Suites 1

(T. D. 3)

Remarque générale. Une suite est par définition une application de source[1] $\mathbf{N}$. Si s est une telle application, on la note usuellement $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où la notation indexante $s_n := s(n)$ allège considérablement celle fonctionnelle (plus de parenthèses !). Il est également d'usage de la noter[2] (s_n) avec la convention implicite que le seul symbole dénué de sens (ici n) soit muet (au sens de la notation $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$). L'indice muet n partout utilisé rappelle qu'il s'agit d'un entier ***naturel*** (et pourrait bien sûr être noté différemment).

Solution proposée.

1. **Suites arithmétiques[3].**

   La lettre r de l'énoncé est ambigüe : si l'on invoquait en effet une suite arithmétique a de raison 2, on *impose* alors une propriété sur a (à savoir que sa raison vaille 2). Ce n'est pas ici le cas : la précision « de raison r » n'est pas une *imposition* mais une *définition*. Une façon de lever l'ambigüité aurait été d'écrire : « Soit u une suite arithmétique dont on note r la raison. ».

   (a) La lettre n est ici dénuée de sens (de *quel* rang parle l'énoncé ?). Il convient de l'invoquer. Soit donc $n \in \mathbf{N}$. L'égalité[4] demandé est $u_n = u_0 + nr$.

   (b) Même remarque sur la lettre n ambigüe.

      i. Lorsque $(u_0, r) = \left(5, \frac{2}{3}\right)$, on obtient $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 5 + \frac{2n}{3}$, d'où en particulier
      $$u_{10} = 5 + \frac{2}{3}10 = \frac{15+20}{3} = \frac{35}{3} \simeq 11,666\cdots.$$

      ii. Lorsque $\binom{u_3}{u_{11}} = \binom{-1}{0}$, on obtient la raison en télescopant
      $$r = \frac{1}{8}\sum_{i=3}^{10} r \underset{\text{de raison } r}{\overset{u \text{ arithmétique}}{=}} \frac{1}{8}\sum_{i=3}^{10}(u_{i+1} - u_i) \overset{\text{télescopage}}{=} \frac{u_{10+1} - u_3}{8} = \frac{0-(-1)}{8} = \frac{1}{8},$$
      d'où le terme initial $u_0 = u_{11} - 11r = 0 - 11\frac{1}{8} = -\frac{11}{8}$

      puis le terme général $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 + nr = -\frac{11}{8} + \frac{1}{8}n = \frac{n-11}{8}$.

   Sanity check : retrouver u_3 et u_{11}.

2. **Suites géométriques[5].**

   Même laïus sur la lettre q dénuée de sens.

   (a) Idem sur la lettre n dénuée de sens et sur « la formule générale ». L'égalité demandée est $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 q^n$.

   (b) Même remarque sur le n ambigu.

      i. Lorsque $\binom{u_0}{q} = \binom{4}{2}$, on obtient $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$, d'où en particulier
      $$u_6 = 2^{6+2} = 2^8 = 256.$$

[1] La source est parfois une partie infinie de $\mathbf{N}$ (comme $\mathbf{N}^*$) voire une partie infinie *minorée* de $\mathbf{Z}$. L'important est que l'on puisse aller aussi loin que voulu vers $+\infty$.

[2] Trois notations : $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (la plus explicite lourde), (s_n) (compromis où l'on voit tout de suite qu'il s'agit d'une suite), s (la plus économe et elliptique).

[3] ainsi nommées car chaque terme non initial d'une telle suite vaut la moyenne *arithmétique* du suivant et du précédent

[4] L'expression « la formule générale » est vague et présuppose une unicité (or $u_n = nr + u_0$ en serait une autre), on parle ici d'une *égalité*, qui soit « simple » au sens du concepteur de l'exercice. Un peu de bon sens est donc bienvenu.

[5] ainsi nommées car, pour une telle suite *positive*, chaque terme non initial vaut la moyenne *géométrique* du suivant et du précédent

ii. Lorsque $\binom{u_5}{u_8} = \binom{2}{1}$, le terme u_i n'est nul pour aucun naturel $i < 8$ (sinon $u_8 = 1$ serait nul), ce qui donne sens au produit suivant :

$$q = \sqrt[3]{qqq} \underset{\text{de raison } q}{\overset{u \text{ géométrique}}{=}} \sqrt[3]{\frac{u_8}{u_7}\frac{u_7}{u_6}\frac{u_6}{u_5}} \overset{\text{télescopage}}{=} \sqrt[3]{\frac{u_8}{u_5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}},$$

$$\text{d'où le terme initial } u_0 = \frac{u_8}{q^8} = \frac{1}{\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^8} = \frac{1}{2^{-\frac{8}{3}}} = 2^{\frac{8}{3}}$$

$$\text{puis le terme général } \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 q^n = 2^{\frac{8}{3}} \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^n = 2^{\frac{8-n}{3}}.$$

Sanity check : retrouver u_5 et u_{11}.

