Université d'Evry - Paris-Saclay **EC121**
L1 – 1er semestre 2016-2017 **Analyse Portail**

Feuille d'exercices 7

Primitives et intégrales.

Exercice 7.1 – Intégrales élémentaires

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^3 - x + 4\,dx\ ;\ \int_1^2 (3x-5)^7\,dx\ ;\ \int_1^3 \frac{1}{y+1}\,dy\ ;\ \int_2^3 \frac{1}{(x-4)^3}\,dx\ ;\ \int_0^1 \mathrm{e}^{2u}\,du\ ;\ \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Exercice 7.2 – Primitive du produit et produit de primitives

1. Vérifiez que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de $f(x) = x^2$, et que $G(x) = \frac{1}{4}x^4$ est une primitive de $g(x) = x^3$.

2. Une primitive $H(x)$ de la fonction $h(x) = f(x) \times g(x)$ est-elle donnée par la formule $H(x) = F(x) \times G(x)$?

Exercice 7.3 – Primitives par parties (I)

Pour chacune des fonctions $f(x)$ suivantes, écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = u'(x)v(x)$, en précisant l'expression de $u(x)$ et $v(x)$. On choisira les facteurs $u'(x)$ et $v(x)$ de sorte que $u(x)$ et $v'(x)$ soient faciles à calculer. Calculer alors l'intégrale I demandée.

$$f(x) = x\ln(x)\ ,\ I = \int_1^2 x\ln(x)\,dx\ ;\ f(x) = \ln(x)\ ,\ I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx\ ;\ f(x) = \arctan(x)\ ,\ I = \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan(x)\,dx$$

Exercice 7.4 – Primitives de certains produits

1. Polynôme fois exponentielle.

a. Pour A, B deux réels donnés, on considère la fonction $F(x) = (Ax+B)\mathrm{e}^x$. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque exprimer $F'(x)$ en fonction de A, B, e et x.

b. Déduire du calcul précédent une primitive $F(x)$ de $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, donner une primitive $F(x)$ de n'importe quelle fonction de la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.

c. Application : Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,dx$ et $\displaystyle\int_{-2}^2 (2x-1)\mathrm{e}^x\,dx$.

2. Polynôme fois fonction trigonométrique.

a. Pour A, B, C, D quatre réels donnés, on considère la fonction $F(x) = (Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\sin(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque exprimer $F'(x)$ en fonction de A, B, C, D et x.

b. Déduire du calcul précédent une primitive $F_1(x)$ de $f_1(x) = (x+1)\cos(x) + (3x-2)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$. De même déterminer une primitive $F_2(x)$ de $f_2(x) = (x+1)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, donner une primitive $F(x)$ de n'importe quelle fonction de la forme $f(x) = (ax+b)\cos(x)$.

c. Application : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x+2)\sin(x)\,dx$.

Exercice 7.5 – Primitives par parties (II) Pour un entier $n \geq 0$ on note $F_n(x)$ la primitive de $x^n \mathrm{e}^x$ qui s'annule en $x = 0$.

1. Déterminer $F_0(x)$ et vérifier que $F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$.

2. En utilisant le procédé d'intégration par parties montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que :

Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel x on a $F_{n+1}(x) = x^{n+1}\mathrm{e}^x - (n+1)F_n(x)$.

En déduire que $F_n(x)$ s'écrit sous la forme $F_n(x) = Q_n(x)\mathrm{e}^x$, où $Q_n(x)$ est un polynôme de degré n.

3. Montrer alors que pour tout polynôme $P(x)$, une primitive de $P(x)\mathrm{e}^x$ est de la forme $Q(x)\mathrm{e}^x$, avec $Q(x)$ un polynôme de même degré que P.

Exercice 7.6 – Primitives et intégrales de fractions rationnelles

On considère les fonctions suivantes $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)^2}$ $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$.

1. Donner le domaine de définition de f et g.

2. Trouver les réels a, b, c (et d pour g) tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$ et $g(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2+2x+2}$ (pour tout x dans le domaine de définition).

3. En déduire une primitive de f et g sur leurs domaines de définition. Calculer alors $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

4. En utilisant le même genre de décomposition que ci-dessus calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^3}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 7.7 – Primitives de la composée et composée des primitives

1. Vérifiez que $F(u) = \frac{1}{3}u^3$ est une primitive de $f(u) = u^2$, et que $U(x) = \sin(x)$ est une primitive de $u(x) = \cos(x)$.

2. Une primitive $H(x)$ de la fonction $h(x) = f(u(x))$ est-elle donnée par la formule $H(x) = F(U(x))$?

Exercice 7.8 – Changements de variables affines

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x - \frac{\pi}{3})\,dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,dx$.

2. Calculer, avec le changement de variable indiqué, les intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 (2x-1)^5(x+3)dx \quad (2x-1=t) \quad , \quad J = \int_2^3 \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}dx \quad (x-1=t) \ .$$

Exercice 7.9 – Reconnaître une dérivée composée simple pour calculer une intégrale

Calculer les intégrales suivantes en reconnaissant une forme $K\frac{u'(x)}{u(x)}, Ku'(x)[u(x)]^\alpha$ ou $Ku'(x)a^{u(x)} (a > 0)$:

$$A = \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx \ , \ B = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}dx \ , \ C = \int_{-1}^0 \frac{6x+2}{3x^2+2x+2}\,dx$$

$$D = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \ , \ E = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2+1}dx \ , \ F = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx \ , \ G = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$$