Feuille d'exercices 4

Comportement des suites.

Exercice 4.1 – Monotonie et convergence des suites arithmétiques ou géométriques.

1. Etudier la monotonie d'une suite
a) arithmétique,
b) géométrique.

2. Etudier la convergence d'une suite
a) arithmétique,
b) géométrique,
c) arithmético-géométrique.

Exercice 4.2 – Différents comportements de suite.

1. Quelles sont les valeurs prises par la suite $u_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$? Est-elle bornée ? monotone ? convergente ?

2. Les suites $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $w_n = (-1)^n 2^n$ sont-elle bornées ? monotones ? convergentes ?

3. En choisissant un contre-exemple parmi les suites étudiées ci-dessus, montrer que les affirmations suivantes sont fausses :

a) "Toute suite bornée est convergente."
b) "Toute suite convergente est monotone."
c) "Toutes suite non bornée converge vers $+\infty$ ou converge vers $-\infty$."

Exercice 4.3 – Opérations sur les limites. Etudier la convergence de chacune des suites suivantes :

$$s_n = \sqrt{1+\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{2^n}\ , \quad p_n = 2^{1+\frac{1}{n}} \sin(\frac{1}{n})\ , \quad q_n = \cos(n)\sin(\frac{1}{n})\ ,$$

$$v_n = \left(1+\exp(\frac{1}{n})\right)^n\ , \quad w_n = \ln(\frac{2n+1}{n+2}) - 10^{-n}\ ,$$

$$x_n = \sqrt{n^k+3} - n\ , y_n = \frac{n^k+2}{n^2+1}\ , \quad z_n = \frac{3^n-2^n}{3^n+4^n}\ , \quad t_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}}{5n+(-1)^n}\ ,$$

$$a_n = (-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\ , \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx\ .$$

Exercice 4.4 – Une condition nécessaire pour converger.

Soit (u_n) une suite qui tend vers un nombre réel ℓ. Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Exercice 4.5 – Suite divergente dont les termes consécutifs sont de plus en plus proches.

Pour tout entier $n > 0$ on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante. Quelle est la nature la suite $(u_{n+1} - u_n)$?

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

3. Cette suite peut-elle converger ?

Exercice 4.6 – Suite définie par une relation de récurrence (non linéaire).

Soit la suite (x_n) définie par la donnée d'un premier terme $x_0 \geq 0$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

1. Montrer par récurrence que la suite (x_n) est bien définie pour tout rang $n \geq 0$.

2. Quelle serait, en cas de convergence, la limite de (x_n) ?

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(x_{n+1} - x_n)$ est de même signe que $(x_n - x_{n-1})$.

4. Montrer que :

- **a.** Si $x_0 = 2$, la suite (x_n) est constante.
- **b.** Si $x_0 < 2$, la suite (x_n) est strictement croissante et majorée par 2.
- **c.** Si $x_0 > 2$, la suite (x_n) est strictement décroissante et minorée par 2.

5. Conclure que, dans tous les cas, la suite (x_n) est convergente et donner sa limite.