

SAGE  
Marc

*Séminaire* du  
17/03/2004

Graphes plongés et  
intégration matricielle :  
une correspondance inattendue

Lycée Louis-le-Grand  
MP\*2  
2003-2004  
Professeur de mathématique : M. RANDÉ

1

## Introduction

Nombreux sont les problèmes mathématiques en analyse dont l'énoncé peut susciter quelque appréhension, comme calculer  $\int_{\mathcal{H}_N} \sqrt{\frac{1}{2^N \pi^{N^2}}} e^{-\frac{1}{N} \text{tr}(H^4) - \frac{1}{2} \text{tr}(H^2)} dv(H)$ ,  $\mathcal{H}_N$

désignant l'ensemble des matrices hermitiennes  $N \times N$ . Certains de ces problèmes, souvent mis sur la table par les physiciens, nécessitent en effet une grande habileté dans le maniement des outils analytiques, et ne peuvent être cassés qu'au bout de longs et fastidieux efforts utilisant toute la finesse dont nous savons l'analyse pourvue.

Les graphes, merveilleux objets mathématiques, peuvent proposer d'élégantes alternatives à ces problèmes. Simples et intuitifs d'approche, ils permettent parfois d'attaquer le problème sous un angle tout autre, et de ramener leurs énoncés à ceux de la théorie des graphes.

C'est ainsi que la combinatoire des cartes (ou graphes plongés), domaine déjà largement exploré des mathématiciens, se trouve soudainement reliée à la physique théorique de pointe. En effet, cette dernière peut par exemple, pour évaluer des intégrales de chemins en théorie des supercordes, discrétiser les chemins entre deux cordes par des graphes plongés, et sommer sur des cartes au lieu de sommer sur des surfaces. Bien sûr, les physiciens n'ont pas attendu les mathématiciens pour effectuer ces calculs d'intégrales, et ont développé leurs propres méthodes pour en venir à bout, reliant ainsi la théorie de l'intégration matricielle à l'énumération de cartes. Malheureusement, à cause de la différence de langage qui bride trop souvent l'entente entre physiciens et mathématiciens, ces méthodes demeurent peu connues de la communauté combinatoire.

Il nous serait impossible d'expliquer en détails l'une théorie comme l'autre, les cartes étant un domaine suffisamment vaste de la combinatoire et les techniques pour évaluer des intégrales matricielles suffisamment nombreuses et subtiles. Nous nous proposons simplement de jeter les premières pierres d'un pont entre ces deux théories, de faire apparaître une correspondance inattendue entre ces deux domaines aux apparences si différentes.

Nous nous attacherons ici, après une présentation des graphes plongés, tout d'abord à un problème de combinatoire, que nous résoudrons par le calcul d'une intégrale sur  $\mathcal{H}_N$  après avoir parlé un peu des mesures gaussiennes ; ceci pour faire apparaître l'utilisation de l'intégration matricielle pour dénombrer des cartes. Puis nous chercherons à évaluer l'intégrale qui figure en tête de cette introduction, en utilisant des arguments combinatoires similaires, pour ramener son évaluation à un problème de dénombrement sur les cartes. La correspondance sera alors établie dans les deux sens.

Cet exposé est grandement inspiré de l'article d'Alexander Zvonkin [1], où le lecteur intéressé trouvera des compléments très abordables ainsi qu'une bibliographie très riche sur le sujet ; je tiens par conséquent à le remercier tout particulièrement.

J'adresse également un grand merci à Dimitri Zvonkine, qui a su susciter mon intérêt pour les cartes et répondre à mes nombreuses questions sur le sujet.

J'espère à travers cet exposé faire partager ma grande fascination pour les graphes, ces objets si intuitifs et géométriques au premier abord, qui rendent les mathématiques considérablement plus belles et attractives qu'elles ne le sont déjà.



## I/ cartes – graphes plongés

### ① graphes

On appelle **graphe** tout couple  $\mathcal{G} = (S, \mathcal{A})$  où  $S$  est un ensemble fini (ses éléments sont les **sommets** de  $\mathcal{G}$ ) et  $\mathcal{A}$  un ensemble de couples de sommets de  $S$  (ce sont les **arêtes** de  $\mathcal{G}$ ).

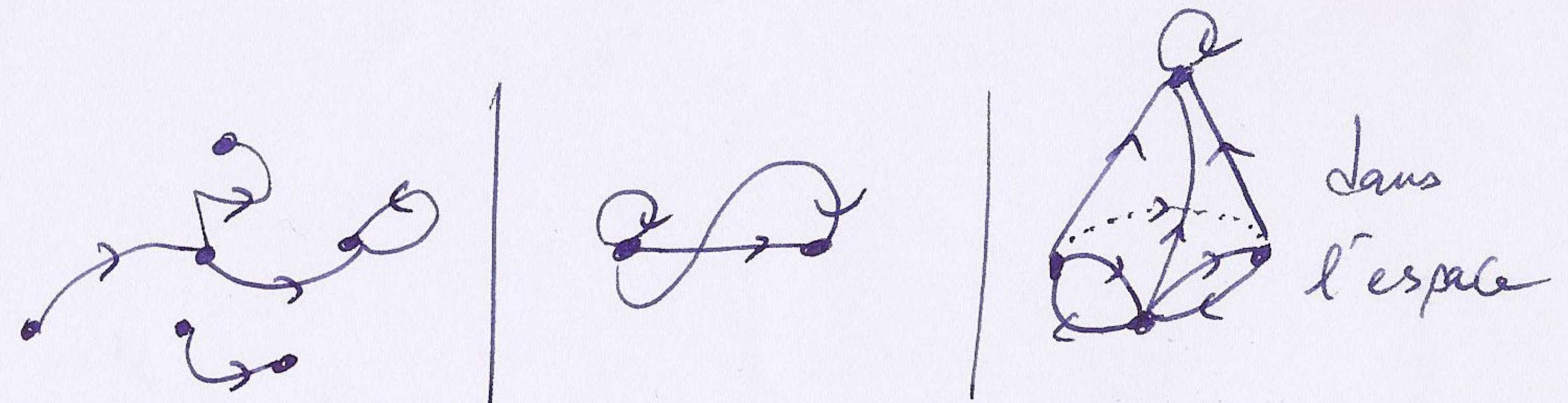
On représentera un graphe dans le plan (ou dans l'espace) par des points (symbolisant les sommets) reliés par des flèches (les arêtes).

On ne considérera désormais que des graphes **non orientés** : les arêtes n'ont pas de sens prédéfini, on les représente par des traits.

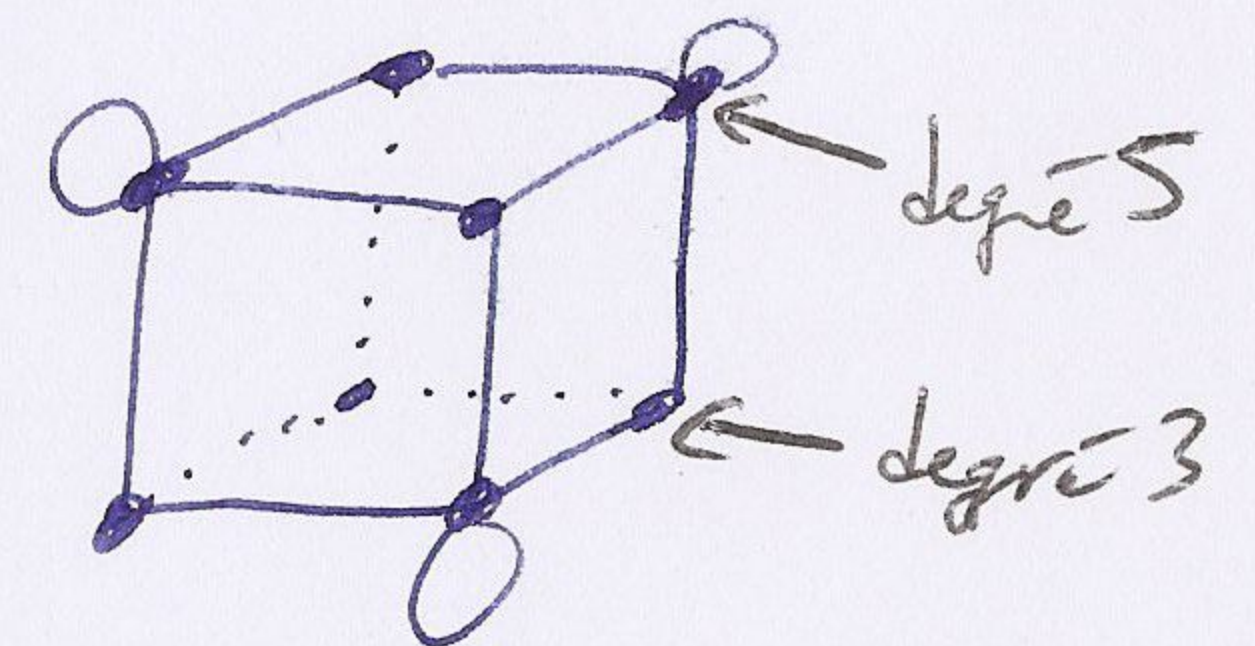
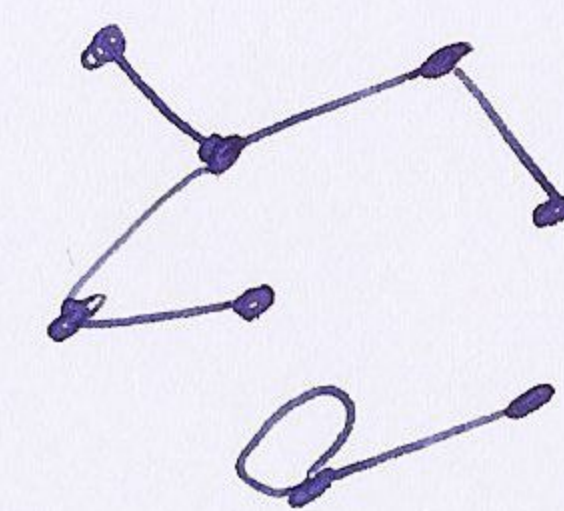
On définit le **degré** d'un sommet par le nombre d'arêtes lui étant incidentes, une boucle étant comptée deux fois.

Des exemples classiques de graphes sont :

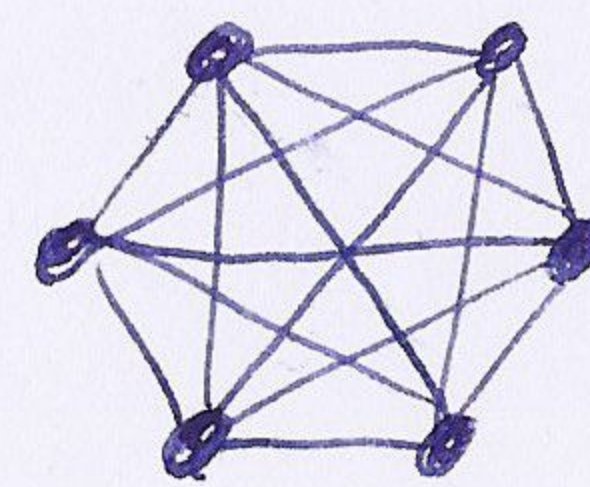
- le **graphe complet**  $K_n$  : les  $n$  sommets sont reliés de toutes les façons possibles ; on a donc  $\binom{n}{2}$  arêtes.
- le **n-gone** : si les sommets sont  $S_1, \dots, S_n$ , les arêtes sont  $\{S_1, S_2\},$



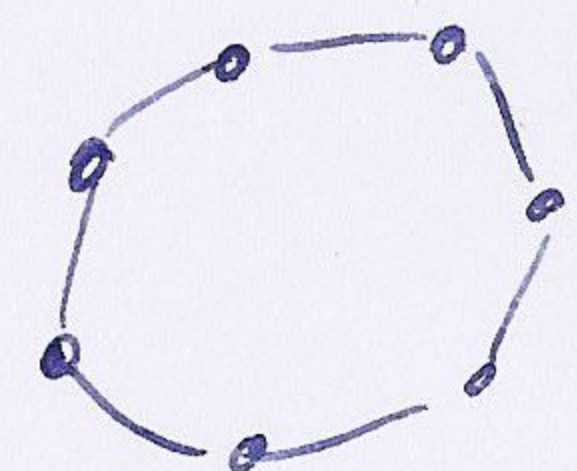
graphes non orientés



$K_6$



le 7-gone





3

$\{S_2, S_3\}, \dots, \{S_{n-1}, S_n\}, \{S_n, S_1\}$ .

