Nombres complexes

(T. D. 2)

Remarques générales.

On utilisera, dans ce corrigé, pour chaque complexe q l'abréviation $\angle^q := e^{iq\pi}$ (non officielle[1], **à ne pas utiliser sans la redéfinir**). Par exemple $2\angle^{\frac{3}{4}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = i\sqrt{2} - \sqrt{2}$. Une bonne raison est que les arguments mis en jeu sont (quasiment) toujours des multiples entiers de $15° = \frac{\pi}{12}$, en particulier des multiples rationnels de l'angle plat π.

Il vaut mieux pour la lecture utiliser PLUSIEURS lettres DISTINCTES plutôt qu'une *même* lettre indexée différemment. Comparer par exemple a, b, c, d et a_1, a_2, a_3, a_4 !

Noter la continuité des phrases du type « On a les égalités $[a = b]$, $[c = d]$ et $[e = f]$. » avec les conjonctions de coordination (virgules au début, « et » avant la dernière) ainsi que le point final.

Solution proposée.

1. **Calculs avec les formes algébriques[2].**

(a) Renotons $\binom{a}{b} := \binom{z_1}{z_2}$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned}
a+b &= \begin{array}{c} 2-3i \\ +\ 1+2i \end{array} = 3-i, \\
a-b &= \begin{array}{c} 2-3i \\ -\ (1+2i) \end{array} = \begin{array}{c} 2-3i \\ -\ 1-2i \end{array} = 1-5i, \\
ab &= \begin{array}{c} (2-3i) \\ \times\ (1+2i) \end{array} = \begin{array}{c} 2\cdot 1-(-3)\cdot 2 \\ +i\ \ (2\cdot 2+(-3)\cdot 1) \end{array} = \begin{array}{c} (2+6) \\ +i\,(4-3) \end{array} = 8+i, \\
a^2 &= (2-3i)^2 = \left(2^2-3^2\right) - 2\cdot 2\cdot 3i = -5-12i \\
\text{et } \frac{a}{b} &= \frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)\,\overline{1+2i}}{(1+2i)\,\overline{1+2i}} = \frac{(2-3i)\,(1-2i)}{|1+2i|^2} = \frac{\begin{array}{c} 2\cdot 1-(-3)\,(-2) \\ +i\ \ (2\,(-2)-3\cdot 1) \end{array}}{1^2+2^2} = -\frac{4+7i}{5}.
\end{aligned}$$

Sanity check : puisqu'on a déjà calculé ab et a^2, on obtient autrement

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a^2}{ab} = \frac{5+12i}{8+i} = \frac{(5+12i)\,\overline{8+i}}{(8+i)\,\overline{8+i}} = \frac{(5+12i)\,(8-i)}{|8+i|^2} = \frac{\begin{array}{c} 5\cdot 8+12 \\ +i\ \ (12\cdot 8-5) \end{array}}{8^2+1^2} = \frac{52+91i}{65}$$

et l'on retrouve $\frac{4+7i}{5}$ en simplifiant tout par 13 (les calculs sont cependant ici un plus compliqués).

(a) On a les égalités

$$\begin{aligned}
\frac{2+5i}{1-i} &= \frac{(2+5i)\,\overline{1-i}}{(1-i)\,\overline{1-i}} = \frac{(2+5i)\,(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{(2-5)+i\,(2+5)}{1^2+1^2} = \frac{-3+7i}{2} = -\frac{3}{2}+\frac{7i}{2}, \\
\frac{2-5i}{1+i} &= \frac{\overline{2+5i}}{\overline{1-i}} = \overline{\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)} \overset{\text{déjà}}{\underset{\text{calculé}}{=}} \overline{-\frac{3}{2}+\frac{7i}{2}} = -\frac{3}{2}-\frac{7i}{2}, \\
\frac{3+6i}{3-4i} &= \frac{3\,(1+2i)\ \ (3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{3}{3^2+4^2}\,(3-8+i\,(4+6)) = \frac{3}{25}\,(-5+10i) = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et }\ (2-5i)\,(3+8i)\,(1+i) &= \begin{array}{c} 2\cdot 3\cdot 1-(-5)\cdot 8\cdot 1-(-5)\,3\cdot 1-2\cdot 8\cdot 1 \\ +i\ \ (2\cdot 3\cdot 1+2\cdot 8\cdot 1+(-5)\,3\cdot 1-(-5)\,8\cdot 1) \end{array} \\
&= \begin{array}{c} 6+40+15-16 \\ +i\ \ (6+16-15+40) \end{array} = 45+47i.
\end{aligned}$$

[1] On aurait préféré $\measuredangle$ pour bien suggérer l'*angle* mais cela aurait été plus long à écrire.

