Devoir surveillé

vendredi 29 novembre 2019

Solution proposée.

1. (a) La tendance donnée équivaut par définition à
$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in \mathbf{R},\ |t+1| < \delta \Longrightarrow f(t) > M.$$

(b) La tendance donnée équivaut par définition à
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N < 0,\ \forall t \in \mathbf{R},\ t < N \Longrightarrow |f(t) - 3i| < \varepsilon.$$

(c) La continuité considérée équivaut par définition à la continuité de f en chaque point de $[0,1]$, *i. e.* aux tendances $\forall a \in [0,1]$, $f \underset{a}{\longrightarrow} f(a)$.

(d) Supposons par l'absurde "partie entière" continue en 7. On a alors pour chaque suite $a \longrightarrow 7$ la tendance $\lfloor a_n \rfloor \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lfloor \lim a \rfloor$. En particulier, vu la tendance $\exp \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $a := (7 - e^{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 7, d'où la tendance $\lfloor a_n \rfloor \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lfloor 7 \rfloor = 7$. Or la suite $(\lfloor a_n \rfloor)$ vaut constamment 6 (vu à $t < 0$ fixé l'encadrement $0 < e^t \leq 1$) et donc tend vers 6, d'où une contradiction par unicité de la limite.

"Partie entière" est constante sur le segment $[3,1 \ ;\ 3,2]$, donc y est continue ; comme π tombe dans ce segment (il vaut environ $3,14$ à un centième près), on récolte la continuité en π de "partie entière".

(a) Soient a et b deux réels distincts, soit f une application réelle et continue sur le segment $[a,b]$ prenant des valeurs opposées en a et b. Alors f s'annule.

(b) Soient a et b deux réels distincts, soit f une application réelle et dérivable sur le segment $[a,b]$. Alors le taux d'accroissement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ vaut la dérivée de f évaluée en un certain point de l'intervalle $]a,b[$. (En fait, l'hypothèse de dérivabilité en a et en b est superflue).

(c) Soit un cercle dont on note O le centre, soient A, B et M trois points distincts sur ce cercle tels que M et O sont situé du même côté de la droite (AB). Alors l'angle $\widehat{AMB}$ sous-tendant la corde $[AB]$ mesure moitié moins que l'angle $\widehat{AOB}$ (dit "au centre").

(d) Soit I un intervalle réel infini, soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et strictement monotone. Il y a alors (en notant $J := f(I)$) une application $g : J \longrightarrow I$ continue (et strictement monotone) telle que $\begin{cases} \forall i \in I,\ g(f(i)) = i \\ \forall j \in J,\ f(g(j)) = j \end{cases}$.

(a) On définit $\sin c := \frac{e^{ic}-e^{-ic}}{2i}$. Vu la définition de exp, le complexe $\sin c$ est limite de la suite $S_n := \left(1 - \frac{c^2}{2!} + \frac{c^4}{4!} - \frac{c^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{c^{2n}}{(2n)!}\right)$. Supposons à présent c réel. La suite S est alors à valeurs réelles (puisque c est réel), ce qui s'écrit aussi $\forall n \in \mathbf{N},\ \operatorname{Im} S_n = 0$ en termes de parties imaginaires. Vu la continuité de l'application Im, on a la tendance $\operatorname{Im}(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Im}(\lim S_n)$, *i. e.* $0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Im}(\sin c)$. Par unicité de la limite, on obtient la nullité de $\operatorname{Im}(\sin c)$, *i. e.* l'appartenance $\sin c \in \mathbf{R}$ voulue.