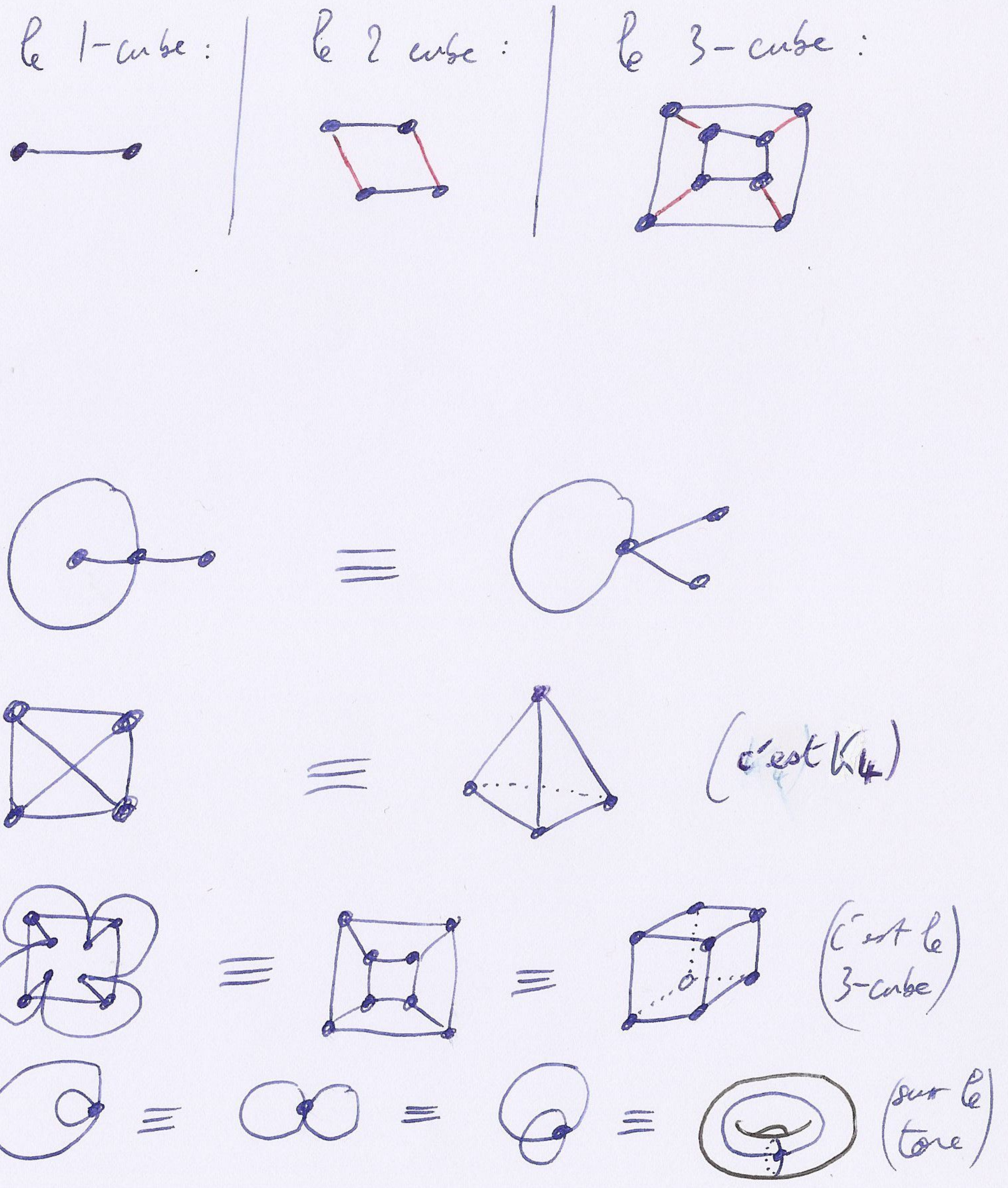
• le **n-cube** : les sommets sont tous les n-uplets à valeurs dans  $\{0, 1\}$  (il y en a  $2^n$ ), deux sommets étant reliés ssi ils diffèrent d'un bit exactement (d'où le nombre d'arêtes  $\frac{n 2^n}{2} = n 2^{n-1}$ ). Une manière de représenter un n-

cube est de numéroter deux (n-1)-cubes, puis de tracer une arête entre deux sommets de même numéro.

On remarquera qu'il existe beaucoup de manières de représenter un même graphe, mais il faut bien garder en tête que ces représentations ne sont le reflet que de deux choses : un ensemble de sommets, et un ensemble d'arêtes reliant ces sommets.

Certaines représentations sont toutefois plus « agréables » que d'autres : les arêtes ne s'y coupent pas, on a parfois envie de parler de « faces » du graphe (bien qu'on ne puisse en aucun cas le faire, puisque les dites faces dépendent de la représentation adoptée).

Le premier problème évoqué, celui de trouver une représentation où les arêtes ne se coupent pas, ne peut être résolu dans le cas général dans le plan : prendre par exemple  $K_5$ , ou considérer le célèbre problème





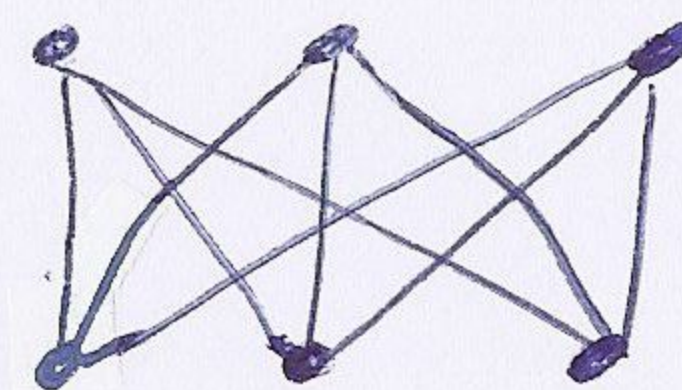
4

des six maisons. Il l'est cependant clairement dans l'espace. On s'intéressera alors à des surfaces particulières de  $\mathbb{R}^3$ .

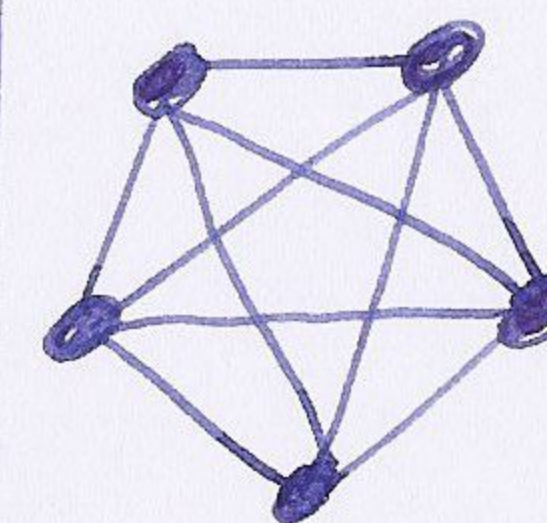
### 2 g-tores

On s'intéressera aux 2-variétés sans bord de  $\mathbb{R}^3$  (muni de sa topologie canonique euclidienne), closes, orientables. Expliquons ces termes :

- une **2-variété sans bord** est un sous-espace topologique de  $\mathbb{R}^3$ , connexe, tel que tout point admette un voisinage homéomorphe à un disque ouvert (on peut donc à partir de tout point aller dans n'importe quelle direction, on n'est pas limité par un « bord »).
- le terme **clos**, emprunté à la combinatoire des cartes, signifie simplement compact en langage topologique (cela exclut les bords « artificiels » des surfaces ouvertes induits par leur frontière, type demi-sphère privée de son cercle de base)
- on dira qu'une surface est **orientable** si : pour tout point de la surface, pour toute courbe fermée sur la surface passant ce point, une orientation



les six maisons



$K_5$

plan



caban de Möbius



(cylindre avec ses 2 disques de base)

pas de



(demi-sphère privée de son disque de base)

ni de





5

donnée initialement est conservée en parcourant la courbe entièrement une fois. Des surfaces classiques ne satisfaisant pas ce critère sont le **ruban de Möbius** et la **bouteille de Klein**.

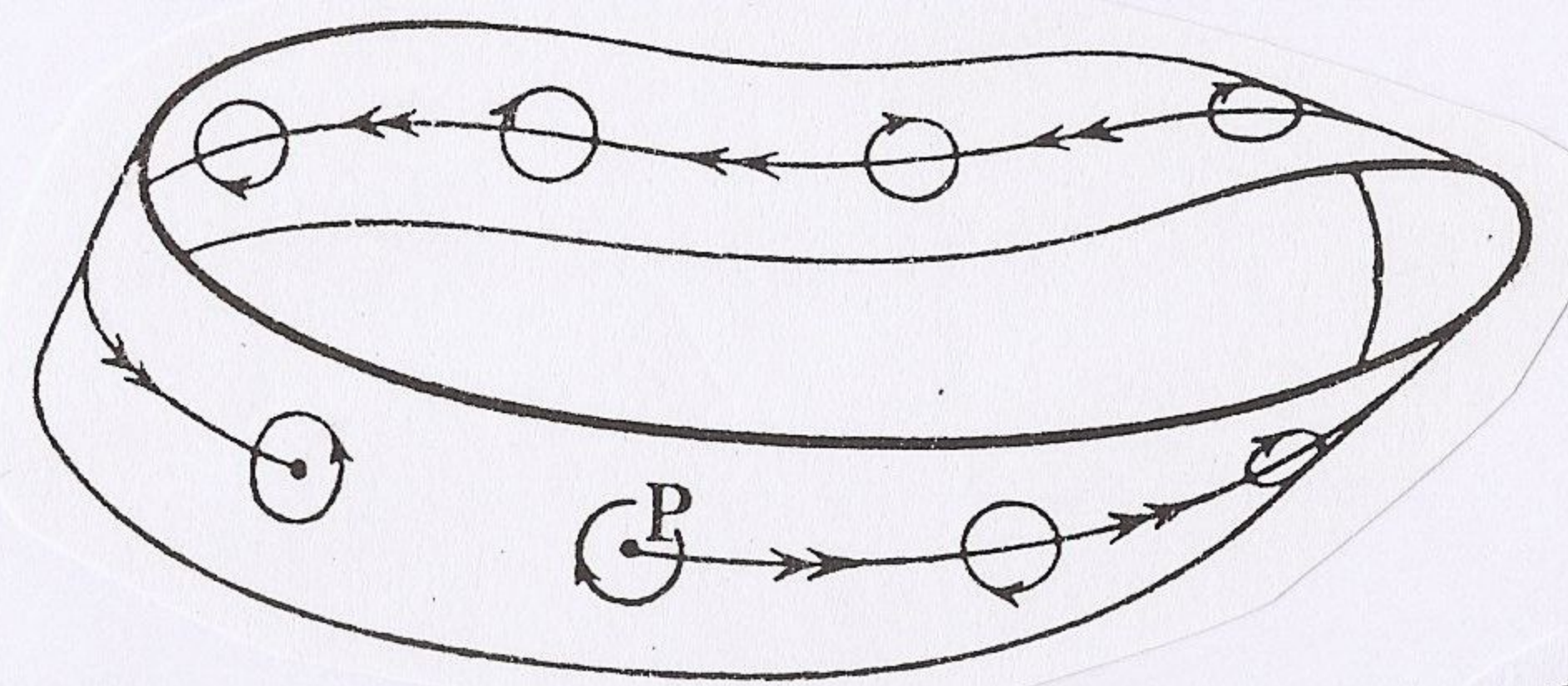
Un théorème important de classification, que nous admettrons, affirme qu'une telle surface est homéomorphe à une sphère, un tore, ou un tore généralisé à  $g$  trous ; le nombre  $g$  s'appelle le **genre** de la surface (le genre de la sphère vaut 0). On parlera alors de  **$g$ -tore**.