3. **Calculs avec les suites arithmétiques.**

La première égalité de l'énoncé « $u_0 = 2$ » est une imposition (on impose que le premier terme de u vaille 2) mais la deuxième « $r = 3$ » est une imposition *et une définition* (on impose que la raison de u, *raison que l'on note au passage* r, vaille 3). Il conviendrait de noter plutôt « $r := 3$ » afin de signaler l'aspect définitoire.

(a) Soit $n \in \mathbf{N}$: on a alors les égalités $u_n = u_0 + rn = 2 + 3n$, d'où « l'expression » demandée en ne regardant que les $n \geq 1$.

(b) L'énoncé parle de « plus petit entier n », la lectrice aura bien sûr complété « *naturel* » afin que les lettres u_n fassent sens. Soit donc $n \in \mathbf{N}$: on a alors les équivalences

$$u_n \geq 200 \iff 2 + 3n \geq 200 \iff 3n \geq 198 \iff n \geq 66,$$

ce qui montre que le plus petit entier cherché est 66.

(c) Nommer la somme demandée ne sert à rien pour le sujet (peut-être pour une correction). En se rappelant les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on a les égalités

$$\sum_{i=0}^{10} u_i = \sum_{i=0}^{10} (2 + 3i) = 2\sum_{i=0}^{10} 1 + 3\sum_{i=0}^{10} i = 2 \cdot 11 + 3\frac{10 \cdot 11}{2} = 22 + 165 = 167.$$

4. **Calculs avec les suites géométriques.**

La précision « avec » de l'énoncé est bien sûr une *imposition* et pourrait être écrité également « telle que » ou « vérifiant » ou encore « pour laquelle ».

(a) Comme à l'exercice précédent, l'introduction de q est une *définition* (au contraire de u_0 puisque u a déjà été invoquée par l'énoncé). Le terme u_i n'est nul pour aucun naturel $i < 3$ (sinon $u_3 = 24$ serait nul), ce qui donne sens au produit suivant :

$$|q| = \sqrt{qq} = \sqrt{\frac{u_5}{u_4}\frac{u_4}{u_3}} = \sqrt{\frac{u_5}{u_3}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2.$$

Si q était négatif, alors u_4 serait de signe opposé à $u_3 > 0$, d'où les majorations $u_4 \leq 0 < u_3$, ce qui contredirait la croissance imposée de u. La raison q est par conséquent positive et vaut son module $|q| = 2$. On en déduit le premier terme $u_0 = \frac{u_1}{2^1} = \frac{6}{2} = 3$ et (bonus) le terme général $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 3 \cdot 2^n$.

Sanity check : retrouver u_1 et u_3 ainsi que la croissance de u.

(b) Nommer la somme demandée ne sert à rien pour le sujet (peut-être pour une correction). En se rappelant que chaque somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\underline{\underline{\text{autre que 1}}}$ vaut $\frac{1^{\text{er}} \text{ terme} - \text{terme suivant}}{1 - \text{la raison}}$, on obtient les égalités

$$\sum_{i=0}^{9} u_i = \frac{u_0 - u_{10}}{1 - q} = \frac{3 - 3 \cdot 2^{10}}{1 - 2} = 3\left(2^{10} - 1\right) = 3 \cdot 1023 = 3069.$$

5. **Progression exponentielle de la générosité.**

Pour chaque naturel n, notons d_n le montant en euros du don (d comme « **d**on ») fait par la personne sur toute l'année $2007+n$. Les hypothèses s'écrivent $d_0 = 120$ (« il a donné cette annéé-là [parlant de 2007] 120 euros ») et $\forall n \in \mathbf{N},\ d_{n+1} = d_n + 5\% d_n$ (« depuis [2007], tous les ans, il augmente de 5% son versement[6] »). Vu à $c \in \mathbf{C}$ fixé la factorisation

$$c + 5\% c = \left(1 + \frac{5}{100}\right) c = \left(1 + \frac{1}{20}\right) c = \frac{21}{20} c,$$

la suite d est géométrique de raison $\frac{21}{20} = 1,05$, d'où les égalités $\forall d \in \mathbf{N},\ d_n = 120 \left(\frac{21}{20}\right)^n$.