(b) Soient $a, b \in \mathbf{C}$. Développer l'égalité $\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}$ livre les égalités
$$\begin{aligned}(2i\sin a)(2\cos b) &= \left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right) = e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{i(-a+b)} - e^{i(-a-b)} \\ &= e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} \\ &= 2i\sin(a+b) + 2i\sin(a-b),\end{aligned}$$
ce qui montre que l'application $M := \binom{x}{y} \mapsto \frac{x+y}{2}$ convient (M comme "**mi**lieu"). En d'autres termes, on a les égalités
$$\forall A, B \in \mathbf{C},\ \sin A\ \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}.$$
En imposant $\binom{A}{B}$ valant d'une part $\binom{a}{b}$, d'autre part $\binom{b}{a}$, on obtient deux égalités dont l'addition livre l'identité
$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} + \frac{\sin(b+a) + \sin(b-a)}{2} \underset{\text{impaire}}{\overset{\sin \text{ est}}{=}} \sin(a+b),$$
ce qui montre que l'application $f := \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \mapsto ps + qr$ convient.

(c) La restriction de l'application cos au segment $[0,\pi]$ est continue et décroît strictement de 1 à -1, donc le théorème de la bijection donne sens à sa réciproque "arc-cosinus" à valeurs dans $[0,\pi]$ et définie sur $[-1,1]$.

(d) L'application arctan est la réciproque de la restriction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$, laquelle est dérivable et dont la dérivée ne s'annule jamais, donc cette réciproque est dérivable sur tout son domaine de définition $\mathbf{R}$ et vérifie pour chaque réel a les égalités

$$\arctan' a = \frac{1}{\tan'(\arctan a)} = \frac{1}{\left[1+\tan^2\right](\arctan a)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan a)} = \frac{1}{1+a^2}.$$

(e) L'application arcsin est définie sur $[-1,1]$ et prend ses valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, sur lequel segment l'application tan est définie *à l'exception des bornes* $\pm\frac{\pi}{2}$ atteintes par arcsin précisément en ±1. La composée $\tan\circ\arcsin$ est donc définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

Soit s dans ce dernier et abrégeons $t := \tan(\arcsin s)$. Évaluer en $\arcsin s$ les égalités $\tan^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{\sin^2}{1-\sin^2}$ (valides sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) donne $t^2 = \frac{s^2}{1-s^2}$, d'où $t = \frac{\pm s}{\sqrt{1-s^2}}$ (bien noter la stricte positivité $1-s^2>0$ pour pouvoir donner sens à la fraction). Or, lorsque s est positif (resp. négatif), son arc-sinus l'est aussi, donc t également, ce qui permet de retirer le $\pm$ et de conclure à l'égalité

$$\tan(\arcsin s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Sanity check : tracer un triangle rectangle ayant pour longueurs 1, s et $\sqrt{1-s^2}$ puis lire la tangente d'un angle dont le sinus vaut s.

(f) L'application cos est définie sur tout $\mathbf{R}$ et prend ses valeurs dans $[-1,1]$, segment où arccos est défini, ce qui montre que la composée $\arccos\circ\cos$ est définie sur tout $\mathbf{R}$. Pour chaque $t\in[0,\pi]$, on a par définition de la réciproque arccos l'égalité $[\arccos\circ\cos](t) = t$. La parité de cos et sa 2π-périodicité se propagent par ailleurs à la composée $\arccos\circ\cos$ vu à t fixé les égalités

$$\arccos(\cos(-t)) = \arccos(\cos(t)) \text{ et } \arccos(\cos(t+2\pi)) = \arccos(\cos t).$$

On en déduit que cette composée a pour graphe un signal triangulaire obtenu en reproduisant le graphe de "valeur absolue" sur $[-\pi,\pi]$ translaté de multiples de 2π.

Autre idée : cos est dérivable, arccos est dérivable sur $]-1,1[$, donc $\arccos\circ\cos$ est dérivable là où cos évite ±1, *i. e.* sur $\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$, et l'on a pour chaque réel $t\notin\pi\mathbf{Z}$ les égalités

$$\frac{\partial}{\partial t}\arccos(\cos(t)) = \arccos'(\cos t)\cdot\cos'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(-\sin t) = \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t}} = \frac{\sin t}{|\sin t|} = \mathit{signe}(\sin t).$$

La composée $\arccos\circ\cos$ est donc affine par morceaux de pente ±1, cette pente changeant à chaque multiple de π : cette composée valant par ailleurs l'identité sur $[0,\pi]$ (même argument que ci-dessus) et étant continue, on retrouve le signal triangulaire sus-décrit.