[2] On parle aussi de formes *rectangulaires* ou *cartésiennes* (sans "h", comme René DESCARTES).

2. **Modules.**

Remarquer l'inutilité pour la consigne[3] d'avoir "posé" z_1 et z_3. Il convient de préciser ces définitions avec des « := » (et bien sûr ne pas alourdir les noms avec des indices).

On calculera les *carrés* des modules pour ne pas encombrer les calculs avec des racines carrées. Chaque module étant positif (interpréter comme une distance !), il vaudra la racine carré de son carré. Retenir pour chaques réels a, b les égalités $|\pm a \pm ib| = |\pm b \pm ia|$ (seize choix de signes, un seul module).

On a les égalités

$$\left|\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right|^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 = 2 + 3 = 5, \text{ d'où } \left|\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{5}.$$

On les égalités $\begin{cases} \left|1 + i\sqrt{3}\right|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 1 + 3 = 2^2 \\ |1 + i|^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = \sqrt{2}^2 \end{cases}$, d'où

$$\left|\left(1 + i\sqrt{3}\right)(2 + 2i)\right| = \left|\left(1 + i\sqrt{3}\right) 2\,(1 + i)\right| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| |2|\, |1 + i| = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Sanity check : $|1 + i|^2 = \left|\overline{1 + i}\right|^2 = |1 - i|^2 = 2$ comme calculé à la question 1a (première ligne).

Sanity check trigonométrique : vu les écritures exponentielles[4] $1 + i\sqrt{3} = 2\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = 2\angle\frac{1}{3}$ et $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\angle\frac{1}{4}$, on lit directement les modules 2 et $2\sqrt{2}$.

Le complexe $\frac{1-i}{1+1}$ est de la forme $\frac{\overline{c}}{c}$ avec $c := 1 + i$, donc a pour module $\left|\frac{\overline{c}}{c}\right| = \frac{|\overline{c}|}{|c|} = \frac{|c|}{|c|} = 1$.

On a déjà calculé (question 1a troisième ligne) $|4 - 3i| = |3 - 4i| = 5$. On a par ailleurs les égalités $|5 - 12i|^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. On en déduit le module

$$\left|\frac{4 - 3i}{5 - 12i}\right| = \frac{|4 - 3i|}{|5 - 12i|} = \frac{5}{13}.$$

Notons a et b les deuxième et quatrième complexes considérés. Le module étant multiplicatif, on a les égalités

$$|ab| = |a|\,|b| = 4\sqrt{2}\frac{5}{13} = \frac{20}{13}\sqrt{2} \text{ et } \left|a^{10}\right| = |a|^{10} = \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{10} = 2^{25}.$$

3. **Racines carrées complexes (méthode algébrique).**

Soit c un complexe : si l'on en trouve par quelque moyen que ce soit *une* racine carrée, alors *ses* racines carrées seront celle trouvée *et son opposé*. Il est donc possible (à condition d'en avertir votre lectrice !) de rédiger extrêmement salement la recherche d'une racine carrée, de vérifier ensuite *proprement* que c'en est une, puis de conclure. Si nous menons effectivement cette recherche au brouillon, il est de bon ton d'en effacer les traces dans la rédaction finale – et c'est cette rédaction finale que nous présentons ci-après et conseillons fortement de reproduire.

Notons $\binom{a}{b} := \binom{\operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c}$ et soit $r =: s + it$ un complexe (avec s et t réels). En utilisant les égalités $r^2 =$

[3] il pourrait éventuellement y avoir un intérêt pour la correction

[4] On parle aussi de formes *polaires* ou *trigonométriques*.

