Suites 2

(T. D. 4)

Remarques générales.

De même que chaque suite s ou $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ peut se noter abusivement (s_n) avec en sous-entendu le caractère *muet* de la lettre n, on pourra abréger une tendance $s \longrightarrow \ell$ ou $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ par $s_n \longrightarrow \ell$ avec le même sous-entendu.

De la même façon que l'on se passe de signe pour écrire un nombre positif, nous nous passerons de signe pour parler de ∞ et écrirons sans scrupules $e^n \longrightarrow \infty$.

Dans une écriture u_n ou $f(t)$, très souvent u et f dénoteront des *applications* tandis que n et t dénoteront des *objets source* (= éléments de l'ensemble de départ). Les lettres n et t sont appelés, dans une telle écriture, les *arguments* des fonctions u et f. Quant à u_n ou $f(t)$ proprement dits, ce sont les *images* de n et t par les applications considérées et sont des *objets but* (= éléments de l'ensemble d'arrivée).

Si en physique on confond souvent (mais *sciemment* !) f avec $f(t)$, cet abus n'est pas tolérable en mathématique en phase d'apprentissage et il convient d'en référer à l'autorité de l'expérience : trop d'étudiants se mélangent les pinceaux entre un *objet* (source ou but, la plupart du temps des nombres) et une *application* (ensemble de couples $\binom{\text{objet source}}{\text{objet but}}$). L'énorme différence est d'ordre dynamique : une application *agit* en transformant un objet source en un objet but.

Concernant les tendances, limite et convergence, rappelons que la *tendance* (vers un nombre) est la notion primitive à partir de laquelle se définissent d'une part la *convergence* ("*il y a* un nombre vers lequel tend...") d'autre part l'application *limite* (laquelle agit sur les suites convergentes, l'unicité d'une limite étant à établir).

Soient s une suite complexe et ℓ un complexe. L'égalité $\lim s_n = \ell$ exprime une relation binaire entre deux objets (d'une part la limite $\lim s$, d'autre part le complexe ℓ) et fait sens ssi chacun de ces objets fait sens, *i. e.* ssi s converge, au contraire de la tendance $s \longrightarrow \ell$ qui fait toujours sens (et qui n'exprime pas une égalité entre deux complexes). Par conséquent :

l'égalité $\lim s = \ell$ *n'exprime pas la même chose que la tendance* $s \longrightarrow \ell$ *!*

Au locuteur donc de savoir si il/elle veut énoncer une *tendance* ou bien une *égalité* avec *convergence* sous-entendue. Bien souvent une tendance seule convient. De même, on lira souvent le mélange

« *s converge vers* ℓ » *pour signifier* « *s converge et s tend vers* ℓ ».

Encore une fois, si la convergence n'est pas pertinente (ce qui est très souvent le cas), on écrira alors simplement « s tend vers ℓ » afin de respecter sa pensée.

Nous ferons très souvent usage des implications (par exemple à l'exercice 4)

$$\begin{matrix}\forall a\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}\\ \forall \ell\in\mathbf{C}\end{matrix}\ ,\ a\longrightarrow \ell \Longrightarrow a_{n+1}\longrightarrow \ell.$$

Rappelons, enfin, d'une part que chaque tendance équivaut toujours à une tendance vers 0 au vu des équivalences

$$\begin{matrix}\forall a\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}\\ \forall \ell\in\mathbf{C}\end{matrix}\ ,\ a\longrightarrow \ell \Longleftrightarrow |a_n-\ell|\longrightarrow 0,$$

d'autre part un lemme[1] très pratique pour montrer une telle tendance :

le produit de chaque suite tendant vers 0 *par chaque suite* BORNÉE *tend vers* 0.

Solution proposée.

1. **Monotonie et convergence des suites arithmétiques ou géométriques.**

   (a) La monotonie suppose une notion d'ordre : le cadre sera donc celui des suites *réelles*.