2. Soit $a\in\mathbf{R}$: on a les équivalences

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a = \frac{13}{5} &\underset{\text{de ch}}{\overset{\text{déf.}}{\iff}} \frac{e^a+e^{-a}}{2} = \frac{13}{5} \underset{A:=e^a}{\overset{\text{définir}}{\iff}} A+\frac{1}{A} = 2\frac{13}{5} \underset{A\text{ (qui est bien non nul)}}{\overset{\text{multiplier/diviser par}}{\iff}} A^2 - 2\frac{13}{5}A = -1\\ &\iff \left(A-\frac{13}{5}\right)^2 = \underbrace{\frac{13^2}{5^2}-1}_{=\frac{169}{25}-\frac{25}{25}=\frac{144}{25}} \iff A-\frac{13}{5} = \pm\frac{12}{5} \iff A = \frac{13\pm12}{5}\\ &\iff e^a\in\left\{\frac{1}{5},5\right\} \overset{a\text{ réel}}{\iff} a\in\left\{\ln\frac{1}{5},\ln 5\right\} \iff a = \pm\ln 5.\end{aligned}$$

Sanity check : l'application ch étant paire, l'opposé de chaque solution doit être encore solution.

3. Soit $t\in[-1,1]$ (afin de donner sens à $\arccos t$). Puisque $t^{42} = \left(t^{21}\right)^2$ est positif, on peut (par croissance stricte sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'application $a\mapsto\frac{1}{a}$) majorer $\frac{1}{1+t^{42}} \leq \frac{1}{1+0} = 1$ avec égalité ssi $t=0$; l'application arccos étant par ailleurs positive et ne s'annulant qu'en 1, on peut majorer $-\arccos t \leq -0 = 0$ avec égalité ssi $t=1$. Sommer ces majorations livre celle $\frac{1}{1+t^{42}} - \arccos t \leq 1+0$ avec égalité ssi on a égalité partout, *i. e.* ssi $t=0$ et $t=1$, conjonction irréalisable. Le logarithme considéré ne prend par conséquent que des valeurs strictement négatives et sa racine carrée ne fait aucun sens. La fonction étudiée n'est ainsi définie nulle part et il serait oiseux de chercher à donner sens à sa dérivée.

4. L'application considérée est dérivable sur $\mathbf{R}$ (comme différence de composée d'applications dérivables) et l'on a pour chaque réel t les égalités

$$\frac{\partial}{\partial t}\arctan 9t = \arctan'(9t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(9t) = \frac{9}{1+(9t)^2},$$

de même en remplaçant partout 9 par 4, d'où les équivalences

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\arctan(9t)-\arctan(4t)]=0 &\iff \frac{\partial}{\partial t}[\arctan(9t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\arctan(4t)] \iff \frac{9}{1+81t^2} = \frac{4}{1+16t^2} \\ &\iff 9+9\cdot 16t^2 = 4+4\cdot 81t^2 \iff 5 = t^2(324-144) \\ &\iff \frac{5}{180} = t^2 \iff t^2 = \frac{1}{36} \iff t = \pm\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(a) Soit $a\in\mathbf{R}^*$, le quotient considéré $\frac{e^{2a}-\ln|a|+a^{180}}{e^{3a}+4}$ fait alors sens.

