Devoir surveillé

vendredi 25 octobre 2019

Solution proposée.

1. (a) La validité à étudier équivaut au caractère tautologique de l'implication $[a \wedge \neg a] \Longrightarrow p$ (où a et p sont des symboles de propositions). Or, parmi les valeurs de vérité de a ou $\neg a$, l'une est fausse, donc celle de leur conjonction $a \wedge \neg a$ est fausse, *i. e.* celle de l'antécédent est fausse, donc celle de l'implication est vraie. Cette dernière est donc une tautologie et le raisonnement est valide.

   (b) Une formalisation possible est $\forall q \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ n > N \Longrightarrow |q_n| < \varepsilon$ (on sous-entend souvent la quantification "$\forall n \in \mathbf{N}$"). Sa négation équivaut (en utilisant les lois de De Morgan et en n'oubliant pas la quantification sous-entendue !) à

$$\begin{array}{c}\exists q \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}} \\ \exists \varepsilon > 0\end{array},\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n > N,\ |q_n| \geq \varepsilon \text{ (on sous-entend l'appartenance "}n \in \mathbf{N}\text{").}$$

   (c) Il existe un ensemble $\mathbf{N}$ muni d'une application s de ce dernier dans lui-même (appelée *successeur*) ainsi que d'un élément 0 (appelé son *premier élément*) telle que : pour chaque ensemble A, pour chaque application f de ce dernier dans lui-même et pour chaque élément $\alpha \in A$, il y a une unique suite a à valeurs dans A dont chaque terme s'obtient en appliquant f sur le terme précédent – à l'exception du premier qui est imposé valoir α. Formellement :

$$\exists \mathbf{N},\quad \begin{array}{c}\exists s \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \\ \exists 0 \in \mathbf{N}\end{array}, \forall A,\quad \begin{array}{c}\forall f \in A^A \\ \forall \alpha \in A\end{array},\ \exists! a \in A^{\mathbf{N}},\ \left\{ \begin{array}{c}\forall n \in \mathbf{N},\ a_{s(n)} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha\end{array} \right. .$$

   (d) Le verbe être peut servir à *qualifier* (être bleu, être à l'heure, être un cheval...), ou bien à *identifier* (être le Soleil, être le carré de -3, être la première femme médaillée Fields...). Le premier usage décrit des objets *particuliers* (ceux qui possèdent une certaine qualité) et se formalise par un prédicat quelconque, le second décrit un objet *singulier* (un seul) et se formalise par le prédicat d'identité $=$. Il peut arriver qu'une qualité détermine un objet unique, auquel cas les deux usages se recoupent : on parle alors de "l'unique objet vérifiant...".

2. Soient par l'absurde $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Élever au carré donne $2b^2 = a^2$. Si a était impair, son carré $2b^2$ le serait aussi, ce qu'il n'est pas, donc a est pair : soit $\alpha \in \mathbf{Z}$ tel que $a = 2\alpha$. L'égalité $2b^2 = a^2$ devient alors (après simplification) $b^2 = 2\alpha^2$, d'où (par le même argument) la parité de b. Or on peut toujours imposser restrospectivement a et b sans facteur commun (*i. e.* la fraction $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible), d'où une contradiction comme voulu.

3. Les symboles B^A (lire "B puissance A") dénotent l'ensemble des applications de A vers B (par exemple, $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ désigne l'ensemble des suites complexes).

   Les symboles $A \cup B$ (lire "A union B") dénotent la *réunion* de A et B, formée par les objets appartenant à A ou à B (le "ou" est ici – comme toujours en mathématique – *inclusif*).

   Les symboles $A \backslash B$ dénotent la *différence ensembliste* "A privé de B", formée par les objets appartenant à A mais pas à B.

   Les symboles $A \subset B$ (lire "A est inclus dans B") dénotent l'*inclusion* de A dans B, relation binaire exprimant l'appartenance à B de chaque élément de A.

4. (a) *Faux* : l'objet 2 apparaît dans l'ensemble de gauche mais pas dans celui de droite.

   (b) *Vrai* : les ensembles ne voient ni ordre ni répétition, les deux ensembles sont (identitairement) chacun formés des éléments 0, 1 et 2.

   (c) *Vrai* : chacun des trois éléments de gauche (0, 1 ou 2) est compris entre -2 et 3, *i. e.* appartient au segment $[-2, 3]$.

   (d) *Faux* : les suites voient les répétitions, or l'objet 3 apparaît trois fois à gauche et une seule à droite. Autre argument plus direct : ces deux suites n'ont pas la même longueur.

   (e) *Faux* : les couples voient l'ordre.