[1] En termes pompeux : la tendance vers 0 est table par multiplication par suites bornées.

i. Soit a une suite arithmétique (réelle) dont on note r la raison. La différence entre deux termes consécutifs valant constamment r, la suite a croît strictement si $r > 0$, est constante si $r = 0$ et décroît strictement si $r < 0$.

ii. Soit g une suite géométrique (réelle) dont on note r la raison. Supposons dans un premier temps que le premier terme g_0 vaut 1, de sorte que la suite g est la suite (r^n).

Supposons $r < 0$. Si g était monotone, les majorations strictes $g_1 = r < 0 < 1 = g_0$ imposeraient alors que la suite monotone g décroisse, d'où les majorations strictes $r^2 = g_2 < g_1 = r < 0$: *absurde*. (On montrerait plus généralement que chaque suite alternée[2] n'est monotone sur aucun intervalle entier de longueur 3, aucune terme ne pouvant être encadré par ses prédécesseur et successeur pour des raisons de signe.)

Supposons $r > 0$. La suite g est alors strictement positive et les quotients entre deux termes consécutifs font sens : ces derniers valant constamment r, la suite g croît strictement si $r > 1$, est constante si $r = 1$ et décroît strictement si $r < 1$.

Si enfin $r = 0$, la suite g est alors nulle à partir du rang 1, donc décroît (évidemment pas strictement !).

Pour revenir au cas général, il suffit de "multiplier" ces résultats par le signe de g_0. Si ce dernier est nul, alors g est constante (nulle), si $g_0 > 0$ alors rien de change, si enfin $g_0 < 0$ on reprend alors les mêmes résultats en changeant le sens de monotonie. Résumons tout dans un tableau :

$g_0 \diagdown r$	$r < 0$	$r = 0$	$0 < r < 1$	$r = 1$	$r > 1$
$g_0 < 0$	pas monotone (du tout !)	croît (constante à partir du rang 1)	décroît strictement	constante	croît strictement
$g_0 = 0$	constante	constante	constante	constante	constante
$g_0 > 0$	pas monotone (du tout !)	décroît (constante à partir du rang 1)	croît strictement	constante	décroît strictement

(b) La convergence ne nécessite pas de rester dans les réels.

i. Soit $a \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ arithmétique de raison notée r. Si elle convergeait, appliquer lim sur l'égalité $(a_{n+1}) = r + a$ donnerait $\lim a = r + \lim a$, d'où $r = 0$. Réciproquement, chaque suite arithmétique de raison nulle est constante, donc tend vers son premier terme.

ii. Soit $g \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ géométrique de raison notée r. Nous allons montrer que g converge ssi $[g_0 = 0$ ou $r = 1$ ou $|r| < 1]$.

Si $g_0 = 0$ ou $r = 1$, alors la suite (g_n) est constante, donc convergente ; si $|r| < 1$, on a alors pour chaque $n \geq 0$ entier l'égalité $|g_n| = |g_0| \, |r|^n = \underbrace{|g_0|}_{\text{borné}} \underbrace{e^{\overbrace{n \ln |r|}^{\longrightarrow -\infty \text{ car } |r|<1}}}_{\longrightarrow 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la convergence de g.

Supposons réciproquement g convergente et laissons de côté le cas $g_0 = 0$. Alors la suite (r^n) est un produit $\left(\frac{1}{g_0} g_n\right)$ de suites bornées, donc reste bornée, ce qui impose $|r| \leq 1$ (sinon $|r^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ n'est pas majorée). Supposons $|r| \not< 1$ (d'où l'on tire $|r| = 1$) et montrons que $r = 1$, ce qui conclura. On a pour chaque entier $n \geq 0$ les égalités

$$|g_{n+1} - g_n| = \left|g_0 r^{n+1} - g_0 r^n\right| = |g_0| \underbrace{|r|}_{=1}{}^n |r - 1| ,$$

d'où la tendance $|r - 1| = \dfrac{|g_{n+1} - g_n|}{|g_0|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{|\lim g - \lim g|}{|g_0|} = 0$,

ce qui montre $r \longrightarrow 1$, d'où l'on tire $r = 1$ par unicité de la limite.