$(s+it)^2 = s^2 - t^2 + 2sti$, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
& r \text{ est une racine carrée de } c \\
\iff\ & r^2 = c \qquad \text{(définition d'une racine carré)} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{c} \left|r^2\right| = |c| \\ r^2 = c \end{array}\right. \qquad \text{(l'égalité des modules est superflue mais va servir)} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{c} |r|^2 = |c| \\ \operatorname{Re} r^2 = \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} r^2 = \operatorname{Im} c \end{array}\right. \qquad \text{(identification d'un complexe par ses parties réelle et imaginaires)} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{c} s^2 + t^2 = |c| \\ s^2 - t^2 = a \\ 2st = b \end{array}\right. \qquad \text{(calcul \& substitution)} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{c} s^2 = \frac{|c|+a}{2} \\ t^2 = \frac{|c|-a}{2} \\ (2st)^2 = b^2 \\ st \text{ et } b \text{ de même signe} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \text{(ne regarder que les deux premières lignes de la conjonction :} \\ \text{les ajouter \& soustraire pour } \Longrightarrow \text{ comme pour } \Longleftarrow \text{)} \\ \\ \text{(l'identité des signes sert pour remonter } \Longleftarrow \text{)} \end{array} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{c} s^2 = \frac{|c|+a}{2} \\ t^2 = \frac{|c|-a}{2} \\ bst \geq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(pour l'implication } \Longleftarrow \text{, multiplier } \begin{array}{c} 2s^2 2t^2 = (|c|+a)(|c|-a) \\ = |c|^2 - a^2 = \left(a^2+b^2\right) - a^2 \end{array} \text{)} \\
\iff\ & \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{|c|+a}{2}} \\ \beta\sqrt{\frac{|c|-a}{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{où } \beta \text{ est invoqué dans } \{-1,1\} \text{ tel que } b = \beta\,|b| \\
\iff\ & r = \sqrt{\frac{|c|+a}{2}} + i\beta\sqrt{\frac{|c|-a}{2}} \text{ ou } r = -\sqrt{\frac{|c|+a}{2}} - i\beta\sqrt{\frac{|c|-a}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui précède est le schéma général de rédaction (*sanity check* : tout reprendre quand $b = 0$ (que devient alors β ?) et retrouver la recherche de racines carrées dans $\mathbf{R}$). On pourra se permettre, **une fois chaque équivalence bien comprise (et seulement alors)**, de rédiger de manière un peu moins serrée. Voyons comment se décline ce schéma lorsque le complexe c prend successivement les valeurs (de l'énoncé) i, $-5-12i$, $10-4\sqrt{6}i$ et $-1-i\sqrt{3}$. (Le sens de r, s, t demeure.)

(a) On a les équivalences

$$r \text{ est une racine carrée de } i \iff \left\{\begin{array}{c} |r|^2 = |i| \\ \operatorname{Re} r^2 = \operatorname{Re} i \\ \operatorname{Im} r^2 = \operatorname{Im} i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} s^2 + t^2 = 1 \\ s^2 - t^2 = 0 \\ 2st = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} s^2 = \frac{1}{2} \\ t^2 = \frac{1}{2} \\ st > 0 \end{array}\right. \iff s = t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff r = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Sanity check 1 : vérifier que le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ vaut bien i.
Sanity check 2 (trigonométrique) : les racines trouvées $\pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ s'écrivant sous forme polaire $\pm\angle\frac{1}{4}$, leur carré vaut bien $\left(\pm\angle\frac{1}{4}\right)^2 = \angle\frac{1}{2} = i$.

(b) On a les équivalences

$$r \text{ est une racine carrée de } -5-12i \iff \left\{\begin{array}{c} |r|^2 = |5+12i| \\ \operatorname{Re} r^2 = -5 \\ \operatorname{Im} r^2 = -12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} s^2 + t^2 = \sqrt{5^2+12^2} \\ s^2 - t^2 = -5 \\ 2st = -12 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} s^2 + t^2 = 13 \\ s^2 - t^2 = -5 \\ st = -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} s^2 = 4 \\ t^2 = 9 \\ st < 0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \iff r \in \{2-3i, 3-2i\}$$

Sanity check : vérifier que le carré de $2-3i$ vaut bien $-5-12i$ (cela a été fait à la question 1a).

