

---

## Feuille d'exercices 2

Nombres complexes.

---

### Exercice 2.1 – Calculs avec les formes algébriques.

1. On pose  $z_1 = 2 - 3i$  et  $z_2 = 1 + 2i$ . Effectuer les calculs :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \times z_2, \quad z_1^2 \quad \text{et} \quad z_1/z_2.$$

2. Mettre sous forme algébrique les quantités complexes suivantes :

$$\frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}, \quad \frac{3 + 6i}{3 - 4i}, \quad (2 - 5i)(3 + 8i)(1 + i).$$

**Exercice 2.2 – Modules.** Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}, \quad z_2 = (1 + i\sqrt{3})(2 + 2i), \quad z_3 = \frac{1 - i}{1 + i}, \quad z_4 = \frac{4 - 3i}{5 - 12i}, \quad z_5 := z_2 z_4, \quad z_6 := (z_2)^{10}$$

### Exercice 2.3 – Interprétation géométrique de la forme trigonométrique.

1. Dans chacun des cas suivants, représenter le point  $M_k$  d'affixe  $z_k = r_k e^{i\theta_k}$  et donner la forme algébrique de  $z_k$ ,

$$(r_1 = \sqrt{2}, \theta_1 = \frac{\pi}{4}), \quad (r_2 = 4, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}), \quad (r_3 = 2, \theta_3 = -\frac{3\pi}{4}), \quad (r_4 = 1, \theta_4 = \frac{\pi}{3}).$$

2) On pose  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$  et  $j^3 = 1$ . Quelle est la nature du triangle de sommets  $M(1)$ ,  $M(j)$  et  $M(j^2)$  ?

### Exercice 2.4 – Forme trigonométrique (ou exponentielle) : la trouver et la manipuler.

1. Donner la forme trigonométrique (module et argument) des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\frac{5}{2}i, \quad z_2 = 2 + 2i, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

2. En déduire la forme trigonométrique de

$$z_1 z_2, \quad \frac{z_2}{z_3}, \quad (z_2)^{15}.$$

**Exercice 2.5 –** Ecrire les deux formes du produit  $z = (1 + i)(\sqrt{3} + i)$ .

En déduire les valeurs de  $\cos(\frac{\pi}{12})$  et  $\sin(\frac{\pi}{12})$ .

**Exercice 2.6 – Racines carrées complexes (méthode algébrique).** Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i \quad , \quad z_2 = -5 - 12i \quad , \quad z_3 = 10 - 4i\sqrt{6} \quad , \quad z_4 = -1 + i\sqrt{3}$$

**Exercice 2.7 – Equations du second degré dans  $\mathbb{C}$ .** Résoudre, dans  $\mathbb{C}$  , les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} 1) \quad z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0 & 2) \quad z^2 + (2 - i)z + (5i - 1) = 0 \\ 3) \quad z^2 + (2 - 5i)z - 7 + i = 0 & 4) \quad z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0 \end{array}$$

**Exercice 2.8 – Racines  $n$ -ièmes complexes (méthode trigonométrique).**

1. Déterminer la forme trigonométrique puis les deux racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2i \quad , \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

2. Résoudre  $z^3 = 8i$  (on commencera par écrire  $8i$  sous forme trigonométrique, et on cherchera  $z$  également sous forme trigonométrique).

**Exercice 2.9 – Linéarisation.** Donner une expression linéarisée des deux fonctions suivantes

$$f(x) = \cos^3 x \quad , \quad g(x) = (\cos x \sin x)^3 \quad .$$