Feuille d'exercices 1

Nombres réels.

Exercice 1.1 – Polynômes.

1. Pour chacun des polynômes $P(x)$ suivants :

1. résoudre les équations du second degré $P(x) = 0$;
2. donner le signe de $P(x)$ suivant la position de $x \in \mathbb{R}$;
3. (si possible) factoriser $P(x)$ sous la forme $P(x) = K(x-a)(x-b)$;

$$P(x) = x^2 + x - 6 \ ; \ P(x) = 4x^2 - 8\sqrt{2}x + 8 \ ; \ P(x) = 3x^2 + 3x + 1.$$

2. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

a. Vérifier que $P(1) = 0$, puis en déduire une factorisation $P(x) = (x-1)(x^2 + Ax + B)$ (on explicitera A et B en procédant par identification).

b. Déterminer les trois racines de $P(x)$, et donner le signe de $P(x)$ suivant la position du réel x.

Exercice 1.2 – Inégalités.

1. Soit x, y, z des réels tels que $2 \leq x \leq 3$, $-6 \leq y \leq -3$, $4 \leq z \leq 9$. Déterminer un encadrement de

$$x + y \ , \ x - y \ , \ 4x - 2y \ , \ xy \ , \ \frac{x}{z}.$$

2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \geq \sqrt{2}$.

Exercice 1.3 – Equations. Inéquations.

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = 3x - 7$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$).

2. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x(x-6)} \leq 4$ (d'inconnue réelle x).

3. Résoudre l'équation $|x+1| - 2x^2 + x + 1 = |x-2|$.

4. Résoudre l'inéquation $|x+1| + |x-3| < 6$.

5. Montrer que si x est un nombre réel tel que $|x-2| \leq \frac{1}{4}$ alors

$$|1 - \frac{x}{2}| \leq \frac{1}{8} \text{ et } |1 - \frac{2}{x}| \leq \frac{1}{7}.$$

Exercice 1.4 – Sommes classiques

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Somme d'une progression géométrique.

a. Soit q un réel distinct de 1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b. Application : Pour $q = \frac{1}{10}$ et $n \geq 1$ un entier naturel on pose $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Montrer que $\frac{10}{9} - \frac{1}{9.10^n} \leq s_n \leq \frac{10}{9}$. Vérifier que $s_n \to \frac{10}{9}$ et donner une valeur approchée décimale de $\frac{10}{9}$ à 10^{-4} près (on pourra commencer par donner l'écriture décimale de s_n).