Remarque (abus d'écriture). Dans cette preuve, on a raisonné à $n \in \mathbf{N}$ fixé (c'est-à-dire en ayant invoqué un tel n) mais on écrit ensuite une tendance $\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$, ce qui suppose de "désinvoquer" n afin de pouvoir le considérer comme symbole muet dans la tendance en question. Cette abus est monnaie courante.

[2] c'est-à-dire qui change tout le temps de signe, au sens où le produit de deux termes consécutifs est toujours négatif

iii. Soit $s \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tels que $\forall n \in \mathbf{N},\ s_{n+1} = \lambda s_n + \mu$.

Si $\lambda = 1$, la suite s est alors arithmétique de raison μ et (par la question 1(b)ii) converge ssi $\mu = 0$.

Supposons $\lambda \neq 1$ et soit alors $\ell \in \mathbf{C}$ tel que $\ell = \lambda\ell + \mu$. La suite $s - \ell$ est alors géométrique de raison μ, donc (par la question 1(b)ii) converge ssi $[s_0 = \ell$ ou $\mu = 1$ ou $|\mu| < 1]$.

2. **Différents comportements de suite.**

(a) La suite u_n de l'énoncé n'est pas une suite mais un réel ! (à savoir le n-ième terme de la suite u où les sens de n et u sont à préciser). Il convient de noter (u_n) ou u et de préciser qu'il s'agit d'une définition.

La suite $u := \left(\cos \frac{n\pi}{2}\right)$ est 4-périodique vu à $n \in \mathbf{N}$ fixé les égalités

$$u_{n+4} = \cos \frac{(n+4)\pi}{2} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos \frac{n\pi}{2} = u_n,$$

donc a pour ensemble de valeurs (on partitionne les naturels selon leur reste *modulo* 4)

$$\begin{aligned} & \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{u_{4p}\}_{p\in\mathbf{N}} \cup \{u_{4p+1}\}_{p\in\mathbf{N}} \cup \{u_{4p+2}\}_{p\in\mathbf{N}} \cup \{u_{4p+3}\}_{p\in\mathbf{N}} \\ = \ & \{u_0\} \cup \{u_1\} \cup \{u_2\} \cup \{u_3\} = \{1\} \cup \{0\} \cup \{-1\} \cup \{0\} = \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Elle est par ailleurs bornée (par 1), non monotone[3] (car $\frac{u_1}{u_3} = 0 > -1 = u_2$) et divergente (sinon appliquer lim à l'égalité séquentielle $1 = (|u_{n+1} - u_n|)$ donnerait $1 = |\lim u - \lim u| = 0$).

(b) Même remarque pour la confusion entre suites et réels ! ! !

La suite $v := \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ est bornée par 1 (vu les égalités à $n \in \mathbf{N}$ fixé les égalités $|v_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < 1$), n'est pas monotone (vu[4] les comparaisons strictes $\frac{v_0}{v_2} > 0 > v_1$) et tend vers 0 (vu à $n \in \mathbf{N}$ fixé les majorations et tendance $|v_n| < \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

La suite $w := ((-2)^n)$ n'est pas bornée (vu que la suite $|w| = (2^n)$ ne l'est pas[5]), n'est pas monotone (même argument que pour v) et ne converge pas (sinon serait bornée).

(c) La suite u est bornée mais diverge, la suite v converge mais n'est pas monotone, la suite w n'est pas bornée mais ne tend pas vers ∞ (resp. $-\infty$) (sinon elle serait positive (resp. négative) à partir d'un certain rang).

