

## Feuille d'exercices 5

Fonctions : généralités, limites, valeurs.

### Exercice 5.1 – Domaines de définition

1. Donner le domaine de définition des fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad , \quad g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6} .$$

2. Donner le domaine de définition de la fonction composée  $h = g \circ f$ .

### Exercice 5.2 – Droites : équations et position relative.

Le plan euclidien  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la droite  $(D)$  passant par les points  $A(3, 2)$  et  $B(1, -2)$ .

1. a. Donner une équation de la droite  $(D)$ . Quelle est la pente de  $(D)$  ?

b. Donner une équation de la droite  $(\Delta)$  passant par  $C(2, 5)$  et de pente  $a = -\frac{1}{2}$ . Vérifier que  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont perpendiculaires et déterminer leur point de concours.

2. a. Donner la position des points suivants par rapport à  $(D)$  (au dessus, au dessous, sur) :

$$P(0; -4) \quad ; \quad Q(0; 3) \quad ; \quad R(3; 1) \quad ; \quad S(1000; 2000)$$

b. Montrer que la parabole d'équation  $y = -5 - x^2$  est située au dessous de  $(D)$  et qu'elle est tangente à  $(D)$  en un point qu'on précisera.

### Exercice 5.3 – Limites : cas favorables

On rappelle que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3 + 2x - 2) + e^{\sqrt[5]{x-1}}}{(x^2 + x - 3) \cos(x - 1)}$ .

2. Pour chacune des fonctions  $f(x)$  suivantes calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  :

$$\frac{1}{x} - \ln(x) \quad ; \quad \ln(x) \times \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{e^x}{\ln(x)} \quad ; \quad \frac{\ln(x)}{\cos(x)} \quad ; \quad \frac{\sqrt{1+x}}{\sin(x)} \quad ; \quad \frac{1}{\ln(1 - \sin(x))} \quad ; \quad e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3. Pour chacune des fonctions  $f(x)$  suivantes calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :  $e^{-x} + \frac{1}{x}$  ;  $(2 - e^{-x})(3 + \frac{1}{x})$  ;  $\frac{1 + e^{-x}}{2 + \frac{1}{1+x^2}}$  ;

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sin(\frac{1}{x^2})} \quad ; \quad x^2 + e^x \quad ; \quad x^3 e^x \quad ; \quad x^5(1 + e^{-x}) \quad ; \quad (-x)^3 + \cos(x) \quad ; \quad \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad ; \quad \frac{\sqrt{x}}{\cos(e^{-x})} \quad ; \quad \frac{\sqrt{x}}{\sin(e^{-x})}$$

### Exercice 5.4 – Somme où l'un des termes l'emporte sur l'autre

Supposons qu'une fonction  $f(x)$  s'écrive  $f(x) = u(x) + v(x)$  (pour tout réel  $x \geq 0$ ) avec  $u(x) > 0$ , et de plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = 0$  ("u(x) l'emporte sur v(x) quand  $x \rightarrow +\infty$ ").

Montrer qu'alors  $f(x)$  et  $u(x)$  ont même limite quand  $x \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 5.5 – Limites indéterminées

1. Forme indéterminée  $(\infty) - (\infty)$ . Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} - e^{x^3 - 2x + 1}$$

2. Forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ . Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{2(x^2 - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

3. Forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ .

a. Reprendre les expressions du 2., et déterminer leurs limites en  $+\infty$ .

b. Calculer les limites des expressions suivantes quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{e^x}{\ln(x)}; \quad \frac{e^{\sqrt{x}} + x^2}{x^3 + \ln(1+x^4)}$$

4. Forme indéterminée  $0 \times \infty$ . Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left( e^x + \frac{1}{x^4} + \ln(1+x) \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)(e^{-x} + e^{-x^2}); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^3 + 1)) \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right)$$

**Exercice 5.6 – Limites à gauche et à droite** Pour chacune des fonctions  $f(x)$  suivantes calculer les limites de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$  et quand  $x \rightarrow 0^-$  :

$$f(x) = \frac{|x|}{x}; \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

### Exercice 5.7 – Fonctions bornées

1. Soit  $n \geq 0$  un entier naturel. Montrer que  $f(x) = \frac{x^n}{1+x^4}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $n \leq 4$ .

2. Parmi les fonctions suivantes, dire laquelle est bornée sur  $]0, 1[$  :  $\frac{1+x^2}{x}$  ;  $\frac{x}{\ln(x) - 1}$ .

3. Supposons que  $f : [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée sur  $[0; 1]$ ,  $[1; 2]$  et  $[2; 3]$ . Montrer que  $f$  est bornée sur  $[0; 3]$ .

4. Supposons que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions, et que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer qu'alors la fonction composée  $h = f \circ g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Peut-on borner  $g \circ f$  ?

### Exercice 5.8 – Valeurs intermédiaires

1. Montrer que l'équation  $e^x = x + 2$  admet une solution  $x \in ]1; 2[$ .

2. Soit  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$  un polynôme de degré 4, avec  $a, b, c$  quelconques. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty$ . En déduire que  $P(x)$  admet une racine réelle  $> 0$  et une racine réelle  $< 0$ .

3. Soit  $I(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré 3, avec  $a, b, c$  quelconques. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x) = -\infty$ . En déduire que  $I(x)$  admet une racine réelle.