(a) Sans aucune information sur la régularité du don, on ne peut répondre ! Nous sommes donc fortement invités à devenir que le don s'effectue sous forme d'un versement régulier chaque mois de décembre. Et que le versement ne concerne que le don (*cf.* note de bas de page précédente). Sous ces hypothèses, la somme versée en décembre 2008 est (en euros) $d_1 = 120\frac{21}{20} = 6 \cdot 21 = 126$ et celle à verser en décembre 2016 vaut (toujours en euros)

$$d_{2016-2007} = d_9 = 120 \left(\frac{21}{20}\right)^9 = \left(3 \cdot 2^3 \cdot 5\right) \frac{(3 \cdot 7)^9}{(2^2 5)^9} = \frac{3^{10} 7^9}{2^{15} 5^8} \simeq 186,16$$

(approximation obtenue à l'aide d'une machine).

(b) Toujours sous les mêmes hypothèses – et dans ce contexte –, le don cumulé (en euros) vaut, *en décidant arbitrairement d'inclure les borne de la périodes* (c'est ambigu pour décembre 2016 !), la somme

$$\sum_{i=1}^{9} d_i = \sum_{i=1}^{9} d_0 r^i = d_0 \sum_{i=1}^{9} r^i = d_0 \frac{r - r^{10}}{1-r} = 120 \frac{\frac{21}{20} - \left(\frac{21}{20}\right)^{11}}{1 - \frac{21}{20}} = 120 \left(20 \left(\frac{21}{20}\right)^{11} - 21\right) \simeq 1584,8$$

(approximation obtenue à l'aide d'une machine).

Sanity check : il y a eu neuf versements d'au moins 120 euros, le don cumulé (en euros) doit donc excéder $9 \cdot 120 = 1080$.

Interlude. Parlant de suites, un résultat fondamental est la construction de suites par itération d'une fonction stabilisant un ensemble, au sens suivant :

pour chaque ensemble A, pour chaque application f de ce dernier dans lui-même et pour chaque élément $@ \in A$, il y a une unique suite a à valeurs dans A dont chaque terme s'obtient en appliquant f sur le terme précédent – à l'exception du premier qui est imposé valoir $@$.

Formellement : $\forall A,\ \begin{array}{c} \forall f \in A^A \\ \forall @ \in A \end{array},\ \exists! a \in A^{\mathbf{N}},\ \left\{ \begin{array}{c} \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = @ \end{array} \right. .$

Selon les présentations de $\mathbf{N}$, il s'agit ou bien d'un théorème[7] ou bien d'un axiome[8] équivalent à l'axiome usuel de l'infini de la théorie des ensembles[9].

Une conséquence équivalente à mais plus générale que l'axiome de l'infini est la suivante : pour chaque ensemble A,

[6] On admettra que le versement en question concerne *exclusivement* le don (il pourrait s'agir de cotisations, de frais divers...). Ici apparaît la difficulté à oublier suffisamment d'éléments de réalité pour ne garder que ce qui est désiré tomber dans le cadre du concept mathématique étudié (en l'occurrence les suites), au risque de se faire traiter d'imbécile par les concepteurs d'un tel exercice (ce qui serait inacceptable). Du bon sens des deux côtés permettra certainement d'éviter de casser des êtres humains.

[7] le fameux théorème 126 du livre *Qu'est-ce que sont et à quoi servent les nombres ?* écrit en 1888 par Richard Dedekind, dont on trouvera une traduction par Hourya Sinaceur éditée en 2008 chez Vrin

[8] rajouter alors devant les existences « $\exists \mathbf{N},\ \begin{array}{c} \exists s \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \\ \exists 0 \in \mathbf{N} \end{array}$, » et remplacer « $n+1$ » par « $s(n)$ »

[9] Étant donné d'une part une "fonctionnelle" f injective, d'autre part un objet o non atteint par f, il y a alors un ensemble contenant o et stable par f. (Sous sa forme habituelle, l'objet de départ est l'ensemble vide $\emptyset$ et la "fonctionnelle" itérante agit comme $a \mapsto a \cup \{a\}$.) L'idée est qu'être infini revient à pouvoir aller aussi loin que voulu (itérer f) sans retour en arrière (f injective) ni bouclage au point de départ (f évite o).

étant donné pour chaque naturel n une application $f_n : A^n \longrightarrow A$
(dans le cas $n = 0$ on donne juste un élément de A),
il y a alors une unique suite $a \in A^{\mathbf{N}}$ telle que
$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = f_n (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$.