Remarque : dire « converge vers ∞ » incline à penser « converge » (alors qu'une telle suite diverge !). Nous déconseillons fortement cet usage au profit de « diverge vers ∞ » ou « tendre vers ∞ ».

3. **Opérations sur les limites.**

Même remarque pour la confusion entre suites et réels ! ! !

La lettre k apparaissant avec x_n et y_n est dénuée de sens. Il s'agira de l'invoquer dans une partie de $\mathbf{C}$ (plus grand ensemble numérique envisageable à ce niveau) puis de mener sans doute une discussion selon les cas.

Soit $N \in \mathbf{N}$ (à différencier des n muets qui seront utilisés ci-après dans des expressions de suites comme $(\cos n)$).

(a) On a les égalités et tendances

$$\underbrace{\sqrt{1 + \overbrace{\frac{1}{N+1}}^{\longrightarrow 0}}}_{\longrightarrow\sqrt{1+0}} + \underbrace{\frac{1}{2^N}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 1 + 0 = 1 \qquad \text{(on a utilisé la continuité de } t \mapsto \sqrt{t}\text{).}$$

[3] Plus généralement, aucune suite périodique n'est monotone à moins d'être constante.

[4] c'est une suite alternée

[5] on peut par exemple établir les minorations $\forall n \in \mathbf{N},\ 2^n > n$ par récurrence, ou encore minorer l'application $t \mapsto 2^t$ par son approximation tangente en $(0, 1)$.

(b) Si $N>0$ (afin que l'écriture $\frac{1}{N}$ dénote quelque chose), on a les égalités et tendances

$$\underbrace{2^{\overbrace{1+\frac{1}{N}}^{\longrightarrow 1}}}_{\longrightarrow 2^1}\sin\underbrace{\overbrace{\frac{1}{N}}^{\longrightarrow 0}}_{\longrightarrow \sin 0}\longrightarrow 2\cdot 0=0\qquad\text{(on a utilisé les continuités de } t\mapsto 2^t \text{ et } \sin\text{)}.$$

(c) Si $N>0$, on a les majorations et tendance $\left|\cos N\ \sin\frac{1}{N}\right|=|\cos N|\left|\sin\frac{1}{N}\right|\leq\left|\sin\frac{1}{N}\right|\overset{\text{déjà vu}}{\longrightarrow}0$.

(d) On a les minorations et tendance

$$\left(1+\underbrace{e^{-N}}_{\geq 1}\right)^N\geq(1+1)^N=2^N\longrightarrow\infty.$$

(e) La suite $\left(\ln\frac{2n+1}{n+2}-10^{-n}\right)$ considérée fait sens vu les positivités $\forall t\geq 0,\ \frac{2t+1}{t+2}>0$. On a par ailleurs les égalités et tendances $\frac{2N+1}{N+2}=\frac{2+\frac{1}{N}}{1+\frac{2}{n}}\longrightarrow\frac{2}{1}$, d'où (par continuité de ln) la tendance

$$\ln\overbrace{\frac{2N+1}{N+2}}^{\longrightarrow 2}-\overbrace{10^{-N}}^{\longrightarrow 0}\longrightarrow\ln 2-0=\ln 2.$$

(f) Soit $k\in\mathbf{C}$: l'expression $\sqrt{N^k+3}$ fait alors sens pour N assez grand ssi k est réel. On impose donc $k\in\mathbf{R}$. Grossièrement, la racine se comporte comme $\sqrt{N^k}=N^{\frac{k}{2}}$ (à comparer avec $N=N^1$) et c'est donc la position de k par rapport à 2 qui va importer.

