

Devoir surveillé

vendredi 29 novembre 2019

La calculatrice et le portable sont interdits. Rappelons les trois commandements de la mathématique :

1. *ce que tu exprimes, ce sera ce que tu penses – et rien d'autre.* [exprime-toi clairement]
2. *ce dont tu parles, tu lui auras donné sens au préalable – toi ou autrui.* [sache de qui tu parles]
3. *ce que tu affirmes, tu l'auras prouvé – sinon tu le tairas.* [démontre ce que tu dis]

Ces commandements seront au fondement même de la correction. À bon entendeur... bon travail.

Le correcteur arrêtera de lire une question où la dérivée d'une application serait notée $f(x)'$.

1. (a) **(1pt)** Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Définir la tendance $f \xrightarrow{-1} \infty$.
(b) **(1pt)** Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$. Définir la tendance $f \xrightarrow{-\infty} 3i$.
(c) **(2pts)** Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$. Définir la continuité de f sur le segment $[0, 1]$.
(d) **(3pts)** L'application "partie entière" est-elle continue en 7 ? en π ?
2. Énoncer les théorèmes resp. :
 - (a) **(1pt)** des valeurs intermédiaires ;
 - (b) **(1pt)** des accroissements finis ;
 - (c) **(1pt)** de l'angle au centre ;
 - (d) **(1pt)** dit "de la bijection".
3. (a) **(3pts)** Soit $c \in \mathbf{C}$. Donner sens à $\sin c$ puis montrer l'implication $c \in \mathbf{R} \implies \sin c \in \mathbf{R}$.
(b) **(4pts)** Trouver une application $M : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\forall a, b \in \mathbf{C}, \sin a \cos b = M \begin{pmatrix} \sin(a+b) \\ \sin(a-b) \end{pmatrix}$.
En déduire une application $f : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\forall a, b \in \mathbf{C}, \sin(a+b) = f \begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.
(c) **(1pt)** Définir l'application arccos.
(d) **(2pts)** Décrire l'application dérivée \arctan' .
(e) **(3pts)** Décrire l'application composée $\tan \circ \arcsin$.
(f) **(3pts)** Étudier la composée $\arccos \circ \cos$.
4. **(4pts)** Résoudre l'équation $\operatorname{ch} a = \frac{13}{5}$ d'inconnue réelle a .
5. **(4pts)** Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \sqrt{\ln \left(\frac{1}{1+t^2} - \arccos t \right)}$.
6. **(3pts)** Déterminer les zéros de la dérivée de l'application $t \mapsto \arctan(9t) - \arctan(4t)$.
7. Soit λ un réel. Étudier les tendances de la fonction resp. :
 - (a) **(3pts)** $a \mapsto \frac{e^{2a} - \ln|a| + a^{180}}{e^{3a} + 4}$ en ∞ et en $-\infty$;
 - (b) **(3pts)** $t \mapsto \ln(1+t^2) - \lambda \ln t$ en ∞ ;
 - (c) **(1pt)** $\theta \mapsto \frac{\sin \theta}{\theta}$ en 0 ;
 - (d) **(1pt)** $\varepsilon \mapsto \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ en 0 ;
 - (e) **(1pt)** $\ell \mapsto \frac{e^\ell - 1}{\ell}$ en 0 ;