On s'intéressera désormais aux représentations de graphes sur des  $g$ -tores. Pour revenir à notre problème originel, il convient de considérer celles dont les arêtes ne se coupent pas.

### ③ cartes

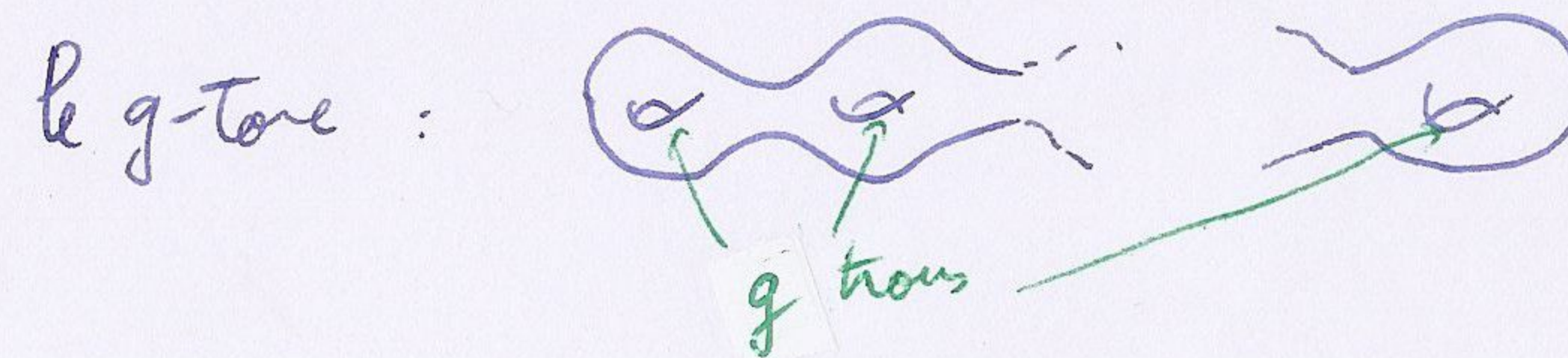
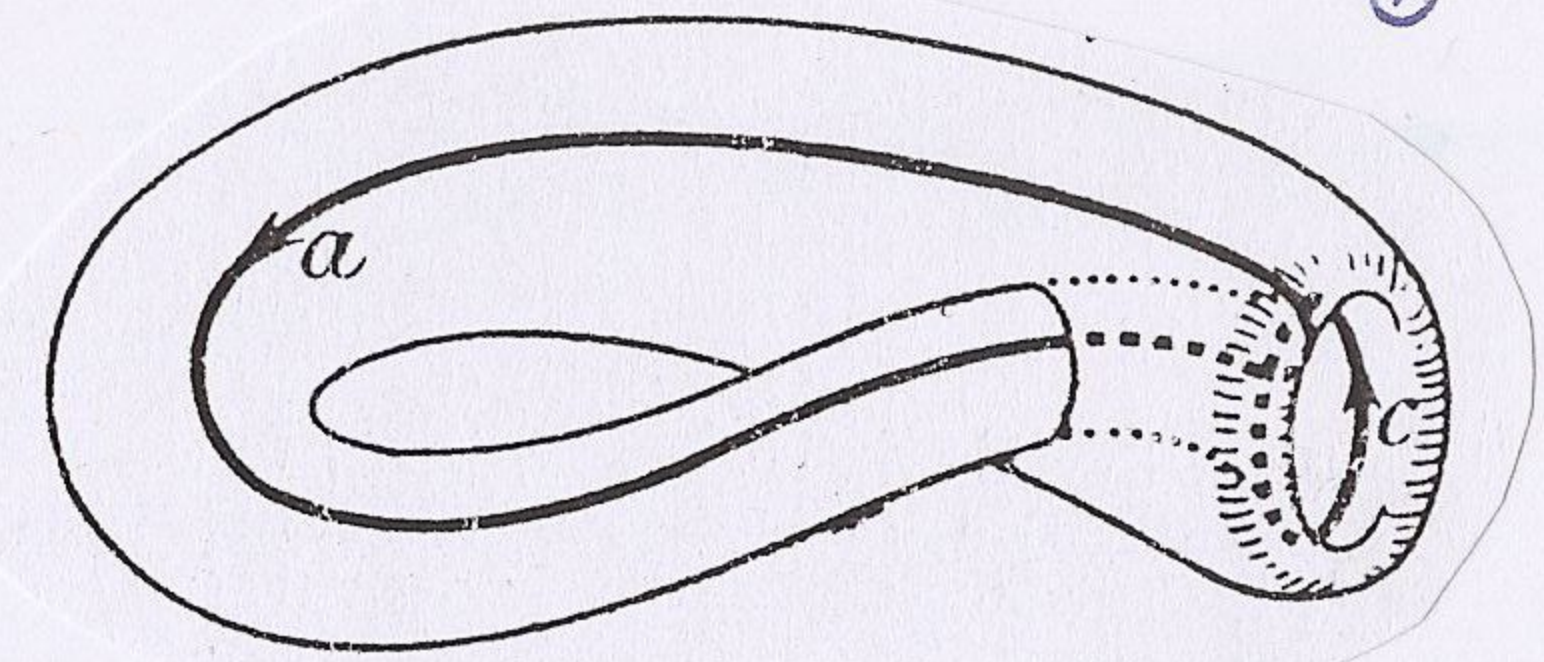
#### a) définitions - exemples

On appellera **carte** toute représentation d'un graphe sur un  $g$ -tore telle que : ① les arêtes ne se coupent pas ; ② en découpant la surface le long des arêtes on obtienne une partition du  $g$ -tore en ensembles



↑ le ruban de Möbius

La bouteille de Klein ↓





6

homéomorphes à des disques (appelés **faces**). On dira qu'on a plongé le graphe sur le g-tore, d'où le terme également utilisé de **graphe plongé**. Remarque que la condition de partition implique la connexité du graphe représenté.

On parlera abusivement du **genre** d'une carte pour le genre de la surface où celle-ci est dessinée

On définit également le **degré** d'une face par le nombre d'arêtes qu'il faut parcourir pour faire un tour complet de la face ; toute face est ainsi représentée par un polygone à n côtés où n est son degré.

Remarquons (pour illustrer) que le cube tel qu'on se le représente habituellement est en fait un plongement du 3-cube sur la sphère, et on y retrouve les 6 faces carrées. Mais on peut également le plonger sur le tore, avec plein d'autres faces possibles (pas nécessairement carrées).

Sur tous nos exemples, en notant S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces, il apparaît la relation  $S - A + F = 2 - 2g$ . C'est un résultat général, attribué à Euler.

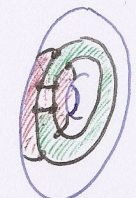
b) théorème d'Euler

3-cube sur le 0-tore



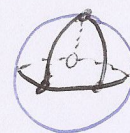
faces: 6 carrés

3-cube sur le 1-tore



faces: 2 carrés, 2 octogones

K4 sur 0-tore



faces: 4 triangles

K4 sur 1-tore



faces: 1 carré, 1 octogone

1-cube sur la sphère



en décomposant



(penser à une chaussette)