Si $k>2$, on a les égalité et tendance (factoriser par $N^{\frac{k}{2}}$ qui "pilote")

$$\sqrt{N^k+3}-N=\underbrace{N^{\frac{k}{2}}}_{\longrightarrow\infty}\left(\overbrace{\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{N^k}}}_{\longrightarrow\sqrt{1+0}}-\underbrace{\frac{1}{N^{\frac{k}{2}-1}}}_{\longrightarrow 0\text{ car }\frac{k}{2}>1}}^{\longrightarrow 1+0\ >\ 0}\right)\longrightarrow\infty.$$

Si $k<2$, on a les égalité et tendance (factoriser par N qui "pilote")

$$\sqrt{N^k+3}-N=\underbrace{N}_{\longrightarrow\infty}\left(\overbrace{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{N^{2-k}}}_{\longrightarrow 0\text{ car }2-k>0}+\underbrace{\frac{3}{N^2}}_{\longrightarrow 0}}-1}^{\longrightarrow\sqrt{0+0}-1\ <\ 0}\right)\longrightarrow-\infty.$$

Si enfin $k=2$, aucun des termes ne l'emporte sur l'autre et l'on a les majorations et tendance (utiliser une quantité conjuguée) :

$$\sqrt{N^2+3}-N=\frac{\sqrt{N^2+3}^2-N^2}{\sqrt{N^2+3}+N}=\frac{3}{\sqrt{N^2+3}+N}\leq\frac{3}{\sqrt{N^2+0}+N}=\frac{3}{2N}\longrightarrow 0.$$

(g) Soit $k\in\mathbf{C}$: l'expression $\frac{n^k+2}{n^2+1}$ fait sens pour N assez grand sans condition sur k. Notons $k=:\kappa+i\lambda$ avec[6] $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$.

$$n^k\quad=\quad e^{k\ln n}=e^{(\kappa+i\lambda)\ln n}=e^{\kappa\ln n}e^{i\lambda\ln n}=n^\kappa$$

(h) Si $N>0$ (afin que le dénominateur 3^N-4^N soit non nul), on a les égalités et tendances

$$\text{(factoriser par le } 4^N \text{ qui "pilote")}\qquad\frac{3^N-2^N}{3^N-4^N}=\frac{\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^N-\frac{1}{2^N}}^{\longrightarrow 0-0}}{\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^N-1}_{\longrightarrow 0-1}}\longrightarrow\frac{0}{0-1}=0.$$

[6] C'est un façon d'écrire que l'on définit les réels κ et λ par l'égalité en question – ce qui revient à noter resp. κ et λ les partie réelle et imaginaire de k.

(i) On a les égalités et tendances (tout fait sens)

$$\frac{\sqrt{4N^2+1}}{5N+(-1)^N} = \frac{\overbrace{\sqrt{4+\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{\longrightarrow 0}}}^{\longrightarrow\sqrt{4+0}}}{\underbrace{5+\overbrace{\frac{(-1)^N}{N}}^{\longrightarrow 0}}_{\longrightarrow 5+0}} \longrightarrow \frac{2}{5} \qquad \text{(on utilise la continuité de } t \mapsto \sqrt{t}\text{).}$$

(j) En notant $a := \left((-1)^n \frac{n+1}{n+2}\right)$, on a les égalités et tendance (pour $N > 0$)

$$a_{N-1}a_N = (-1)^{N-1}\frac{N}{N+1} \quad (-1)^N \frac{N+1}{N+2} = \underbrace{(-1)^{2N}}_{=\left((-1)^2\right)^N=1} (-1)\frac{N}{N+2} = \frac{-1}{1+\underbrace{\frac{2}{N}}_{\longrightarrow 0}} \longrightarrow \frac{-1}{1+0} = -1.$$

Si la suite a convergeait, la suite $(a_{n-1}a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ tendrait alors vers $\lim a \lim a$, d'où par unicité l'égalité $(\lim a)^2 = -1$; or la suite a est réelle, donc sa limite reste réelle, d'où la positivité du carré $(\lim a)^2$ et la contradiction.