Dans les deux derniers exercices, cette version générale[10] affirme existence et unicité de chaque suite u "considérée" : qu'on l'invoque ou qu'on la définisse ne changera rien.

1. **Suites à récurrence linéaire d'ordre 1.**

Concernant « l'expression de u_n » demandée par l'énoncé (où la lettre n est dénuée de sens), il s'agit d'une égalité donnant pour chaque naturel n une expression de u_n qui ne soit fonction que de n et qui soit *close* (c'est-à-dire sans "$\cdots$", à l'exemple de $1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$). En termes pragmatiques : donner un moyen de calculer u_{100} sans devoir évaluer successivement les cent premiers termes.

Quant à "la" suite u, l'axiome de l'infini (sous sa forme itérative rappelée ci-dessus) affirme existence et unicité d'un tel u dans les deux cas[11] : on gardera par conséquent la notation u à chaque question.

(a) Soit $a \in \mathbf{C}$: la suite constante (a) est solution de la récurrence proposée ssi $a = 2a + 3$, c'est-à-dire ssi $a = -3$. On vérifie alors que la suite $u + 3$ est géométrique : ceci découle des égalités à $n \in \mathbf{N}$ fixé

$$[u + 3]_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 3 + 3 = 2 (u_n + 2) = 2 [u + 3]_n .$$

Nous avons donc pour chaque naturel n les égalités

$$u_n + 3 = [u + 3]_n = 2^n [u + 3]_0 = 2^n (u_0 + 3) = 2^n (1 + 3) = 2^n 4 = 2^{n+2},$$
$$\text{d'où } \forall p \in \mathbf{N},\ u_p = 2^{p+2} - 3.$$

(b) *Solution 1 (méthodique).* La suite u vérifie une relation de récurrence affine d'ordre 1 à coefficients constants. Afin de se débarasser du second membre $\left(n^2\right)$, cherchons tout d'abord une solution qui soit polynomiale[12] de degré 3. Soient donc $a, b, c, d \in \mathbf{C}$: on a alors les équivalences

$$\begin{array}{cl}
 & \text{la suite } \left(an^3 + bn^2 + cn + d\right) \text{ vérifie la même relation de récurrence que } u \\
\iff & \forall n \in \mathbf{N},\ a (n + 1)^3 + b (n + 1)^2 + c (n + 1) + d = an^3 + bn^2 + cn + d + n^2 \\
\iff & \forall n \in \mathbf{N},\ a \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + b \left(n^2 + 2n + 1\right) + cn + c = an^3 + (b + 1) n^2 + cn \\
\underset{\text{par } an^3+bn^2+cn}{\overset{\text{simplifier}}{\iff}} & \forall n \in \mathbf{N}, 3an^2 + (3a + 2b) n + a + b + c = n^2 \\
\underset{\text{des coefficients}}{\overset{\text{identification}}{\iff}} & \left\{\begin{array}{c} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{3a}{2} \\ c = -a - b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{array}\right. .
\end{array}$$

La suite $\frac{1}{9}\left(3n^3 - 4n^2 + n\right)$ vérifie donc la même relation de récurrence que u. Or elle a aussi pour premier terme 0 : par unicité (donnée par l'axiome de l'infini), ces deux suites sont égales. Terminé !

Solution 2 (débrouillarde). Soit $n \in \mathbf{N}$. On a les égalités

$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + (n - 1)^2 = u_{n-2} + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 = u_{n-3} + (n - 3)^2 + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 \\
&= \cdots = u_0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n - 1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \text{ (à prouver proprement par récurrence).}
\end{aligned}$$

Or on a le droit d'être cultivé et de connaître les égalités[13] $\forall p \in \mathbf{N},\ \sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$, d'où (en spécialisant $p \leftarrow n - 1$) l'égalité $u_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. En développant, on retrouve les trois coefficients a, b, c de la solution précédente.

[10] *Idée de preuve* : notons $B := A [X]$, appelons β le polynôme constant f_0, définissons g comme l'application de B dans B qui à chaque polynôme P associe $P + X^d f_d (P)$ avec $d := \deg P$, soit b une suite de $B^{\mathbf{N}}$ donnée par l'axiome de l'infini (avec objet de départ β et itérante g), alors la suite $n \mapsto \operatorname{coef}_{X^n} b_n$ de $A^{\mathbf{N}}$ convient.

