Devoir surveillé

vendredi 25 octobre 2019

$\boxed{\text{La calculatrice et le portable sont interdits.}}$ Rappelons les trois commandements de la mathématique :

1. *ce que tu exprimes, ce sera ce que tu penses – et rien d'autre.* [exprime-toi clairement]
2. *ce dont tu parles, tu lui auras donné sens au préalable – toi ou autrui.* [sache de qui tu parles]
3. *ce que tu affirmes, tu l'auras prouvé – sinon tu le tairas.* [démontre ce que tu dis]

Ces commandements seront au fondement même de la correction. À bon entendeur... bon travail.

1. (a) **(3pts)** Étudier la validité du raisonnement suivant : *de la conjonction d'une proposition et de sa négation déduire n'importe quelle proposition.*
   (b) **(3pts)** Formaliser en logique des prédicats l'énoncé "*chaque suite rationelle tend vers* 0" (sans utiliser de prédicat "tendre vers" !). En notant F cette formalisation, donner un énoncé équivalent à la négation $\neg F$ et ne contenant aucun symbole $\neg$ de négation.
   (c) **(2pts)** Énoncer en français l'axiome de l'infini puis le formaliser (en logique prédicative) dans le langage des ensembles et applications.
   (d) **(2pts)** Donner deux acceptions du verbe *être* qu'il convient de distinguer en logique prédicative.
2. **(4pts)** Établir l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
3. **(4pts)** Soient A et B deux ensembles. Définir, nommer et donner la prononciation de B^A, $A \cup B$, $A \backslash B$ et $A \subset B$.
4. **(9pts)** Prouver ou réfuter chacune des sept relations suivantes :

$$\{1,0,0,2,1\} \subset \{0,1\} \qquad \{1,0,0,2,1\} = \{2,1,0\} \qquad \{1,0,0,2,1\} \subset [-2,3]$$
$$(3,3,3,2,2) = (3,2) \qquad \binom{1}{2} = \binom{2}{1} \qquad \frac{15}{18} > \frac{16}{19} \qquad \sqrt{71} > \frac{25}{3}.$$

5. **(2pts)** Montrer l'existence d'une unique unique suite $s \in [0,1]^{\mathbf{N}}$ telle que $s_0 = \frac{1}{\pi}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $s_{n+1} = s_n(1-s_n)$
6. **(3pts)** Résoudre l'équation $\maltese^4 + 1 = 0$ d'inconnue $\maltese$. On pourra développer $(1 \pm i)^2$.
7. **(3pts)** Résoudre l'inéquation $\sqrt{2\spadesuit + 1} \leq \spadesuit - 1$ d'inconnue $\spadesuit$.
8. **(3pts)** Déterminer les suites λ vérifiant $\lambda_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lambda_{n+1} = 2(1-\lambda_n)$. (On demande un moyen "simple" de calculer λ_n pour chaque naturel n sans avoir à calculer les termes précédents.)
9. Pour chaque suite réelle s, on note $\overrightarrow{s}$ (resp. $\widehat{s}$) la relation $\forall n \in \mathbf{N},\ s_{n+2} + s_{n+1} = 2s_n + 3$ (resp. la même relation sans le "+3").
   (a) **(2pts)** Décrire les suites arithmétiques a vérifiant $\overrightarrow{a}$. On invoque pour la suite une telle suite a que l'on imposera de premier terme nul.
   (b) **(4pts)** Soit $s \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ vérifiant $\overrightarrow{s}$ et $\binom{s_0}{s_1} = \binom{1}{0}$. Établir la relation $\widehat{s-a}$ et en déduire une expression "simple" de s_n pour chaque naturel n.
10. **(4pts)** Pour chaque naturel n, on note σ_n la somme des n premiers entiers naturels impairs. Calculer σ_i pour chaque naturel $i \in [1,5]$, émettre une conjecture et la prouver. (**Bonus (2pts)** : donner une "preuve sans mots" à l'aide d'un dessin)
11. **(4pts)** Notons S la suite $\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$. Est-elle monotone ? Converge-t-elle ? On pourra établir et utiliser les égalités $\forall a > 0,\ \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ et les minorations $\forall b > 0,\ b^2 \geq b(b-1)$.
12. **(4pts)** Notons h la suite $\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ (dite *harmonique*). Prouver les minorations $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ h_{2n} - h_n > \frac{1}{2}$. La suite h converge-t-elle ?