(k) L'intégrale fait sens car l'intégrande est continue sur $[0,1]$. On a les majorations et tendances (en majorant $\frac{1}{t+1} \leq 1$ pour chaque $t \in [0,1]$)

$$\left|\int_0^1 \frac{t^N dt}{t+1}\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^N dt}{t+1}\right| = \int_0^1 \frac{|t|^N\, dt}{|t+1|} \leq \int_0^1 t^N dt = \left[\frac{t^{N+1}}{N+1}\right]_{t=0}^1 = \frac{1-0}{N+1} \longrightarrow 0.$$

4. **Une condition nécessaire pour converger.**

L'introduction de la lettre ℓ est floue : invoque-t-on (avec la suite u) un réel ℓ tel que $u \longrightarrow \ell$? Il s'agit alors d'une seconde invocation. Ou bien impose-t-on que la suite u tende vers un réel (c'est-à-dire qu'elle converge et que sa limite soit réelle) que l'on notera ℓ ? Il s'agit alors d'une imposition plus forte sur u suivie d'une définition.

Reste par ailleurs à savoir *où* la suite u prend ses valeurs : sans plus d'information, voyons large et imposons-la complexe.

Dans tous les cas, tous se passe comme si nous avions invoqué « *Soient u une suite complexe et ℓ un réel tels que $u \longrightarrow \ell$* » (plus clair, plus concis). Soit donc un tel couple $\binom{u}{\ell}$.

Montrons alors plus généralement, étant donnée une suite r entière (r comme "**r**ang") tendant vers ∞, la tendance $u_{r(n)} \longrightarrow \ell$. En particulier, lorsque r est la suite $(n+1)$, on obtiendra les tendance et égalités

$$u_{n+1} - u_n = u_{r(n)} - u_n \longrightarrow \ell - \ell = 0, \text{ CQFD.}$$

On veut montrer $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ n > N \Longrightarrow \left|u_{r(n)} - \ell\right| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$, soit $A \in \mathbf{N}$ tel que $n > A \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$ (invocation légitime au vu de la tendance $u \longrightarrow \ell$), soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $n > N \Longrightarrow r_n > A$ (légitime vu la tendance $r \longrightarrow \infty$) : on a alors pour chaque $n > N$ la majoration $r(n) > A$, d'où celle $\left|u_{r(n)} - \ell\right| < \varepsilon$, ce qui conclut.

5. **Suite divergente dont les termes consécutifs sont de plus en plus proches.**

Cf. DS 1 exo 12

6. **Suite définie par une récurrence (non linéaire).**

L'invocation « Soit la suite (x_n) définie par » semble être une définition : mais alors parler d'un premier terme x_0 (image de 0 par l'application x) dans la définition de x ne fait aucun sens sinon celui d'un serpent avalant sa propre queue : autant définir une fonction f par $t \mapsto f(t)$! Pour rester proche de l'intention de l'énoncé, nous proposons « *Soit r un réel positif et notons*[7] *x la suite de premier terme r vérifiant la relation de récurrence [...]* » (invocation *d'abord* de ce que l'on veut imposer comme premier terme, puis définition de la suite). Ou encore : « *Soit x une suite telle que $x_0 \geq 0$ et vérifiant la relation de récurrence [...]* » (invocation d'une suite x dont on impose la positivité du premier terme).

[7] définition légitimée par l'axiome de l'infini (version itérative), *cf.* correction du TD 3

(a) Cette question n'a aucun sens formulée telle quelle. *Exercice* : relever tout ce qui ne va pas !

Il s'agit de comprendre : « vérifier que la suite que l'on avait "à moitié définie-invoquée" dans l'énoncé peut l'être *proprement.* » Autrement dit : « reconnaître que l'introduction de x était floue et y remédier en appliquant l'axiome de l'infini dans une situation bien choisie ».