(c) On a les équivalences

$$r \text{ est une racine carrée de } 10-4\sqrt{6}i \iff \left\{\begin{array}{c} |r|^2 = \left|10-4\sqrt{6}i\right| \\ \operatorname{Re} r^2 = 10 \\ \operatorname{Im} r^2 = -4\sqrt{6} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} s^2+t^2 = 2\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{6}}{2}\right)^2} \\ s^2-t^2 = 10 \\ 2st = -4\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} s^2+t^2=14 \\ s^2-t^2=10 \\ st=-2\sqrt{6} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} s^2=12 \\ t^2=2 \\ st<0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \iff r \in \left\{\begin{array}{c} 2\sqrt{3}-\sqrt{2}i, \\ \sqrt{2}i-2\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

Sanity check : vérifier que le carré de $2\sqrt{3}-\sqrt{2}i$ vaut bien $10-4\sqrt{6}i$.

(d) On a les équivalences

$$r \text{ est une racine carrée de } -1-i\sqrt{3} \iff \left\{\begin{array}{c} |r|^2 = \left|1+i\sqrt{3}\right| \\ \operatorname{Re} r^2 = -1 \\ \operatorname{Im} r^2 = -\sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} s^2+t^2=2 \\ s^2-t^2=-1 \\ 2st=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} s^2=\frac{1}{2} \\ t^2=\frac{3}{2} \\ st<0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \iff r \in \left\{\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ i\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

Sanity check 1 : vérifier que le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$ vaut bien $-1-i\sqrt{3}$.
Sanity check 2 (trigonométrique) : le complexe dont on cherche les racines carrées s'écrivant sous forme polaire

$$2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = 2\angle^{-\frac{2}{3}},$$

on en extrait immédiatement une racine carrée

$$\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4. **Équation du deuxième[5] degré dans C.** La lettre z étant la seule dénuée de sens dans le sujet, il est naturel de supposer qu'elle est l'inconnue dans chaque équation.

Les racines carrées apparaissant ci-après sont trouvées par la méthode décrite à la question précédente : à la lectrice de bien vérifier qu'il s'agit de racines carrées ! (Certaines ont d'ailleurs déjà été calculées plus haut.)

À titre d'information (et d'enseignement), effectuer des *sanity checks* en rédigeant cette correction nous a permis d'éliminer trois erreurs de calculs.

Soit $a \in \mathbf{C}$. **Nous éviterons tout recours au discriminant afin que le sens d'un tel recours ait une chance d'être saisi (peut-être un jour) par le lecteur**.

(a) On a les équivalences

$$\begin{aligned} & a \text{ est solution de l'équation } z^2-2iz+2-4i=0 \text{ d'inconnue complexe } z \\ \iff & a^2-2ia+2-4i=0 \iff (a-i)^2 = \underbrace{4i-2+i^2}_{=4i-3=(1+2i)^2} \\ \iff & a-i=\pm(1+2i) \iff a=i\pm(1+2i) \iff a\in\left\{\begin{array}{c} 1+3i, \\ -1-i \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

(b) On a les équivalences

$$\begin{aligned} & a \text{ est solution de l'équation } z^2+(2-i)\,z+(5i-1)=0 \text{ d'inconnue complexe } z \\ \iff & a^2+(2-i)\,a+(5i-1)=0 \iff \left(a+1-\frac{i}{2}\right)^2 = \underbrace{1-5i+\left(1-\frac{i}{2}\right)^2}_{=\frac{7}{4}-6i=\frac{7-24i}{4}=\left(\frac{4-3i}{2}\right)^2} \\ \iff & a+1-\frac{i}{2} = \pm\left(2-\frac{3i}{2}\right) \iff a=\frac{i}{2}-1\pm\left(2-\frac{3i}{2}\right) \iff a\in\left\{\begin{array}{c} 1-i, \\ 2i-3 \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

[5] Les entiers naturels ne se limitant pas à 1 et 2, il conviendrait de dire "*deuxième* degré" au lieu de "*second* degré".