   (f) *Faux* : on a les équivalences $\frac{15}{18} > \frac{16}{19} \Longleftrightarrow \frac{5}{6} > \frac{16}{19} \underset{\text{positif}}{\overset{\text{tout est}}{\Longleftrightarrow}} 5 \cdot 19 > 6 \cdot 16 \Longleftrightarrow 95 > 96$.

   (g) *Vrai* : on a (tout est positif) les équivalences $\sqrt{71} > \frac{25}{3} \Longleftrightarrow 71 > \frac{25^2}{3^2} \Longleftrightarrow 71 \cdot 9 > 625 \Longleftrightarrow 639 > 625$.

5. D'après l'axiome de l'infini, il suffit de montrer d'une part l'appartenance $\frac{1}{\pi} \in [0,1]$ (ce qui clair vu la minoration $\pi > 1$) d'autre part que l'application $t \mapsto t(1-t)$ va de $[0,1]$ *dans lui-même*. Soit donc $t \in [0,1]$: on a alors l'encadrement $0 \leq t \leq 1$, d'où (en opposant) $-1 \leq -t \leq 0$ puis (en ajoutant 1) celui $0 \leq 1-t \leq 1$. En multipliant ces deux encadrements de nombres *positifs*, on obtient $0 \leq t(1-t) \leq 1$, *CQFD*.

6. Les quantités apparaissant dans l'équation faisant sens, on cherche les solutions dans le plus grand ensemble de nombres connu du cours – celui des complexes. L'indication donnée montre que $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (resp. $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$) est une racine carrée de i (resp. $-i$). On a ainsi à $c \in \mathbf{C}$ fixé les équivalences

$$c \text{ est solution de l'équation proposée} \iff c^4+1=0 \iff \left(c^2\right)^2 - i^2 = 0 \iff \left(c^2-i\right)\left(c^2+i\right)=0$$

$$\iff \left(c^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(c^2 - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 0 \iff \left(c - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(c + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(c - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(c + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\iff c = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ ou } c = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \text{ ou } c = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \text{ ou } c = \frac{i-1}{\sqrt{2}}.$$

Les solutions sont donc les quatre sommets d'un carré situés à l'intersection $\bigotimes$ du cercle unité et des deux bissectrices principales.

7. Les quantités apparaissant dans l'équation font sens ssi le truc $2\spadesuit + 1$ sous la racine est réel positif, *i. e.* ssi $\spadesuit \geq -\frac{1}{2}$. On cherche par conséquent des solutions dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$. Or, à t fixé dans ce dernier, on a les équivalences

$$t \text{ est solution de l'équation proposée} \iff \sqrt{2t+1} \leq t-1 \overset{\text{chaque racine carrée}}{\underset{\text{est positive}}{\iff}} \begin{cases} \sqrt{2t+1} \leq t-1 \\ 0 \leq t-1 \end{cases}$$

$$\overset{2t+1\geq 0}{\iff} \begin{cases} 2t+1 \leq (t-1)^2 \\ 0 \leq t-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+1 \leq t^2-2t+1 \\ 1 \leq t \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq t(t-4) \\ 1 \leq t \end{cases} \iff t \geq 4$$

(on a introduit et gardé la positivité "$0 \leq t-1$" afin de pouvoir conserver des équivalences tout du long). L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $[4, \infty[$.

8. Il s'agit d'une équation récurrente linéaire d'ordre 1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Cherchons déjà les suites constantes vérifiant la relation de récurrence : on a à $r \in \mathbf{R}$ fixé les équivalences $r = 2(1-r) \iff 3r = 2 \iff r = \frac{2}{3}$.

On en déduit les équivalences

$$\forall n \in \mathbf{N}, \lambda_{n+1} = 2(1-\lambda_n) \iff \forall n \in \mathbf{N}, \lambda_{n+1} - \frac{2}{3} = -2\left(\lambda_n - \frac{2}{3}\right) \iff \lambda - \frac{2}{3} \text{ géométrique de raison } -2\,;$$

d'où les équivalences

$$\lambda \text{ solution} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbf{N},\ \left[\lambda - \frac{2}{3}\right]_n = \left[\lambda - \frac{2}{3}\right]_0 (-2)^n \\ \lambda_0 = 1 \end{cases} \iff \forall n \in \mathbf{N},\ \lambda_n = \frac{(-2)^n + 2}{3}.$$

Sanity check : vérifier que l'égalité ci-dessus redonne bien pour premier terme la valeur 1 !