on obtient bien un disque ; faces: un 2-gone

autres exemples





7

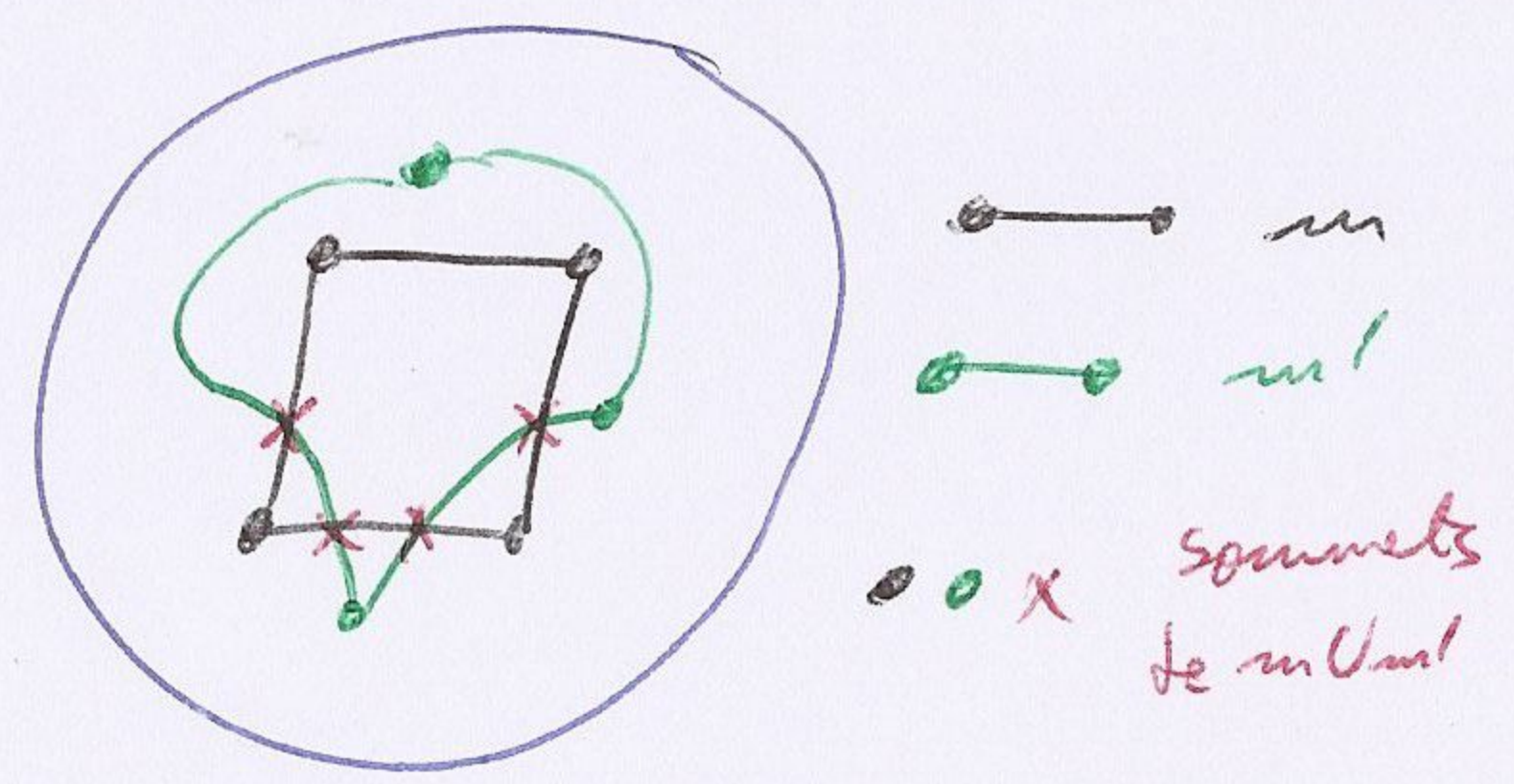
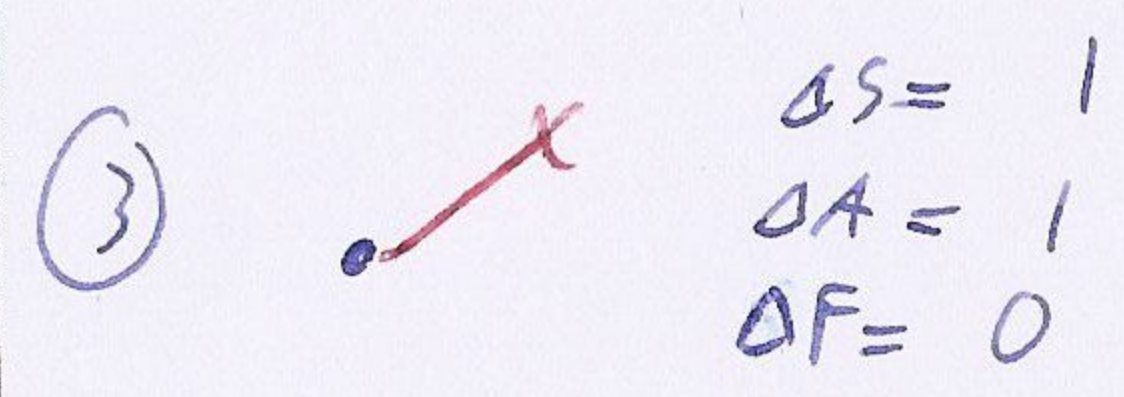
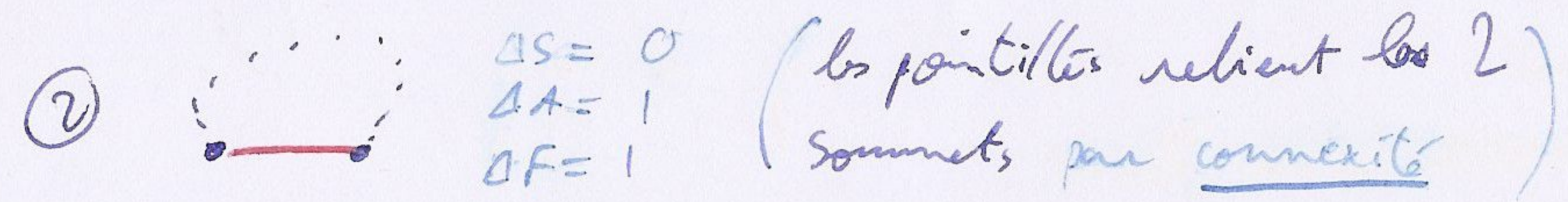
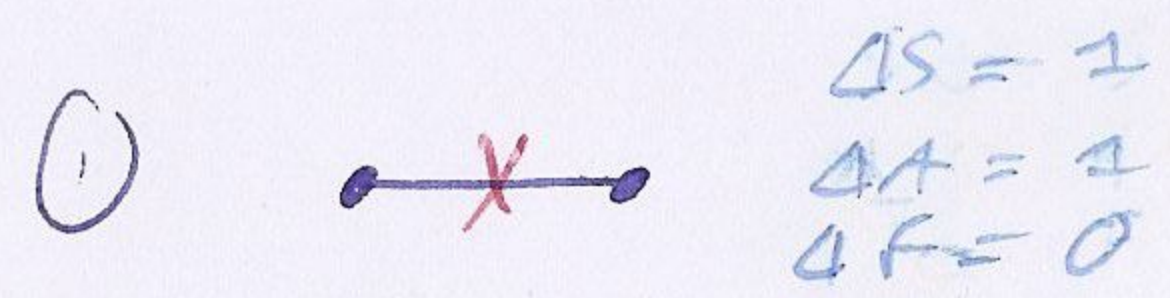
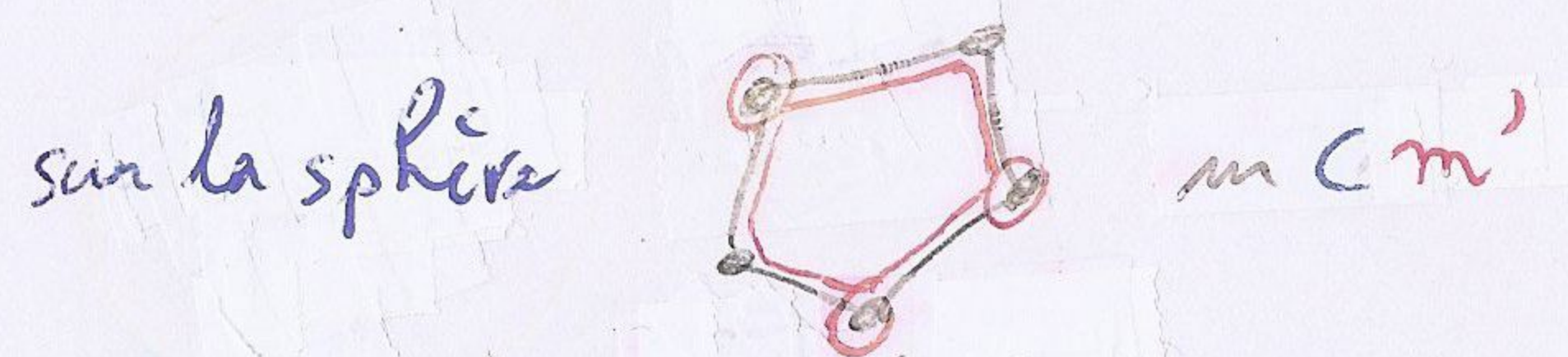
La quantité  $\chi = S - A + F$ , appelée **caractéristique d'Euler-Poincaré**, ne dépend que du genre de la carte considérée :

$$\chi = S - A + F = 2 - 2g.$$

Démonstration : on commence par montrer que si  $m$  et  $m'$  sont deux cartes sur un  $g$ -tore avec  $m \subset m'$  (i.e. les sommets de  $m$  sont des sommets de  $m'$ , et les arêtes de  $m$  sont des chaînes d'arêtes de  $m'$ ), alors  $\chi(m) = \chi(m')$ .

En effet, on passe de  $m$  à  $m'$  en rajoutant des arêtes et des sommets à  $m$ , ce qui peut s'effectuer à partir des trois opérations élémentaires suivantes : ① rajouter juste un sommet (nécessairement sur un arête préexistante car les cartes sont connexes) ; ② rajouter juste une arête (nécessairement entre deux sommets préexistants) ; ③ rajouter une arête et un sommet exactement (ce qui doit forcément se faire à partir d'un sommet préexistant). On remarque que  $\chi$  est conservée par ces opérations, d'où le résultat.

Considérons alors deux cartes  $m$  et  $m'$  de même genre. On définit la carte  $m \cup m'$ , dont les sommets sont ceux de  $m$  et  $m'$  auxquels on ajoute les points d'intersection des arêtes de  $m$  avec celles de  $m'$ , et dont les arêtes sont celles de  $m$  et  $m'$  éventuellement morcelées par leurs





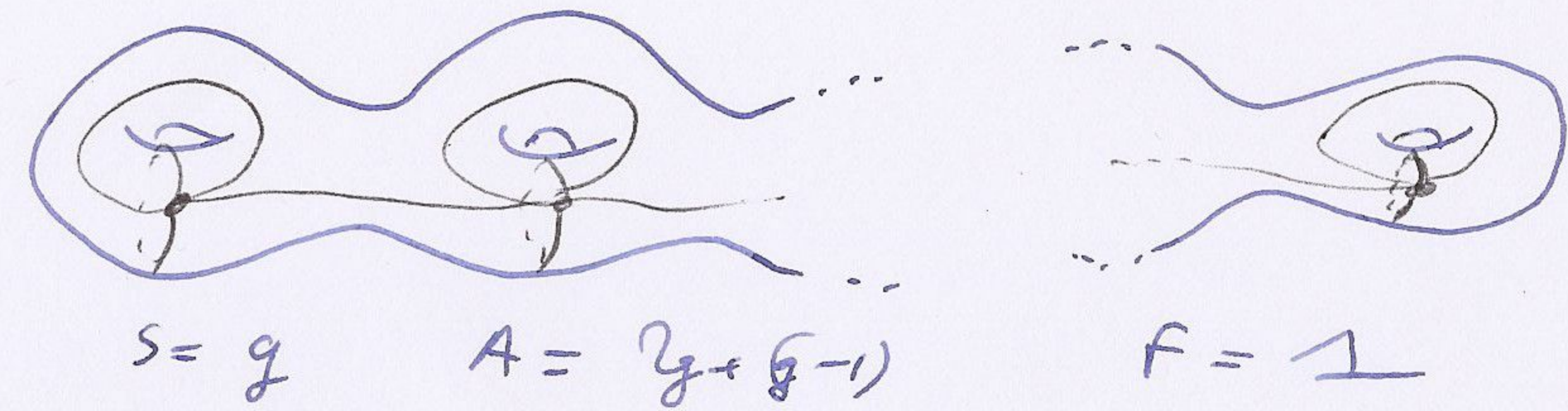
8

intersections. Ainsi,  $m \subset (m \cup m')$  et  $m' \subset (m \cup m')$ , d'où  $\chi(m) = \chi(m \cup m') = \chi(m)$ , et donc  $\chi$  ne dépend que du genre. On considère alors la carte suivante à une face (pour le voir, trancher d'abord les boucles du bas, puis découper le long de la courbe restante comme on ouvrirait une fermeture éclair), de caractéristique  $\chi = S - A + F = g - (2g + (g - 1)) + 1 = 2 - 2g$  CQFD.

Il arrivera par la suite qu'on ait à considérer plusieurs cartes dessinées séparément sur des surfaces différentes ; on parlera alors de **pseudo-carte**. La caractéristique  $\chi$  d'une pseudo-carte vaut la somme des caractéristiques de ses composantes connexes, puisque  $S$ ,  $A$ , et  $F$ , sont également additifs ; on ne peut néanmoins plus parler de genre.

Un corollaire remarquable du théorème d'Euler est qu'il permet de retrouver un invariant bien connu des **polyèdres** :  $S - A + F = 2$  ; il suffit en effet de considérer ces derniers comme des cartes sur la sphère, qui est de genre 0.

On verra par la suite que tout graphe admet une pseudo-carte le représentant. La recherche du plus petit  $g$  possible est un problème intéressant, qui peut être facilité par le théorème Euler.





9



Cherchons par exemple ce genre minimal dans le cas du n-cube.

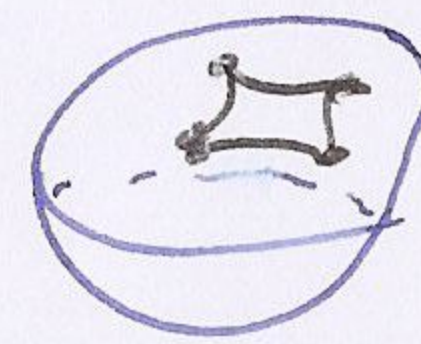
La seule donnée inconnue est le nombre de faces, mais on peut quand même avoir un renseignement dessus. Puisque l'on considère des 2-variétés, on peut dénombrer les arêtes selon les faces par la relation  $2A = \sum_{\text{faces}} \text{degré}(\text{face})$ . Or, par définition, le n-cube ne possède pas d'arêtes multiples, donc toute carte le représentant ne peut comporter de faces de degré 2, et ne peut en outre posséder de faces de degré impair (sinon, en parcourant une telle face, on aurait changé exactement un nombre impair de bits d'un sommet en revenant à lui-même) ; il en résulte  $\text{degré}(\text{face}) \geq 4$ , et donc  $2A \geq \sum_{\text{faces}} 4 = 4F$ , d'où  $F \leq \frac{A}{2} = n 2^{n-2}$ . On applique ensuite

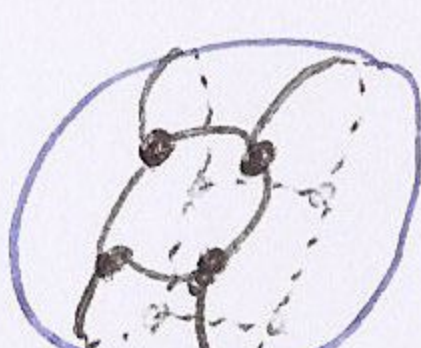
Euler :  $g = 1 - \frac{S - A + F}{2} \geq 1 - \frac{2^n - n 2^{n-2}}{2}$ , d'où  $g \geq 1 + (n-4) 2^{n-3}$ , avec