(c) On a les équivalences

$$
\begin{aligned}
& a \text{ est solution de l'équation } z^2+(2-5i)\,z-7+i=0 \text{ d'inconnue complexe } z\\
\iff\ & a^2+(2-5i)\,a-7+i=0 \iff \left(a+1-\frac{5i}{2}\right)^2=\underbrace{7-i+\left(1-\frac{5i}{2}\right)^2}_{=\frac{7-24i}{4}=\left(\frac{4-3i}{2}\right)^2}\\
\iff\ & a+1-\frac{5i}{2}=\pm\left(2-\frac{3i}{2}\right) \iff a=\frac{5i}{2}-1\pm\left(2-\frac{3i}{2}\right) \iff a\in\left\{\begin{array}{c}1+i,\\ 4i-3\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

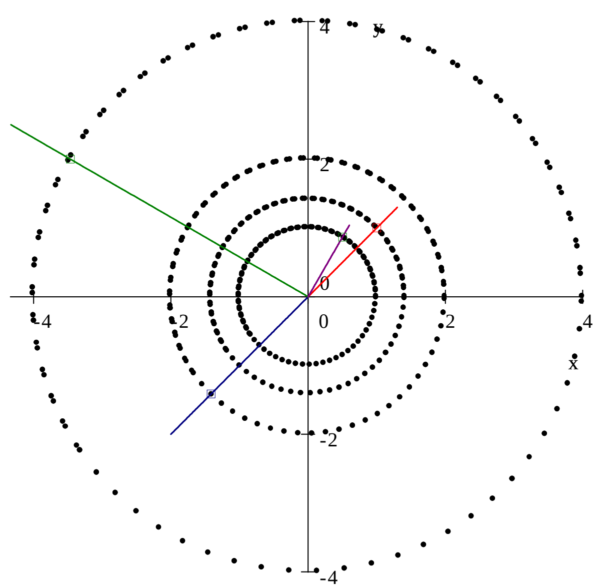
(d) On a les équivalences

$$
\begin{aligned}
& a \text{ est solution de l'équation } z^4-(5-14i)\,z^2-2\,(5i+12)=0 \text{ d'inconnue complexe } z\\
\iff\ & a^4-(5-14i)\,a^2-2\,(5i+12)=0 \iff \left(a^2-\left(\frac{5}{2}-7i\right)\right)^2=\underbrace{2\,(5i+12)+\left(\frac{5}{2}-7i\right)^2}_{=-25\left(\frac{3}{4}+i\right)=(5i)^2\left(1+\frac{i}{2}\right)^2}\\
\iff\ & a^2-\left(\frac{5}{2}-7i\right)=\pm\left(5i-\frac{5}{2}\right) \iff a^2=\left(\frac{5}{2}-7i\right)\pm\left(5i-\frac{5}{2}\right) \iff \left\{\begin{array}{r}a^2=-2i\\ \text{ou}\quad a^2=5-12i\end{array}\right.\\
\iff\ & \left\{\begin{array}{r}a^2=(1-i)^2\\ \text{ou}\quad a^2=(3-2i)^2\end{array}\right. \iff a\in\left\{\begin{array}{c}1-i,\ i-1,\\ 3-2i,\ 2i-3\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

5. **Interprétation géométrique de la forme trigonométrique**[6]**.**

(a) La lettre k de l'énoncé n'a pas de sens : il convient de comprendre « lorsque k parcourt le segment entier $[1,4]$ ».
On a les égalités

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}} &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+i,\\
4\angle^{\frac{5}{6}} &= 4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=4\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=2i-2\sqrt{3},\\
2\angle^{-\frac{3}{4}} &= 2\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i \ (\textit{cf.}\text{ premier calcul})\\
\text{et } \angle^{\frac{1}{3}} &= \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$



[6] On parle aussi de formes *exponentielles* ou *polaires*.

(b) À $z \in \mathbf{C}$ fixé la notation $M(z)$ pourrait être comprise (dans ce contexte) comme le point d'affixe z, c'est-à-dire comme celui dont les coordonnées dans un repère (à préciser !) sont resp. $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$. Comme la notion de point n'a probablement pas été définie à ce stade (ni celle "du" "plan euclidien"), autant prendre $\mathbf{R}^2$ comme définition *du* plan, identifié à $\mathbf{C}$, dont les éléments (nombres complexes) seront appelés *points*, en utilisant toute l'intuition de la géométrie plane.