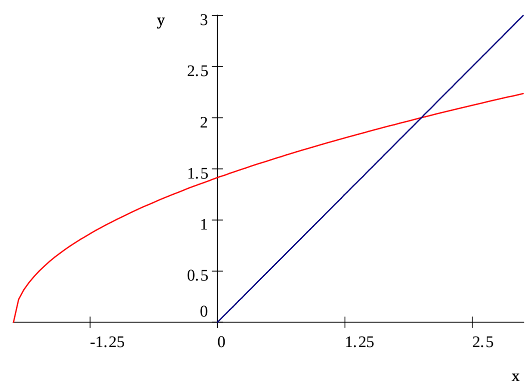
Faisons le ménage : l'application $f := t \mapsto \sqrt{2+t}$ est définie au moins sur $\mathbf{R}_+$ et envoie chaque réel positif sur un réel positif, donc pour chaque $r \in \mathbf{R}_+$ il y a (d'après l'axiome de l'infini) une unique suite $x \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = r$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Point barre.

On peut aller plus loin (cela nous servira) et remarquer que f stabilise, non seulement $\mathbf{R}_+$, mais également chacun des trois intervalles $\begin{array}{l}]2,\infty] \\ \{2\} \\ [0,2[\end{array}$ vu les $\begin{array}{l} \text{minorations} \\ \text{égalités} \\ \text{majorations} \end{array}$ $\begin{array}{c} > \\ \text{à } t = 2 \text{ fixé } f(t) = \\ < \end{array}$ $\sqrt{2+t} \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ (lire les trois phrases en parallèle).

(b) Montrons plus généralement des équivalences qui nous reserviront : pour chaque réel $t \geq 0$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} f(t) \leq t \quad &\iff \quad \sqrt{2+t} \leq t \overset{\text{tout est}}{\underset{\text{positif}}{\iff}} 2 + t \leq t^2 \iff 0 \leq t^2 - t - 2 \\ &\iff \quad 0 \leq (t-2) \underbrace{(t+1)}_{\geq 0 \text{ car } t \geq 0} \iff 0 \leq t - 2 \iff t \geq 2. \end{aligned}$$

Idem en remplaçant partout les « $\leq$ » par des « $\geq$ » ou des « $=$ ».



Répondons à présent à la question et soit $\ell \in \mathbf{C}$ tel que $x \longrightarrow \ell$. Par continuité de f, appliquer lim sur la relation de récurrence de la question 6a donne l'égalité $\ell = f(\ell)$. La suite x étant positive, le complexe $\ell = \lim a$ reste positif et l'on peut alors utiliser ce qui précède pour conclure à l'égalité $\ell = 2$. *Conclusion* : la suite x ne peut converger que[8] vers 2.

(c) Reprenant la définition de x ci-dessus (question 6a) avec premier terme imposé à r et discutons trois cas en parallèle. Si $\begin{array}{l} r > 2 \\ r = 2 \\ r < 2 \end{array}$ alors la suite x restera dans $\begin{array}{l}]2,\infty] \\ \{2\} \\ [0,2[\end{array}$ (*cf.* complément question 6a), intervalle où l'application f est (*cf.* question 6b) $\begin{array}{l} \text{plus petite que} \\ \text{égale à} \\ \text{plus grande que} \end{array}$ Id, d'où pour chaque $n \in \mathbf{N}$ les $\begin{array}{l} \text{majorations } x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n \leq 0 \\ \text{égalités } x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = 0 \\ \text{minorations } x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n \geq 0 \end{array}$, d'où[9] la $\begin{array}{l} \text{décroissance} \\ \text{constance} \\ \text{croissance} \end{array}$ de x (qui $\begin{array}{l} \text{est minorée par} \\ \text{vaut partout} \\ \text{est majorée par} \end{array}$ 2). Dans les trois cas, la suite x est monotone et bornée, donc convergente, donc (d'après la question 6b) tend vers 2.

[8] Quelle différence avec « la suite x ne peut que converger vers 2 » ?

[9] On pourrait ici affirmer la constance demandée du signe des termes de la suite $(x_{n+1} - x_n)$ mais cela ne nous servira pas.