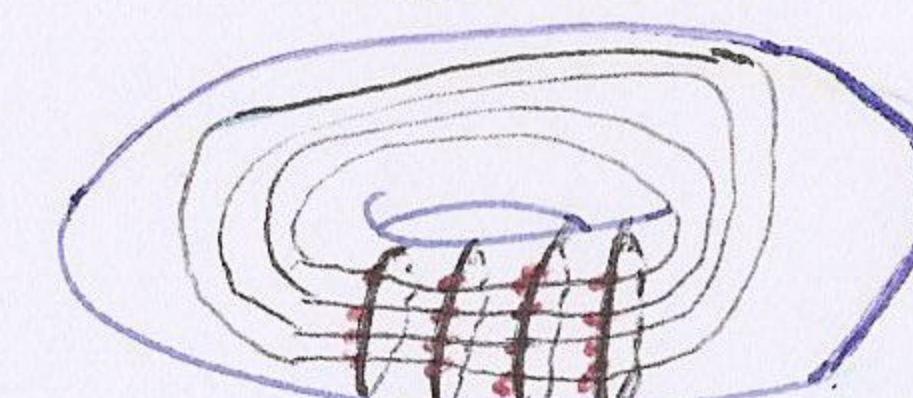
égalité ssi toutes les faces sont carrées. Comment effectivement obtenir cette configuration optimale ? Il faut pour cela imposer un ordre cyclique autour des sommets bien particulier.

c) ordre cyclique

n-cube : pas de   
ni de  (face de degré impair)

n=2 :  $g \geq 1 + \frac{-2}{2} = 0$  

n=3 :  $g \geq 1 + (-1) \cdot 1 = 0$  

n=4 :  $g \geq 1 + 0 = 1$  



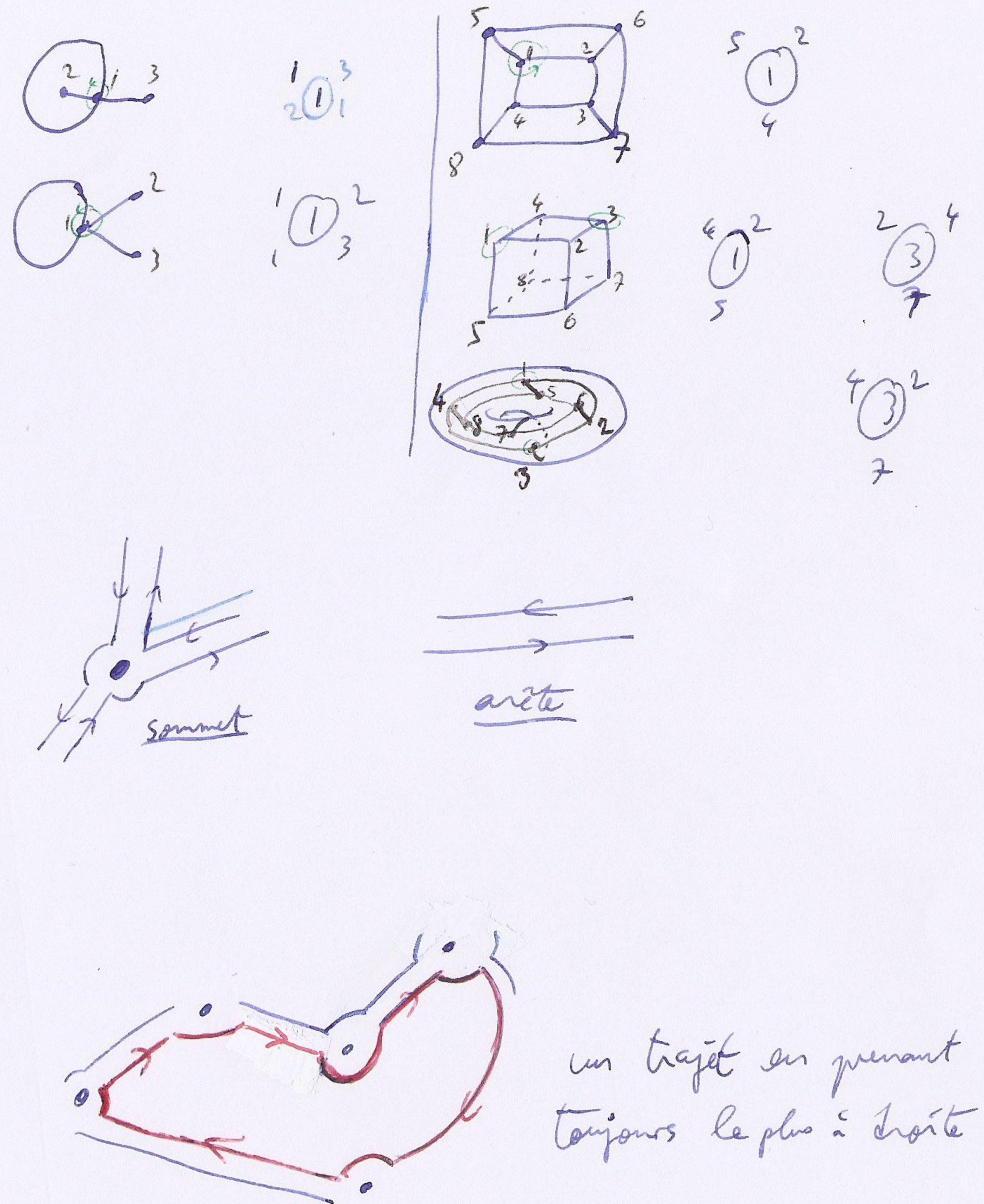
10

Quelle différence y a-t-il entre les cartes d'un même graphe ?  
Plaçons-nous au voisinage d'un sommet : on a des « fins d'arêtes » en provenance d'autres sommets. L'orientabilité des g-tores permet alors d'ordonner ces fins d'arêtes sur un cercle ; on parle d'**ordre cyclique**. Ce dernier est clairement déterminé par la donnée d'une carte. Qu'en est-il de la réciproque ?

Théorème : soit un graphe connexe ; la donnée d'un ordre cyclique détermine un unique plongeon sur un g-tore, i.e. une carte.

Démonstration : représentons les sommets du graphe par des ronds-points orientés à la française, chaque sortie correspondant à une fin d'arête, l'ordre des sorties étant déterminé par l'ordre cyclique imposé, puis représentons les arêtes par des tronçons de route orientés également à la française. On a ainsi virtuellement représenté notre graphe par une mini-ville.

Partons alors d'un sommet, et déplaçons-nous en prenant toujours la première à droite. On obtient un trajet, qui finit nécessairement par boucler car le nombre d'arêtes est fini. Mais la condition de tourner toujours le plus à droite possible impose que le bouclage se fasse au début de trajet (sinon on aurait pu à un moment tourner plus à droite que



un trajet en prenant toujours le plus à droite

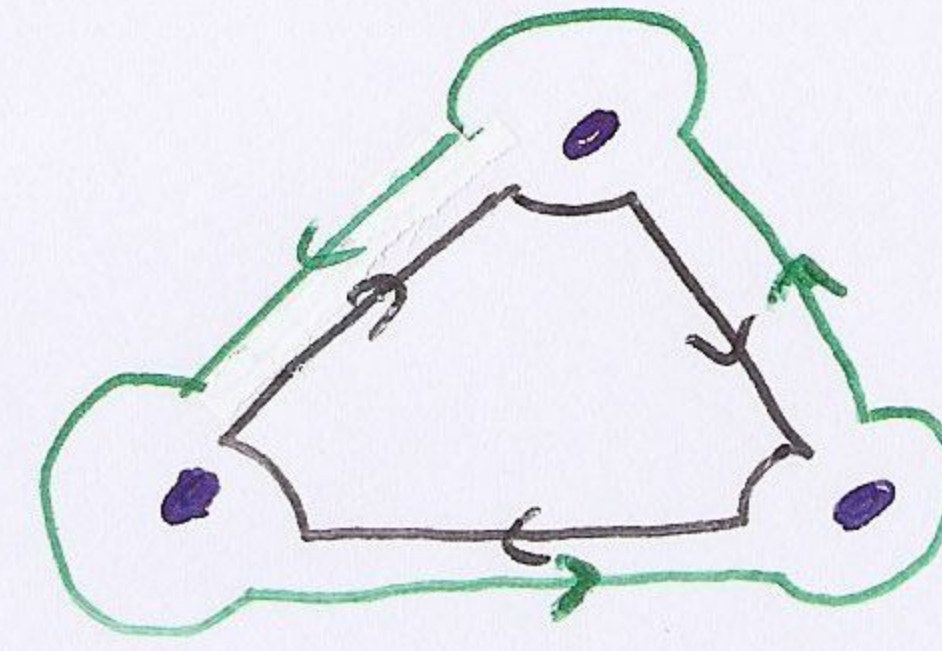


III

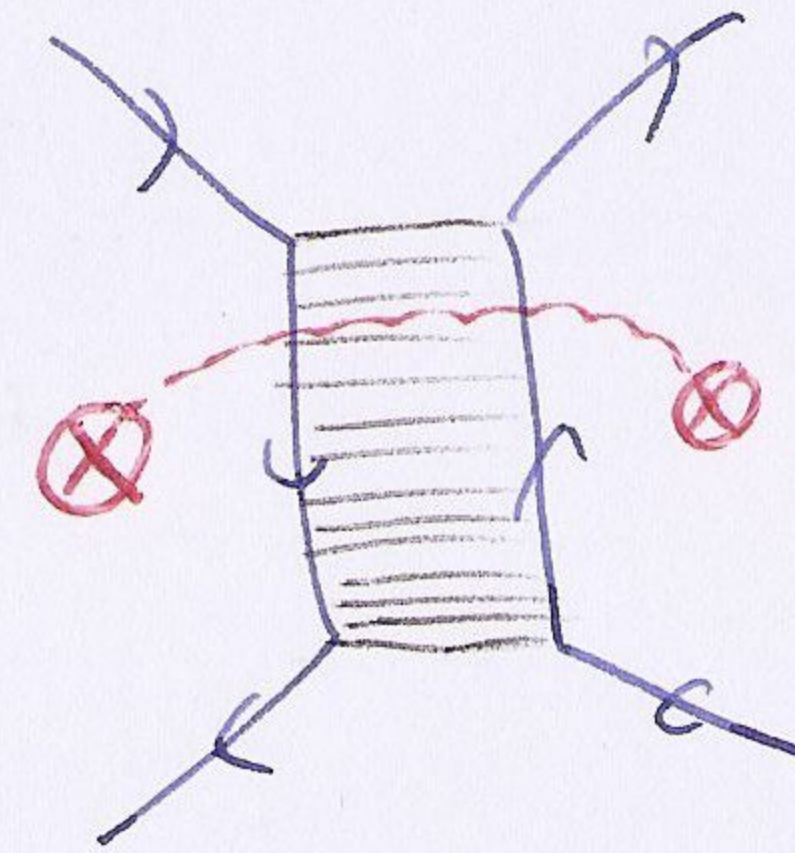
ce que l'on a effectivement fait) : on obtient ainsi un cycle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre (à la française, quoi...).

En recommençant, on obtient un nombre fini de cycles, orientés tous pareil, qui contiennent toutes les arêtes et tous les sommets du graphe considéré (chaque arête étant contenue exactement deux fois dans l'ensemble des cycles), et surtout disjoints.

Remplissons alors mentalement l'intérieur de ces cycles pour obtenir des polygones ; en collant ces polygones selon les arêtes communes (les flèches étant appariées en sens contraire), on obtient une 2-variété sans bord (clair si on est à l'intérieur des polygone, et clair aussi si l'on est sur les arêtes car on peut « circuler » d'un polygone à l'autre via leur arête commune), close (car les polygones, en nombre finis, sont compacts), orientable (car les cycles ont même orientation, et le collage des arêtes en sens contraire permet de conserver cette même orientation quand on passe d'un polygone à l'autre), partitionnée par les polygones : c'est donc un g-tore, sur lequel est dessinée une carte représentant le graphe de départ et ayant l'ordre cyclique imposé par construction *CQFD*.