9. (a) Soient λ et μ deux réels. On a alors les équivalences

$$\overrightarrow{(\lambda n + \mu)_{n\in\mathbf{N}}} \iff [\lambda(n+2)+\mu] + [\lambda(n+1)+\mu] = 2(\lambda n + \mu) + 3 \iff 3\lambda = 3 \iff \lambda = 1,$$

ce qui montre que les suites arithmétiques cherchées sont celles de raison 1. La suite a invoquée est alors nécessairement (et tout simplement) la suite identité $(n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(b) On a à $n \in \mathbf{N}$ fixé les égalités

$$[s-a]_{n+2} + [s-a]_{n+1} = (s_{n+2}+s_{n+1}) - (a_{n+2}+a_{n+1}) \overset{\overrightarrow{s} \text{ et } \overrightarrow{a}}{=} (2s_n+3) - (2a_n+3) = 2[s-a]_n,$$

d'où la relation $\widehat{s-a}$. Le polynôme caractéristique associé vaut $X^2+X-2 = (X-1)(X+2)$ et a pour racines 1 et -2, donc la suite $s-a$ est combinaison linéaire des suites géométriques (1^n) et $((-2)^n)$, d'où (l'existence de) deux réels A et B tels que $s - a = A + B((-2)^n)$. Évaluer en 0 donne $A + B = s_0 - a_0 = 1$, évaluer en 1 donne $A - 2B = s_0 - a_0 = -1$, d'où $(A,B) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et la conclusion

$$\forall n \in \mathbf{N},\ s_n = n + \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}.$$

Sanity check : contrôler les deux valeurs initiales $s_0 = 1$ et $s_1 = 0$!

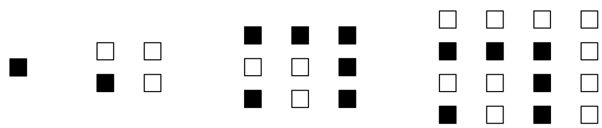
Remarque : a-t-on montré que la seule solution possible convenait ?

10. On a les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ \sigma_n = \underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{n \text{ temes}}$ (bien contrôler la forme du dernier terme en testant les petites valeurs $n = 1, 2$). On voit alors apparaître dans la somme

$$\overbrace{\underbrace{\overbrace{\underbrace{1+3}_{\sigma_2=4}+5}^{\sigma_3=9}+7}_{\sigma_4=16}+9}^{\sigma_5=25}+11+\cdots$$

la suite $(1, 4, 9, 16, 25, ...)$ des carrés parfaits, ce qui permet d'intuiter $\sigma_n = n^2$ pour chaque naturel n (encore une fois, bien vérifier les petites valeurs pour ajuster un éventuel décalage $n \pm 1$). Or on a à $n \in \mathbf{N}$ fixé les égalités

$$\begin{aligned} 2\sigma_n &= \underbrace{\begin{matrix} 1+3+\cdots+(2n-1) \\ +(2n-1)+(2n-3)+\cdots+1 \end{matrix}}_{n \text{ termes par lignes}} = \underbrace{\begin{matrix} 1 & +3 & & +(2n-1) \\ +(2n-1) & +(2n-3) & +\cdots & +1 \end{matrix}}_{n \text{ colonnes}} \\ &= \underbrace{2n+2n+\cdots+2n}_{n \text{ termes}} = 2n \times n, \text{ d'où } \sigma_n = n^2 \text{ comme intuité.} \end{aligned}$$

Preuve géométrique :  etc.

11. La différence entre deux termes consécutifs est le carré d'un inverse, donc est positive, d'où la croissance de la suite S. Sa convergence équivaut donc à son caractère majoré. Or on a à $n \in \mathbf{N}^*$ fixé les majorations

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\left(\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{n^2}\right) \overset{\text{indication 2}}{\leq} 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\,(n-1)} \\ &\overset{\text{indication 1}}{=} 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &\overset{\text{associativité}}{=} (1+1)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{1}{n} \\ &\overset{\text{télescopage}}{=} 2-\frac{1}{n} < 2, \text{ d'où la convergence de la suite } S. \end{aligned}$$

Culture : la limite de S vaut en fait $\frac{\pi^2}{6}$ (que l'on vérifiera bien être < 2).

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$: la suite finie $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ..., \frac{1}{n+n}\right)$ décroissant, elle est minorée par son dernier terme, d'où les comparaisons

$$\begin{aligned} h_{2n} - h_n &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ termes minorés chacun par } \frac{1}{2n}} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},\ \textit{CQFD.} \end{aligned}$$

Supposons la convergence de h, notons l sa limite, soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbf{N}$ un rang au-delà duquel les termes de h valent l à ε près et majorons

$$\frac{1}{2} < h_{2N} - h_N \leq |h_{2N} - h_N| \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{comparaison}}{\leq}} \underbrace{|h_{2N} - l|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|l - h_N|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$

On vient d'établir $\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon > \frac{1}{4}$, ce qui est évidemment absurde (prendre $\varepsilon = \frac{1}{42}$). *Conclusion* : la suite h diverge.

Culture : on peut montrer que la suite h tend vers ∞ aussi lentement que $\ln n$, au sens où $\frac{h_n}{\ln n} \longrightarrow 1$.