On a les égalités

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \angle^{\frac{2}{3}}, \text{ d'où celles } j^2 = \left(\angle^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \angle^{\frac{4}{3}} = \angle^{\frac{-2}{3}} = \overline{j}.$$

Il en résulte les valeurs

$$\text{d'une part de la somme } 1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + 2\operatorname{Re} j = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\text{d'autre part du cube } j^3 = \left(\angle^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \angle^2 = 1.$$

L'égalité $j^3 = 1$ montre que j est unitaire, d'où les égalités de distances

$$\left|j^2 - j\right| = |j(j-1)| = |j|\,|j-1| = |j-1| = \left|j - j^3\right| = \left|j\left(1-j^2\right)\right| = |j|\left|1-j^2\right| = \left|1-j^2\right|,$$

lesquelles prouvent que le triangle reliant les points 1, j et j^2 est équilatéral.

6. **Forme trigonométrique (ou exponentielle) : la trouver et la manipuler.**

Rappelons, étant donné un complexe c, que *la* forme trigonométrique de c est celle où l'argument de c donné est son argument *principal* $\operatorname{Arg} c$, à savoir celui qui tombe dans $]-\pi,\pi]$. Renotons $(a,b,c) := (z_1,z_2,z_3)$.

(a) L'idée est toujours de factoriser par le module (à calculer au brouillon) pour faire apparaître un complexe unitaire dont on espère lire les sinus et cosinus d'un argument. Les exercices utilisent les lignes trigonométriques des multiples entiers de $\frac{\pi}{6}$ (il faut donc les connaître !) et rarement d'autres angles.

On a les égalités

$$\begin{aligned} a &= -\frac{5}{2}i = \frac{5}{2}(0-i) = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\angle^{-\frac{1}{2}}, \\ b &= 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}} \\ \text{et } c &= -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = 2\angle^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

(b) On en déduit les égalités

$$\begin{aligned} ab &= \frac{5}{2}\angle^{-\frac{1}{2}}\, 2\sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}2\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 5\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{4}}, \\ \frac{b}{c} &= \frac{2\sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}}}{2\angle^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\angle^{\frac{1}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{2}\angle^{\frac{11}{12}} \text{ et} \\ b^{15} &= \left(2\sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}}\right)^{15} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{15}\angle^{\frac{15}{4}} = 2^{22+\frac{1}{2}}\angle^{4-\frac{1}{4}} = 2^{22}\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Sanity check 1 : sous forme rectangulaire, le produit ab vaut $5 - 5i = 5(1-i) = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

Sanity check 2 : le quotient $\frac{b}{c}$ s'écrirait sous forme rectangulaire (exercice !) $i\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, d'où les (co)sinus de $\frac{\pi}{12}$, par exemple

$$\sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{11\pi}{12} = \operatorname{Re}\angle^{\frac{11}{12}} = \operatorname{Re}\frac{\frac{b}{c}}{\sqrt{2}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{ à comparer avec la question 7.}$$

7. On a les égalités

$$\begin{aligned}\text{d'une part } (1+i)\left(\sqrt{3}+i\right) &= \left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right),\\ \text{d'autre part } (1+i)\left(\sqrt{3}+i\right) &= \sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}}\ 2\angle^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{2}\angle^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = 2\sqrt{2}\angle^{\frac{5}{12}},\end{aligned}$$

$$\text{d'où celles } \cos\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = \operatorname{Im}\angle^{\frac{5}{12}} = \operatorname{Im}\frac{(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \operatorname{Im}\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et de même } \sin\frac{\pi}{12} = \operatorname{Re}\angle^{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Sanity check 1 : vu que $\frac{\pi}{12}$ est très petit, le cosinus trouvé devrait être proche de 1, or il vaut environ[7] $\frac{1+1{,}732}{2\cdot 1{,}414} = \frac{2{,}732}{2{,}848}$, ce qui est cohérent.
Sanity check 2 : vérifier l'égalité $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$.
Sanity check 3 : vérifier l'identité $\sin 2\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

8. **Racines n-ièmes complexes (méthode trigonométrique).**

(a) On a les égalités

$$-2i = 2\angle^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{4}}\right)^2 \text{ et } 1-i\sqrt{3} = 2\angle^{-\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{6}}\right)^2,$$

d'où les racines carrées cherchées $\pm\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{4}} = \pm(1-i)$ et $\pm\sqrt{2}\angle^{-\frac{1}{6}} = \pm\left(\sqrt{3}-i\right)$.
Sanity check : élever au carré et sous forme rectangulaire les complexes précédents.