2 cycles triangulaires



collage des polygones  
orientation  $\otimes$  conservée



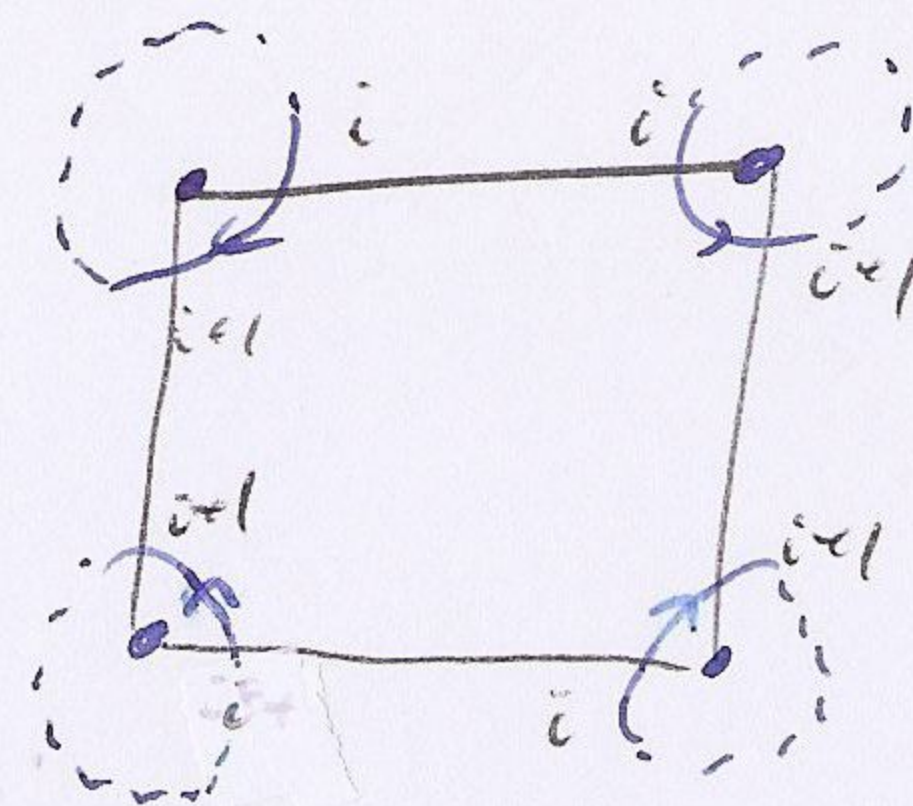
12

On a ainsi montré que l'on peut toujours plonger un graphe connexe sur un g-tore, et corrélativement que tout graphe admet une pseudo-carte le représentant (considérer ses composantes connexes).

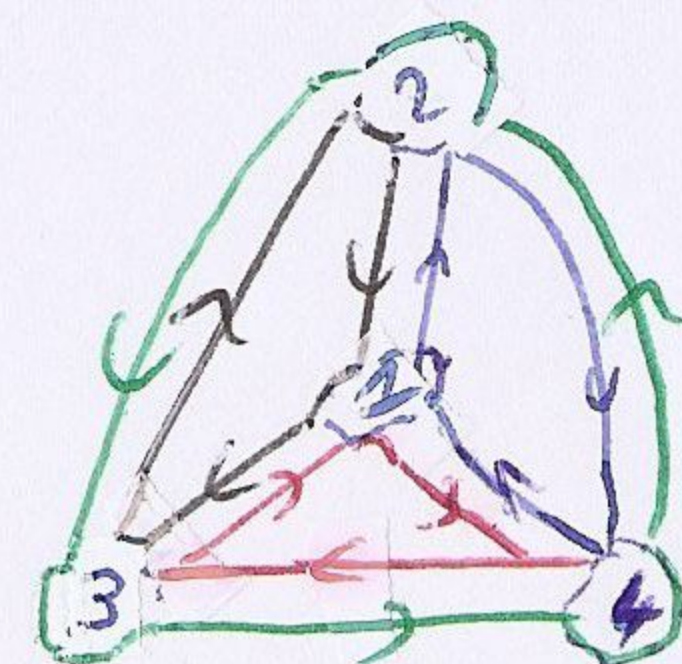
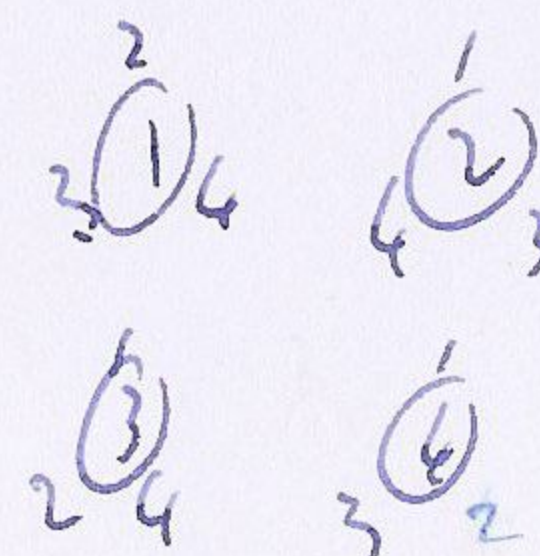
Si l'on reprend l'exemple du n-cube, on rappelle qu'on veut toutes les faces carrées pour obtenir le genre minimal. Pour cela, on impose l'ordre cyclique suivant : si l'on numérote chaque voisin d'un sommet donné par le numéro du bit *non commun*, on ordonne positivement 1, 2, ..., n autour des sommets pairs (i.e. dont le nombre de bits=1 est pair) et négativement n, n-1, ..., 1 autour des sommets impairs (i.e. dont le nombre de bits=1 est impair) ; les faces sont alors carrées comme voulu.

Un premier intérêt de la démonstration ci-dessus est qu'elle est constructive ; elle permet d'obtenir le nombre de faces de la carte issue de l'ordre cyclique, et a fortiori le genre de la carte (par Euler). On construit ainsi les cartes correspondantes à deux ordres cycliques imposés sur  $K_4$ .

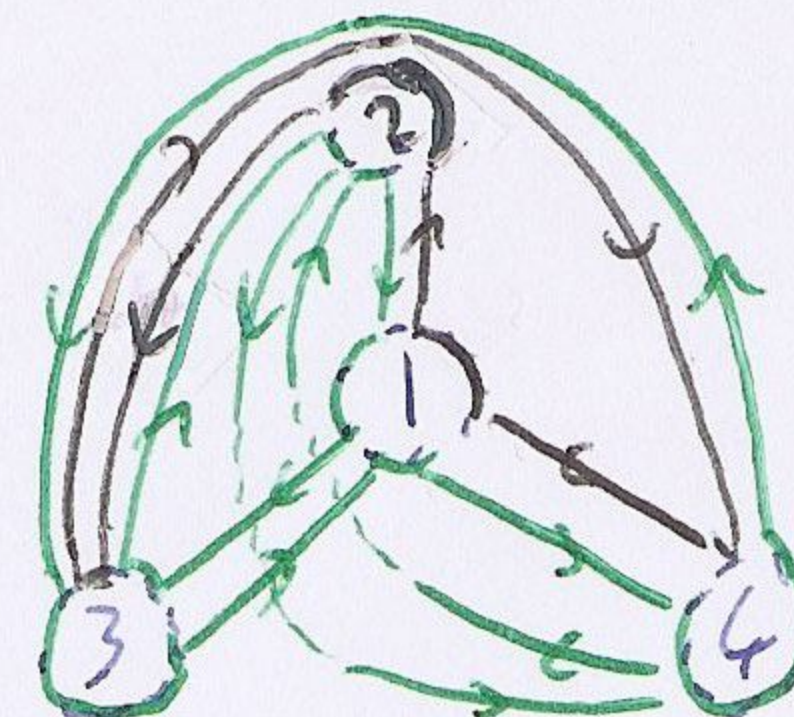
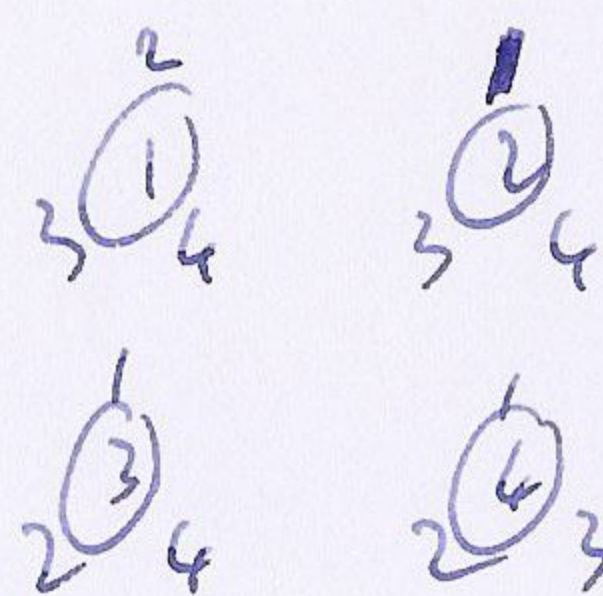
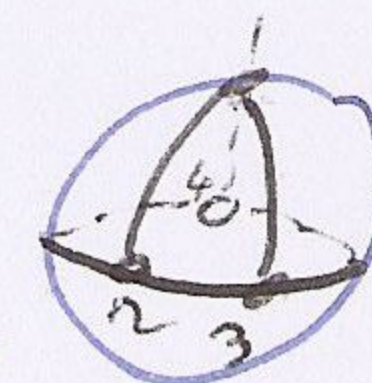
Remarquons également que, puisque le nombre de façons d'ordonner les fins d'arêtes autour d'un sommet S vaut  $(\text{degré}(S)-1)!$  (on numérote les arêtes incidentes, on se fixe une arête pour origine, et on



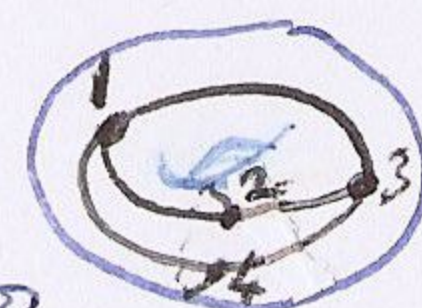
des faces carrées pour le plongement du n-cube à genre minimum.



4 triangles :  
 $g = 1 - \frac{E - A + F}{2}$   
 $= 1 - \frac{6 - 4 + 4}{2}$   
 $= 0 \rightarrow$  sphère



1 octogone :  
1 carré :  
 $g = 1 - \frac{E - A + F}{2}$   
 $= 1 - \frac{6 - 6 + 2}{2}$   
 $= 1 \rightarrow$  tore





13

ordonne ensuite les  $\deg(S) - 1$  arêtes restantes), le nombre total d'ordres cycliques pouvant être imposés, i.e. le nombre total de cartes engendrées

par un même graphe, vaut  $\prod_{S \text{ sommet}} (\deg(S)-1)!$ . On peut avoir ainsi

beaucoup de plongements différents, dont certains défient l'imagination.