Lorsque $a\to\infty$, c'est l'exponentielle de plus haut degré e^{3a} qui va "piloter". On a en effet les majorations et tendance

$$\begin{aligned}&\left|\frac{e^{2a}-\ln|a|+a^{180}}{e^{3a}+4}\right| = \frac{\left|e^{2a}-\ln|a|+a^{180}\right|}{|e^{3a}+4|} \underset{\text{et } e^{3a}+4\geq 0}{\overset{\text{comp. triang.}}{\leq}} \frac{\left|e^{2a}\right|+|\ln|a||+\left|a^{180}\right|}{e^{3a}+4} \\ &\overset{4\geq 0}{\leq} \frac{e^{2a}+|\ln|a||+|a|^{180}}{e^{3a}+0} = e^{-a}+\frac{|\ln|a||}{e^{3a}}+\frac{|a|^{180}}{e^{3a}} \underset{\text{comparées}}{\overset{\text{croissances}}{\longrightarrow}} 0+0+0=0.\end{aligned}$$

Lorsque $a\to-\infty$, c'est le monôme a^{180} qui va "piloter" (les exponentielles tendent vers 0) : en réécrivant

$$\frac{e^{2a}-\ln|a|+a^{180}}{e^{3a}+4} = a^{180}\,\frac{\frac{e^{2a}}{a^{180}}-\frac{\ln|a|}{a^{180}}+1}{e^{3a}+4},$$

le dénominateur tend vers $0+4$, le numérateur vers $0-0+1$ (par croissances comparées) et le coefficient a^{180} vers ∞ (car l'exposant 180 est pair). Finalement, le quotient étudié tend vers ∞.

(b) Soit $t>0$, ce qui donne sens à la différence considérée. En réécrivant cette dernière sous la forme $\ln\left(1+t^2\right)-\ln\left(t^\lambda\right) = \ln\frac{1+t^2}{t^\lambda}$, on voit que tout va dépendre des positives respectives des exposants 2 et λ. Toutes les tendances qui suivent seront énoncées quand $t\to\infty$.

Si $\lambda>2$, c'est le dénominateur qui "pilote" et la fraction $\frac{1+t^2}{t^\lambda}$ vers 0^+, donc son logarithme tend $-\infty$ (d'après la tendance $\ln\underset{0}{\longrightarrow}-\infty$).

Si $\lambda<2$, c'est t^2 qui "pilote" et l'on a les minorations et tendances

$$\frac{1+t^2}{t^\lambda}\geq\frac{t^2}{t^\lambda} = t^{2-\lambda}\overset{\text{car } 2>\lambda}{\longrightarrow}\infty,\text{ d'où }\ln\frac{1+t^2}{t^\lambda}\longrightarrow\infty\text{ (sachant }\ln\underset{\infty}{\longrightarrow}\infty).$$

Si enfin $\lambda=2$, la fraction $\frac{1+t^2}{t^\lambda}=\frac{1}{t^2}+1$ tend vers $0+1=1$ où ln est continue, donc $\ln\frac{1+t^2}{t^\lambda}$ tend vers $\ln 1 = 0$.

(c) L'application étudiée est définie sur $\mathbf{R}^*$. Pour chaque $t\in\mathbf{R}^*$, on a les égalités et (vu la dérivabilité de sin en 0) la tendance

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t-\sin 0}{t-0}\overset{t\to 0}{\longrightarrow}\sin' 0 = \cos 0 = 1.$$

(d) L'application étudiée est définie sur $]-1,\infty[\setminus\{0\}$. Pour chaque $t>-1$ non nul, on a les égalités et (vu la dérivabilité de ln en 1) la tendance

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\ln(1+t)-\ln(1)}{(1+t)-1}\overset{t\to 0}{\longrightarrow}\ln' 1 = \frac{1}{1} = 1.$$

(e) L'application étudiée est définie sur $\mathbf{R}^*$. Pour chaque $t\in\mathbf{R}^*$, on a les égalités et (vu la dérivabilité de exp en 0) la tendance

$$\frac{e^t-1}{t} = \frac{\exp t-\exp 0}{t-0}\overset{t\to 0}{\longrightarrow}\exp' 0 = \exp 0 = 1.$$