(b) La lettre z de l'énoncé est dénuée de sens, on supposera donc qu'il s'agit de l'inconnue d'une équation à résoudre, certainement l'égalité $z^3 = 8i$ (non précisé par l'énoncé) : sans aucune autre indication, on cherchera les solutions dans un ensemble aussi vaste que possible, à savoir $\mathbf{C}$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Vu les équivalences $\forall c \in \mathbf{C},\ e^c = 1 \iff c \in 2\pi i\mathbf{Z}$, on peut affirmer celles

$$\angle^\lambda = \angle^\mu \iff \lambda = \mu \text{ modulo } 2.$$

Rappelons que l'on peut identifier module et [argument modulo 2π] lorsque le réel en facteur de l'exponentielle est *strictement positif* vu à $r, s > 0$ fixés les équivalences

$$r\angle^\lambda = s\angle^\mu \iff \begin{cases} \left|r\angle^\lambda\right| = |s\angle^\mu| \\ r\angle^\lambda = s\angle^\mu \end{cases} \underset{\text{pour chaque réel } \alpha}{\overset{\angle^\alpha \text{ est unitaire}}{\iff}} \begin{cases} |r| = |s| \\ r\angle^\lambda = s\angle^\mu \end{cases}$$
$$\underset{\text{positifs}}{\overset{r \text{ et } s}{\iff}} \begin{cases} r = s \\ r\angle^\lambda = s\angle^\mu \end{cases} \underset{\text{non nuls}}{\overset{r \text{ et } s}{\iff}} \begin{cases} r = s \\ \angle^\lambda = \angle^\mu \end{cases}.$$

Ceci étant rappelé, soit à présent $c \in \mathbf{C}$ dont on note resp. r et λ le module et le quotient par π de l'argument principal, de sorte à avoir l'égalité $c = r\angle^\lambda$ (suivant l'indication de l'énoncé). On a alors les équivalences

$$c \text{ est solution de l'équation devinée de l'énoncé} \iff c^3 = 8i \iff \left(r\angle^\lambda\right)^3 = 8\angle^{\frac{1}{2}}$$
$$\iff r^3\angle^{3\lambda} = 8\angle^{\frac{1}{2}} \underset{\text{n'est pas nul}}{\overset{\text{le complexe } 8\angle^{\frac{1}{2}}}{\iff}} \begin{cases} r^3\angle^{3\lambda} = 8\angle^{\frac{1}{2}} \\ r \neq 0 \end{cases} \underset{\textit{cf.}\text{ rappel}}{\overset{r,8>0}{\iff}} \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\lambda = \frac{1}{2} \text{ modulo } 2 \end{cases}$$
$$\underset{-3<3\lambda\leq 3}{\overset{r\geq 0 \text{ et}}{\iff}} \begin{cases} r = 2 \\ 3\lambda \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\} \end{cases}.$$

Les solutions cherchées sont par conséquent les trois complexes

$$2\angle^{-\frac{1}{2}} = 2(-i) = -2i, \quad 2\angle^{\frac{1}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}+i \quad \text{et} \quad 2\angle^{\frac{5}{6}} = 2\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i-\sqrt{3}.$$

Sanity check : élever au cube ces trois candidats.