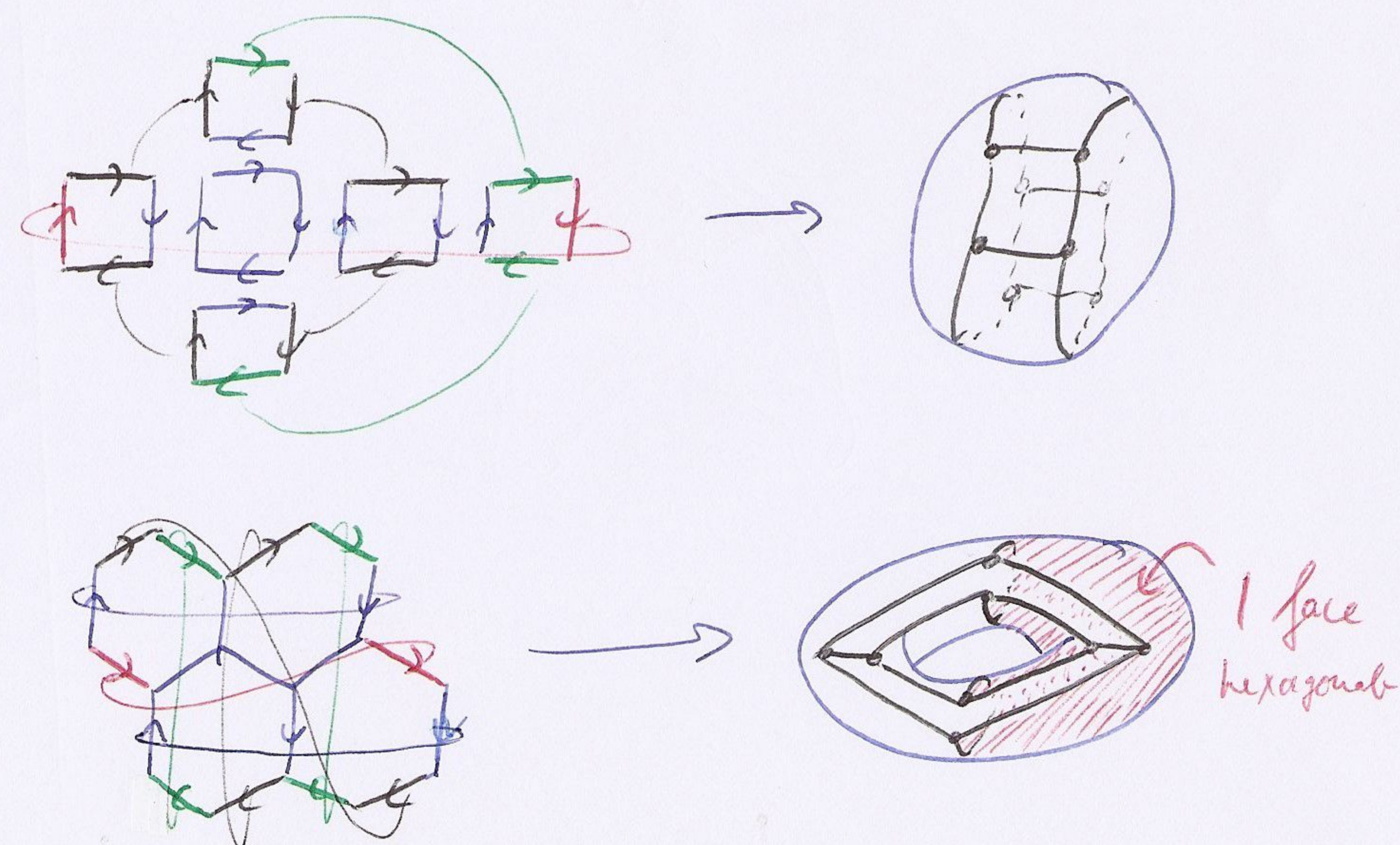
Un second intérêt de la démonstration ci-dessus est qu'elle permet de mettre en évidence la construction de cartes à partir de l'ensemble de ses faces.

#### d) cartes engendrées par des faces

Considérons un ensemble de faces, toutes orientées de la même façon, comportant au total un nombre pair d'arêtes. En collant les côtés 2 à 2 n'importe comment (il faut juste le faire en sens contraire pour avoir l'orientabilité), on obtient un carte.

Par exemple, on a tous étant petit construit le cube à partir de son patron, ensemble de 6 faces carrées où figurent les côtés devant être appariés.

On peut également s'amuser à partir de quatre faces hexagonales : on peut ainsi obtenir un plongement du cube sur le tore.





14

Intéressons-nous alors aux cartes engendrées par une seule face, i.e. un  $2n$ -gone.

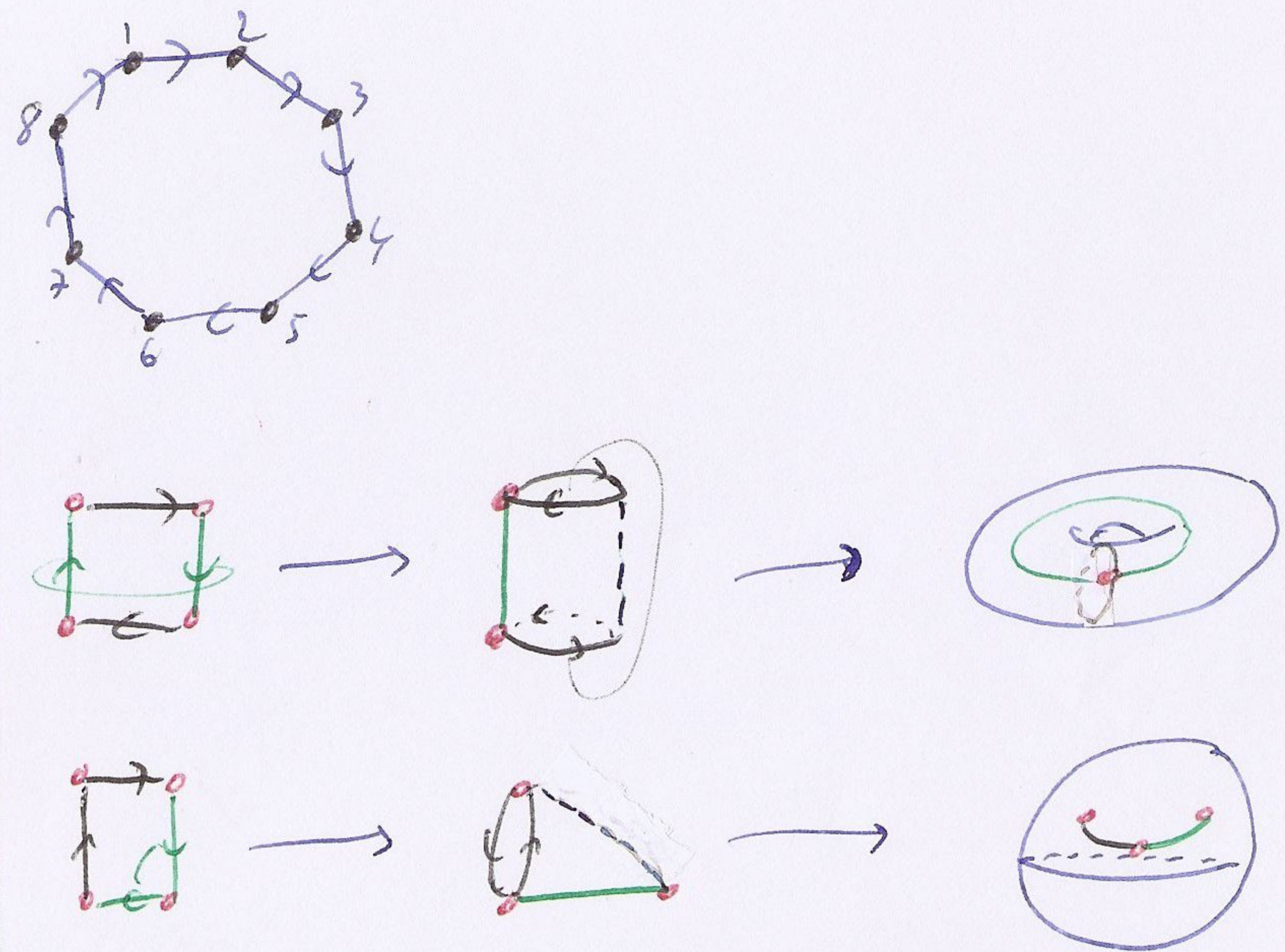
On se pose le problème suivant : étant donné un  $2n$ -gone numéroté, quel est le nombre  $\varepsilon_g(n)$  de façons d'apparier les côtés 2 à 2 de façons à obtenir une carte de genre  $g$  ?

Par exemple, si l'on regarde les engendrés du carré, on peut obtenir tantôt une sphère tantôt un tore.

Une première remarque, déjà signalée, est qu'il faut nécessairement coller les côtés en sens contraire, sinon on obtient un Moëbius et c'en est fait de l'orientabilité.

Un second point à remarquer est que puisque Euler nous donne  $S - A + F = 2 - 2g$ , avec  $F = 1$  par construction et  $A = \frac{2n}{2} = n$ , on a  $1 \leq S = n + 1 - 2g$ , d'où  $g \leq \frac{n}{2}$  ; il en résulte  $\boxed{\varepsilon_g(n) = 0}$  pour  $g > n/2$ .

Enfin, en remarquant que le nombre total de façons d'apparier 2 à 2 les côtés du  $2n$ -gone est  $(2n-1) * (2n-3) * \dots * 3 * 1$  (on a  $2n-1$  choix pour le côté à appairer avec le côté  $[1, 2]$ , puis  $2n-3$  choix pour le côté à





apparié avec le côté non apparié venant juste après [1, 2], etc...), ce que

nous noterons  $(2n-1)!!$ , on a la formule

$$\sum_{g=0}^{n/2} \varepsilon_g(n) = (2n-1)!!$$

Ce problème est joli, difficile, et important, il faut par conséquent se donner les moyens de le résoudre.

↳ l'octogone engendrant le 2-tore

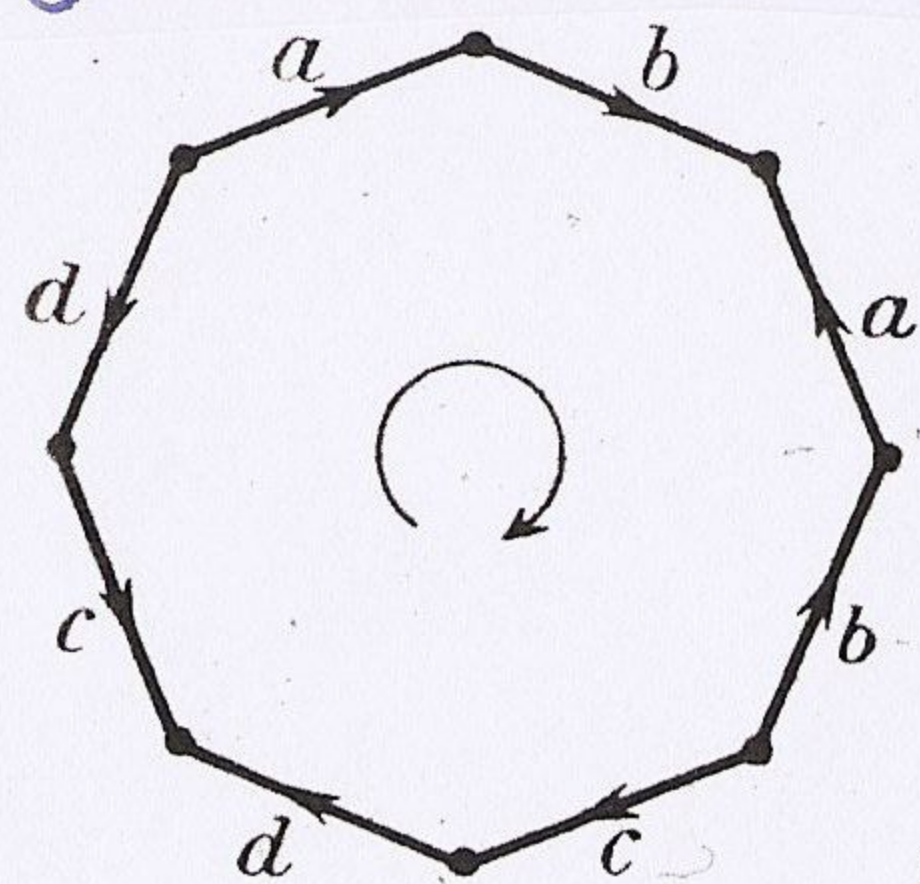


Fig. 31.