[11] Dans le premier, prendre $\binom{A}{@} := \binom{\mathbf{N}}{1}$ et $f : c \mapsto 2c + 3$: la suite a de l'axiome convient alors pour u. Dans le deuxième, prendre $\binom{A}{@} := \binom{\mathbf{N}[X]}{0}$: alors la suite qui à chaque naturel n associe le coefficient dominant du polynôme a_n convient pour u.

[12] Lorsque le second membre est polynomial (de degré appelé d), il y a toujours une solution à la même relation de récurrence qui est polynomiale de degré $d + \omega$ où ω dénote l'ordre de multiplicité de 1 du polynôme caractéristique. *Sanity check* : regarder le cas des suites arithmético-géométriques.

[13] Preuve immédiate et inintéressante par récurrence. Intuition beaucoup plus éclairante dans le livre *Proofs without words* de Roger B. Nelsen (cité dans l'article *Preuve sans mots* de Wikipedia).

2. **Suites à récurrence linéaire d'ordre 2.**

Même histoire : "la" suite u fait sens et est unique d'après l'axiome de l'infini (version itérative). De même, « l'expression de (u_n) » a toutes les raisons du monde ne pas être unique (par exemple (u_n) en est une !), donc il faut encore comprendre « le plus simple possible au sens du concepteur du sujet ». (On conserve la notation u dans les trois questions.)

(a) La suite u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, son polynôme caractérisque est $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$, on peut donc invoquer deux complexes λ et μ tels que $u = \lambda(2^n) + \mu(3^n)$. Évaluer en 0 puis 1 donne $\left\{\begin{array}{c} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = 2\lambda + 3\mu \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{c} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = 2(\lambda+\mu) + \mu \end{array}\right.$, d'où $\mu = -1$ et $\lambda = 2$. On obtient finalement "une expression" simple :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Sanity check : retrouver les premiers termes $\binom{u_0}{u_1} = \binom{1}{1}$.

(b) La suite u vérifie une relation de récurrence affine d'ordre 2 à coefficients constants. Pour se débarasser du second membre (n), cherchons tout d'abord une solution affine : on a à $a, b \in \mathbf{C}$ fixés les équivalences

$$\begin{array}{cl} & \text{la suite } (an+b) \text{ vérifie la même relation de récurrence que } u \\ \iff & \forall n \in \mathbf{N},\ a(n+2) + b = 4(a(n+1)+b) - 4(an+b) + n \\ \iff & \forall n \in \mathbf{N},\ an + 2a + b = 4a + n \\ \underset{\text{des coefficients}}{\overset{\text{identification}}{\iff}} & \left\{\begin{array}{c} a = 1 \\ 2a + b = 4a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right. . \end{array}$$

La suite $v := u - (n+2)$ vérifie alors la même relation de récurrence sans second membre, relation linéaire dont le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$: on peut donc invoquer deux complexes λ et μ tels que $v = \lambda(4^n) + \mu(n4^n)$. Évaluer en 0 puis 1 donne $\left\{\begin{array}{c} u_0 - 2 = \lambda + 0 \\ u_1 - 3 = 4\lambda + 4\mu \end{array}\right.$, d'où $\lambda = 1 - 2 = -1$ et $\mu = \frac{3-3-4(-1)}{4} = 1$. Il en résulte l'égalité $v = (n4^n - 4^n)$, d'où à $p \in \mathbf{N}$ fixé les égalités $u_p = v_p + (p+2) = (p-1)4^p + (p-1) + 3$ et "une expression" simple pour (u_n) :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (n-1)(4^n + 1) + 3.$$

Sanity check : retrouver les deux premiers termes $\binom{u_0}{u_1} = \binom{1}{3}$.

(c) La suite u vérifie une relation de récurrence affine d'ordre 2 à coefficients constants. On se débarasse du second membre (3) en cherchant une solution affine : or la suite identité (n) est une telle solution (vérification immédiate). La suite $v := u - (n)$ vérifie donc une relation de récurrence linéaire de polynôme caractéristique $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$ et l'on peut invoquer deux complexes λ et μ tels que $v = \lambda(1^n) + \mu(2^n)$. Évaluer en 0 puis 1 donne $\left\{\begin{array}{c} u_0 - 0 = \lambda + \mu \\ u_1 - 1 = \lambda + 2\mu \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{c} 1 = \lambda + \mu \\ -1 = (\lambda + \mu) + \mu \end{array}\right.$, d'où $\mu = -2$ et $\lambda = 3$. Il en résulte l'égalité $v = \left(3 - 2^{n+1}\right)$ et la conclusion

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n + 3 - 2^{n+1}.$$

Sanity check : retrouver les deux premiers termes $\binom{u_0}{u_1} = \binom{1}{0}$.