[7] utiliser les valeurs approchées $\sqrt{2} \simeq 1,414$ et $\sqrt{3} \simeq 1,732$

Autre démarche (algébrique). On rappelle pour chaques complexes a et b la factorisation

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = (a-b)(a-bj)\left(a-bj^2\right) \text{ où } j := \angle\tfrac{2}{3}.$$

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} &c \text{ est solution de l'équation devinée de l'énoncé} \iff c^3 = 8i \iff c^3 - \left(2\angle\tfrac{1}{6}\right)^3 = 0 \\ \iff &\left(c - 2\angle\tfrac{1}{6}\right)\left(c - 2\angle\tfrac{1}{6}j\right)\left(c - 2\angle\tfrac{1}{6}j^2\right) = 0 \iff c \in \left\{2\angle\tfrac{1}{6},\ 2\angle\tfrac{1}{6}j,\ 2\angle\tfrac{1}{6}j^2\right\} \end{aligned}$$

et l'on retombe les trois solutions de la première démarche en remplaçant j par $\angle\frac{2}{3}$ puis en regroupant les arguments.

9. **Linéarisation.**

Linéariser un produit de (co)sinus, c'est écrire ce dernier, en tant qu'*application* (et non en tant que simple nombre complexe !) comme une combinaison linéaire de (co)sinus (*un seul* par terme) dont les coefficients ne font pas intervenir les arguments des (co)sinus considérés. Par exemple (à $a \in \mathbf{C}$ fixé) :

$$\forall a \in \mathbf{C},\ \cos a \sin a = \frac{1}{2}\sin 2a \quad \text{ou} \quad \forall t \in \mathbf{R},\ \cos^2 t = 1 + 2\cos t \quad \text{ou encore} \quad \sin^2 + \cos^2 = 1.$$

Une telle combinaison linéaire étant très simple à intégrer (car l'intégration est $\left(\frac{\pi}{2}\right)$re et l'on sait intégrer des (co)sinus), l'intérêt de la linéarisation est manifeste.

La lettre x de l'énoncé est dénuée de sens. On doit comprendre ici une quantification universelle sur un ensemble assez grand (comme $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, *cf.* exemples ci-dessus) pour linéariser des *applications*.

Soit $c \in \mathbf{C}$. On a les égalités

$$\begin{aligned} \cos^3 c &\overset{\text{définition}}{\underset{\text{de cos}}{=}} \left(\frac{e^{ic}+e^{-ic}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{ic}\right)^3 + 3\left(e^{ic}\right)^2 e^{-ic} + 3e^{ic}\left(e^{-ic}\right)^2 + \left(e^{-ic}\right)^3}{2^3} \\ &= \frac{e^{3ic}+e^{-3ic}+3e^{ic}+e^{-ic}}{4\cdot 2} = \frac{e^{3ic}+e^{-3ic}}{4\cdot 2} + \frac{3}{4}\frac{e^{ic}+e^{-ic}}{2} \\ &\overset{\text{définition}}{\underset{\text{de cos}}{=}} \frac{\cos 3c + 3\cos c}{4} \\ \text{et } (\cos c \sin c)^3 &= \left(\frac{\sin 2c}{2}\right)^3 \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de sin}}{=}} \left(\frac{e^{2ic}-e^{-2ic}}{2\cdot i}\right)^3 \\ &= \frac{\left(e^{2ic}\right)^3 - 3\left(e^{2ic}\right)^2 e^{-2ic} + 3e^{2ic}\left(e^{-2ic}\right)^2 - \left(e^{-2ic}\right)^3}{4\cdot 4\cdot 4\cdot i^3} \\ &= \frac{e^{6ic}-e^{-6ic}-\left(3e^{2ic}-3e^{-2ic}\right)}{2\cdot 32\ (-i)} = \frac{3}{32}\frac{e^{2ic}-e^{-2ic}}{2i} - \frac{1}{32}\frac{e^{6ic}-e^{-6ic}}{2i} \\ &\overset{\text{définition}}{\underset{\text{de sin}}{=}} \frac{3\sin 2c - \sin 6c}{32}. \end{aligned}$$

Sanity checks : vérifier ces identités (qui font intervertir les arguments c, $2c$, $3c$ et $6c$) pour $c \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$ (et même $\frac{\pi}{4}$).

Remarque. Les "formules d'Euler" ne sont que des *définitions* du point de vue moderne, elles permettent certes de nombreuses choses mais cela n'en font pas pour autant des "vérités profondes et mystérieuses". Halte au mysticisme !