sont bien deux à deux incompatibles. Raisonnons par contraposée. Soient a et b dans Ω tels que $\{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$. Soit $\omega \in \{a\} \cap \{b\}$. Alors ω appartient à $\{a\}$, donc vaut a, mais il appartient aussi à $\{b\}$, donc vaut b, d'où l'égalité $a = \omega = b$.

[5] venait de l'allemand *Alle* signifiant *tous*

Exemples. (activités découvrir 3 et 4, exos 39, 56, 60)

On lance une pièce truquée. Trouver toutes les probablités sur l'univers $\{P, F\}$ telles que la probabilité d'obtenir "pile" soit trois fois plus grande que celle d'obtenir "face". Soit p une telle probabilité. On a alors les égalités

$$1 = p(\{P\}) + p(\{F\}) = 3p(\{F\}) + p(\{F\}) = 4p(\{F\}),$$

d'où l'on tire $p(\{F\}) = \frac{1}{4}$. On en déduit $p(\{P\}) = p\left(\overline{\{F\}}\right) = 1 - p(\{F\}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

On lance un dé pipé. Trouver toutes les probablités sur l'univers $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ telles que la probabilité d'un événément élémentaire est proportionnelle au nombre considéré. Soit p une telle probabilité. Pour tout entier $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $p(\{k\}) = kp(\{1\})$. Puisque la somme des $p(\{k\})$ vaut 1, on obtient (en abrégeant $p := p(\{1\})$)

$$\begin{aligned} 1 &= p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) \\ &= p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 21p, \text{ d'où l'on tire } p = \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

On en déduit $p(\{k\}) = \frac{k}{21}$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

★ Lors d'une expérience aléatoire, non seulement nous pouvons *choisir l'univers* modélisant les issues possibles mais nous pouvons de plus *choisir la probabilité* (mathématique) qui modélisera les probabilités (du sens commun). Ces choix ne sont ni vrais ni faux mais seulement plus ou moins pertinents. Il convient à la fois de suivre le bon sens et de se méfier de son intuition. (*cf.* D. M. sur le paradoxe de Bertrand)

Lien entre probabilité & fréquences.

On considère une population évoluant au cours du temps dont on étudie un caractère. À un instant donné, on considère l'expérience "choisir un individu au hasard" et on s'intéresse à la valeur du caractère de l'individu choisi. On définit pour univers l'ensemble des valeurs possibles. On définit la probabilité d'un événement élémentaire comme étant sa *fréquence* (éventuellement moyennée sur une période passée).

(exos 43 & 44 p. 206)

Ces probabilités issues de l'*observation passée* sont souvent utilisées pour *prédire* les valeurs *futures* du caractère. Seule l'expérience et l'habitude montrent l'intérêt (et le danger) d'un tel guide prédictif : aucun théorème mathématique ne pourra le certifier.

(*cf.* D. M. sur le paradoxe de Simpson)