

# Devoir surveillé

vendredi 29 novembre 2019

La calculatrice et le portable sont interdits. Rappelons les trois commandements de la mathématique :

1. *ce que tu exprimes, ce sera ce que tu penses – et rien d'autre.* [exprime-toi clairement]
2. *ce dont tu parles, tu lui auras donné sens au préalable – toi ou autrui.* [sache de qui tu parles]
3. *ce que tu affirmes, tu l'auras prouvé – sinon tu le tairas.* [démontre ce que tu dis]

**Ces commandements seront au fondement même de la correction.** À bon entendeur... bon travail.

Le correcteur arrêtera de lire une question où la dérivée d'une application serait notée  $f(x)'$ .

1. (a) **(1pt)** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Définir la tendance  $f \xrightarrow{-1} \infty$ .  
(b) **(1pt)** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ . Définir la tendance  $f \xrightarrow{-\infty} 3i$ .  
(c) **(2pts)** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ . Définir la continuité de  $f$  sur le segment  $[0, 1]$ .  
(d) **(3pts)** L'application "partie entière" est-elle continue en  $7$ ? en  $\pi$ ?
2. Énoncer les théorèmes resp. :
  - (a) **(1pt)** des valeurs intermédiaires ;
  - (b) **(1pt)** des accroissements finis ;
  - (c) **(1pt)** de l'angle au centre ;
  - (d) **(1pt)** dit "de la bijection".
3. (a) **(3pts)** Soit  $c \in \mathbf{C}$ . Donner sens à  $\sin c$  puis montrer l'implication  $c \in \mathbf{R} \implies \sin c \in \mathbf{R}$ .  
(b) **(4pts)** Trouver une application  $M : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $\forall a, b \in \mathbf{C}, \sin a \cos b = M \begin{pmatrix} \sin(a+b) \\ \sin(a-b) \end{pmatrix}$ .  
En déduire une application  $f : \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $\forall a, b \in \mathbf{C}, \sin(a+b) = f \begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$ .  
(c) **(1pt)** Définir l'application arccos.  
(d) **(2pts)** Décrire l'application dérivée  $\arctan'$ .  
(e) **(3pts)** Décrire l'application composée  $\tan \circ \arcsin$ .  
(f) **(3pts)** Étudier la composée  $\arccos \circ \cos$ .
4. **(4pts)** Résoudre l'équation  $\operatorname{ch} a = \frac{13}{5}$  d'inconnue réelle  $a$ .
5. **(4pts)** Calculer la dérivée de la fonction  $t \mapsto \sqrt{\ln \left( \frac{1}{1+t^2} - \arccos t \right)}$ .
6. **(3pts)** Déterminer les zéros de la dérivée de l'application  $t \mapsto \arctan(9t) - \arctan(4t)$ .
7. Soit  $\lambda$  un réel. Étudier les tendances de la fonction resp. :
  - (a) **(3pts)**  $a \mapsto \frac{e^{2a} - \ln|a| + a^{180}}{e^{3a} + 4}$  en  $\infty$  et en  $-\infty$  ;
  - (b) **(3pts)**  $t \mapsto \ln(1+t^2) - \lambda \ln t$  en  $\infty$  ;
  - (c) **(1pt)**  $\theta \mapsto \frac{\sin \theta}{\theta}$  en  $0$  ;
  - (d) **(1pt)**  $\varepsilon \mapsto \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$  en  $0$  ;
  - (e) **(1pt)**  $\ell \mapsto \frac{e^\ell - 1}{\ell}$  en  $0$  ;