Université d'Evry - Paris-Saclay — **EC121**
L1 – 1er semestre 2016-2017 — **Analyse Portail**

Feuille d'exercices 6

Fonctions : dérivées.

Exercice 6.1 – Nombre dérivé
Donner le nombre dérivé de $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 2$ et celui de $g(x) = \frac{3}{x+1}$ au point $x_0 = 1$.

Exercice 6.2 – Dérivées et limites indéterminées de la forme "$\frac{0}{0}$"
Calculer les limites suivantes quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \;;\; \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \;;\; \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sin(x-1)} \;;\; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{4+x}-2} \;;\; \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ (on pourra poser } u = \frac{1}{x}\text{).}$$

Exercice 6.3 – Dérivées de fonctions composées

1. Rappeler la formule de la dérivée d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$.

2. Pour chacune des fonctions $f(x)$ suivantes donner la dérivée $f'(x)$:

$$\ln(\cos(x)) \;;\; e^{\sin(x)} \;;\; \cos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \;;\; \sqrt{1+e^{x^2}}$$

3. Donner le domaine de définition des fonctions considérées aux questions 1. et 2. .

Exercice 6.4 – Equation de tangente et approximation affine
Dans chacun des cas suivants, donner l'approximation affine de $f(x)$ en x_0, ainsi qu'une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(x_0, f(x_0))$:

$$a)\ f(x) = -7x^3 \text{ et } x_0 = 1 \quad , \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } x_0 = -1 \quad , \quad c)\ f(x) = \sqrt{x^2-1} \text{ et } x_0 = 2$$

$$d)\ f(x) = \frac{e^x}{x-1} \text{ et } x_0 = 0 \quad , \quad e)\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(1+\sin(x))(\cos(x)+2)} \text{ et } x_0 = 0\ .$$

Exercice 6.5 – Etude asymptotique

1. Dresser un tableau de variations, aussi complet que possible, de la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2+x-4}{x+1}$.

2. **a.** Chercher trois réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b. Que représente pour $\mathcal{C}_f$, au voisinage de l'infini, la droite $D : y = ax + b$? Indiquer la position relative de D et $\mathcal{C}_f$.

3. Tracer, avec soin et dans un même repère, la droite D et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6.6 – Dérivée seconde et convexité

On considère la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer que $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que pour deux réels a, b quelconques on a $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b)$.

3. En utilisant la question précédente montrer que pour A, B deux réels > 0 quelconques on a toujours $\sqrt{AB} \leq \dfrac{1}{2}(A + B)$.

Exercice 6.7 – Annulation de la dérivée première : localisation des extremums potentiels

Soit $f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer le seul extremum possible de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f présente effectivement un maximum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.8 – Signe de la dérivée seconde : vérification et nature des extremums

Soit $f(x) = 1 - x^3 + x^4$. On étudie f sur $]-1; 1[$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les deux extremums possibles de f sur $]-1; 1[$. Dans la suite on les note x_0 et x_1 (avec $x_0 < x_1$).

2. Calculer $f''(x)$ et déterminer le signe de $f''(x)$ selon la position de x dans $]-1; 1[$.

3. Montrer alors que, sur $]-1; 1[$, la fonction f présente un minimum en x_1.

4. Montrer aussi que pour $x \in]0; \frac{1}{2}[$ quelconque, la tangente en x à la courbe représentative de f est située au dessus de la courbe représentative de f sur $]0; \frac{1}{2}[$. En considérant le cas de $x = \frac{1}{4}$, vérifier que la tangente en x à la courbe représentative de f peut repasser au dessous pour certaines abscisses dans $]-1; 1[\setminus]0; \frac{1}{2}[$.

5. Déterminer le signe de $f(x) - f(0)$ pour x proche de 0. En déduire que f ne présente pas d'extremum local en x_0. Pouvait-on obtenir cette conclusion en considérant la valeur de $f''(x_0)$?

Exercice 6.9 – Etude de fonctions

Etudier les fonctions suivantes (D_f, variations, convexité, extremums, asymptotes, $\mathcal{C}_f$) :

$$a)\ f(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad b)\ f(x) = \frac{4x-1}{2x+3} \quad , \quad c)\ f(x) = \frac{1}{x^2-1} \ .$$

Exercice 6.10 – On pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Calculer $f(3/4)$, puis résoudre : $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln 2$.

Exercice 6.11 – Identités via la dérivée

1. a. Calculer (sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$) la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1-x^5}{1-x}$.

b. En déduire une autre expression de la somme $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

2. On veut étudier l'expression $C(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ (définie pour tout réel $x \neq 0$).

a. Calculer la dérivée de $C(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. Combien vaut $C(x)$ pour $x < 0$?

Exercice 6.12 – Inégalités via la dérivée

1. a. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

b. Application. Donner, si elle existe, la limite de la suite

$$p_n = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2})...(1 + \frac{n}{n^2}) \quad (n \geq 1) \ .$$

Exercice 6.13 – Inégalités via la dérivée

Dans cet exercice on cherche à encadrer e^x par certains polynômes.

1. On pose $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ et $Q_2(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2$.

a. Pour $f(x) = e^x - P_2(x)$, calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.

b. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$. Donner le signe de $f''(x)$ pour $x \neq 0$.

c. Donner alors le signe de $f'(x)$. Puis en déduire le signe de $f(x)$ selon la valeur de x. En déduire que $P_2(x) \leq e^x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

d. Appliquer la méthode précédente à $g(x) = Q_2(x) - e^x$ pour démontrer que $e^x \leq Q_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

2. On pose $P_0(x) = 1$, et, pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$. Puis on introduit $Q_n(x) = P_n(x) + \frac{2}{n!}x^n$.

a. Montrer que la dérivée de P_n est P_{n-1}. Montrer aussi que $Q'_n(x) = Q_{n-1}(x)$.

b. Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que, pour tout $x \geq 0$, on a $e^x - P_n(x) \geq 0$, et que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $Q_n(x) - e^x \geq 0$. On pourra introduire $f_n(x) = e^x - P_n(x)$ et $g_n(x) = Q_n(x) - e^x$, et étudier leurs dérivées successives.

c. Montrer que pour $x_0 \in [0, 1]$ fixé la suite $\big(P_n(x_0)\big)$ converge vers e^{x_0}.

Exercice 6.14 – Croissances comparées.

1. Montrer que $x \mapsto e^x - x$ présente un minimum en $x = 0$. En déduire que $e^x > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer alors que $e^x > (\dfrac{x}{2})^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = 0$.

3. Montrer ensuite que si $a > 1$ on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = 0$.

4. Montrer enfin que si $a > 1$ et $b > 0$ on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = 0$.

Exercice 6.15 – Bijection

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction sh. Montrer que sh est une fonction impaire.

2. Calculer $\mathrm{sh}'(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x)$.

3. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. *On note argsh* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la bijection récirpoque.*

4. Montrer que $\mathrm{sh}'(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$. Puis calculer $\mathrm{argsh}'(x)$.

5. Pour $y \in \mathbb{R}$ et $x = \mathrm{argsh}(y)$, montrer que le nombre $t = e^x$ vérifie $t^2 - 2ty - 1 = 0$. En déduire que $\mathrm{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.