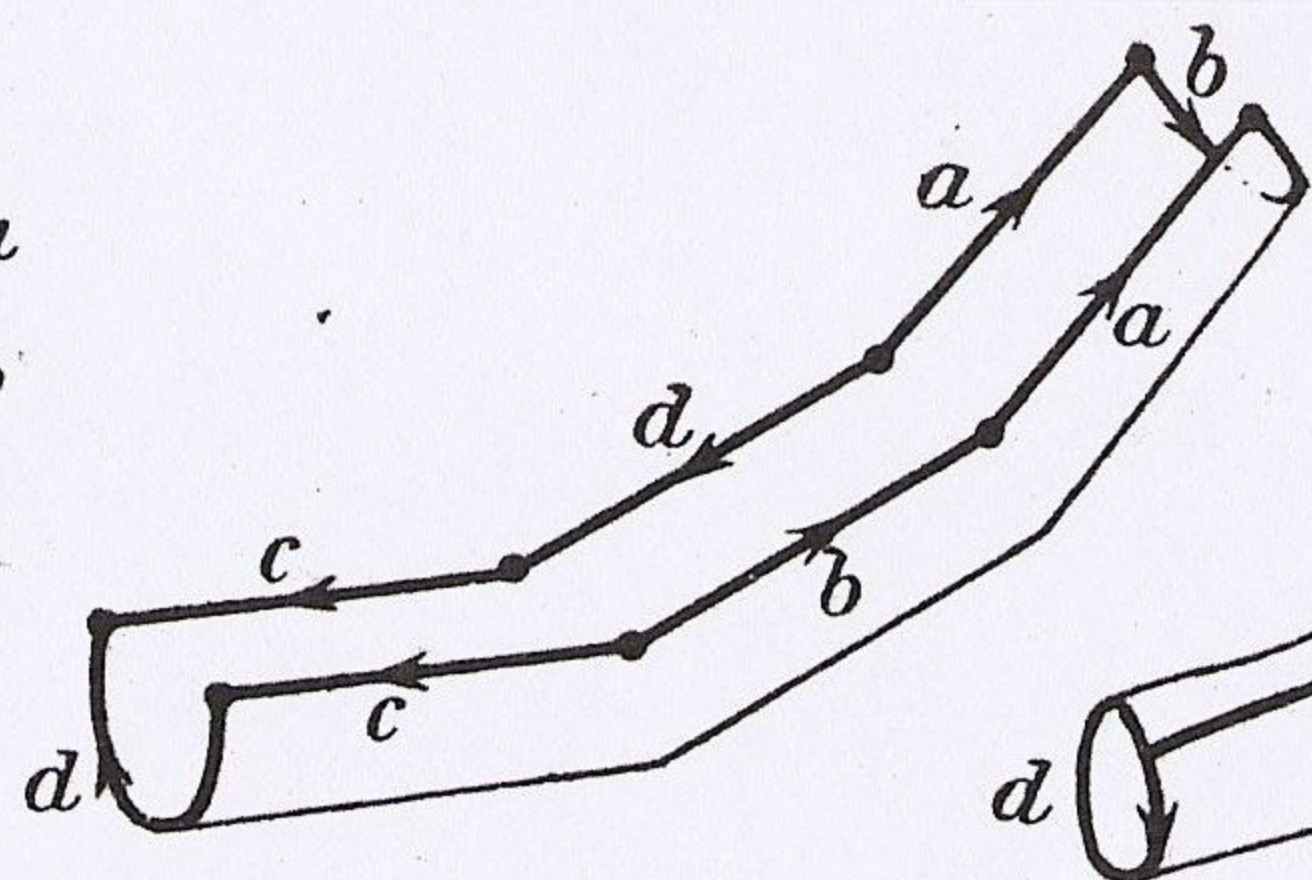


Fig. 32.

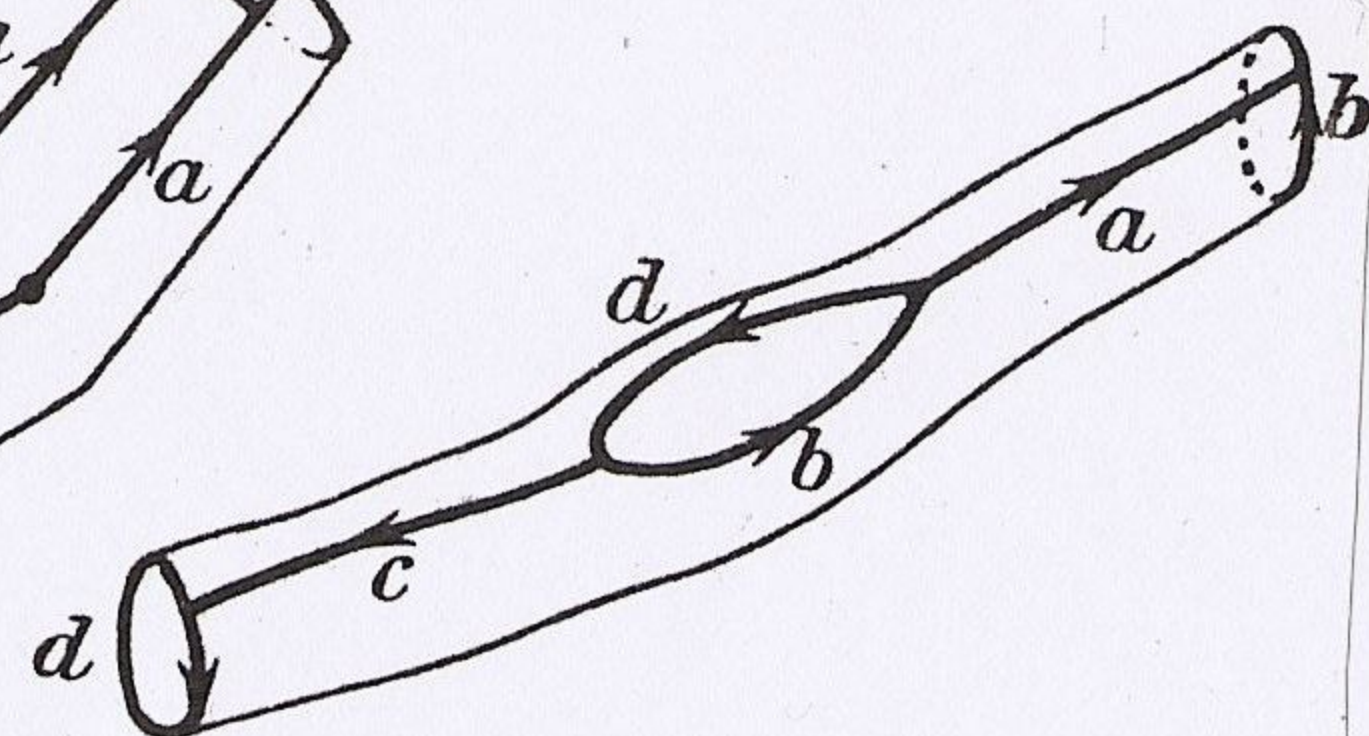


Fig. 33.

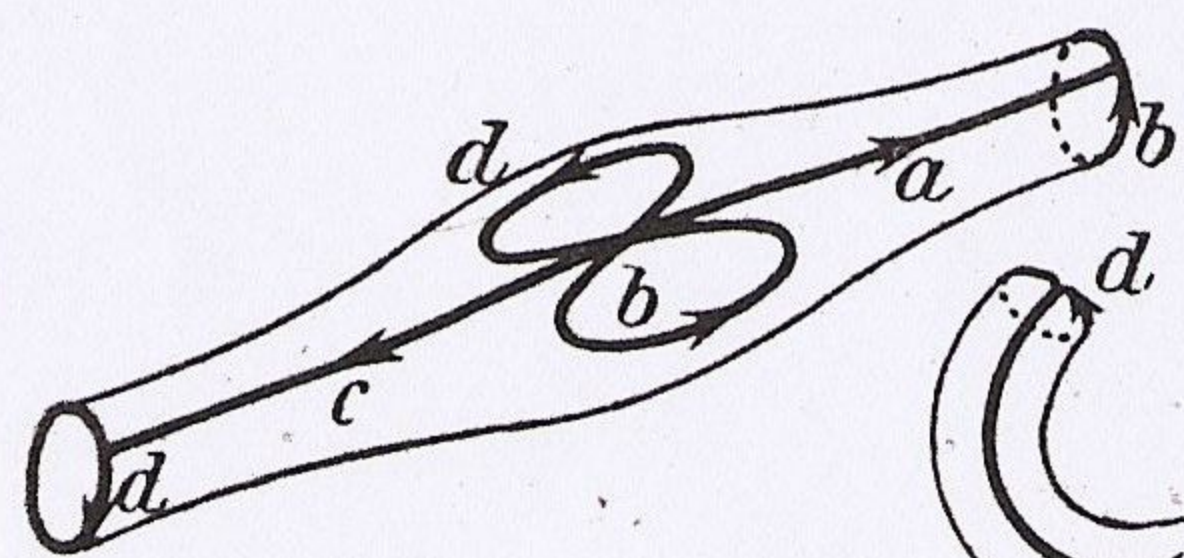


Fig. 34.

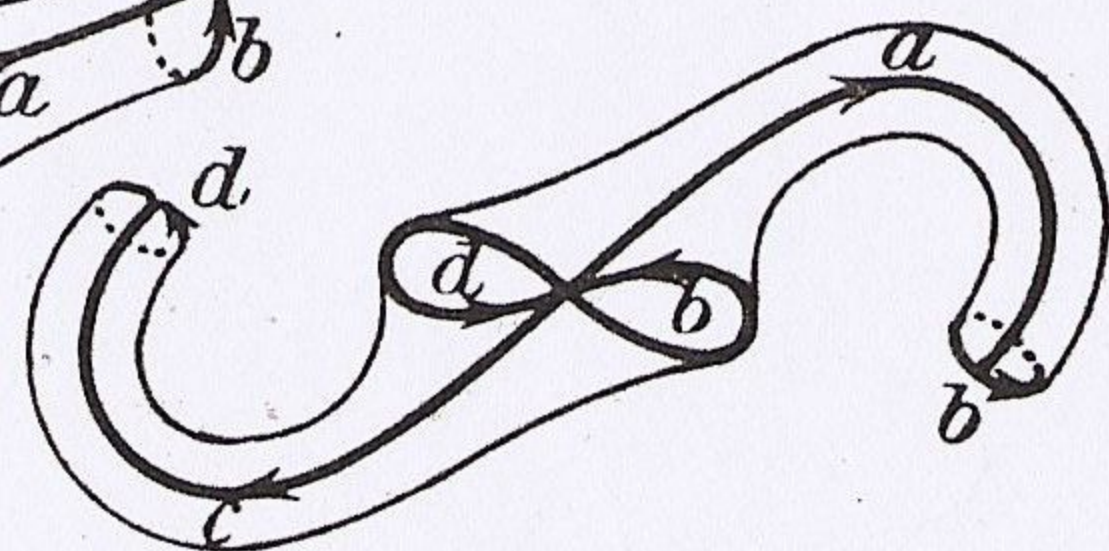


Fig. 35.

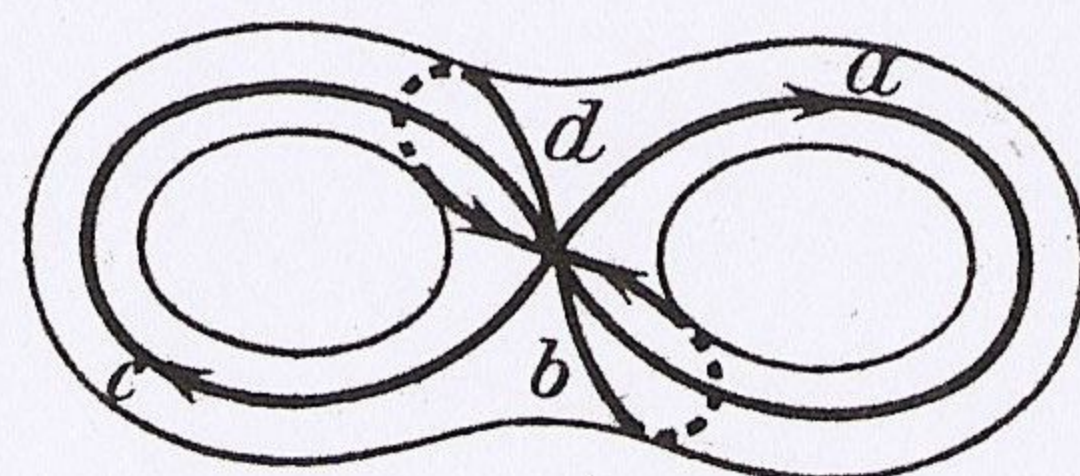
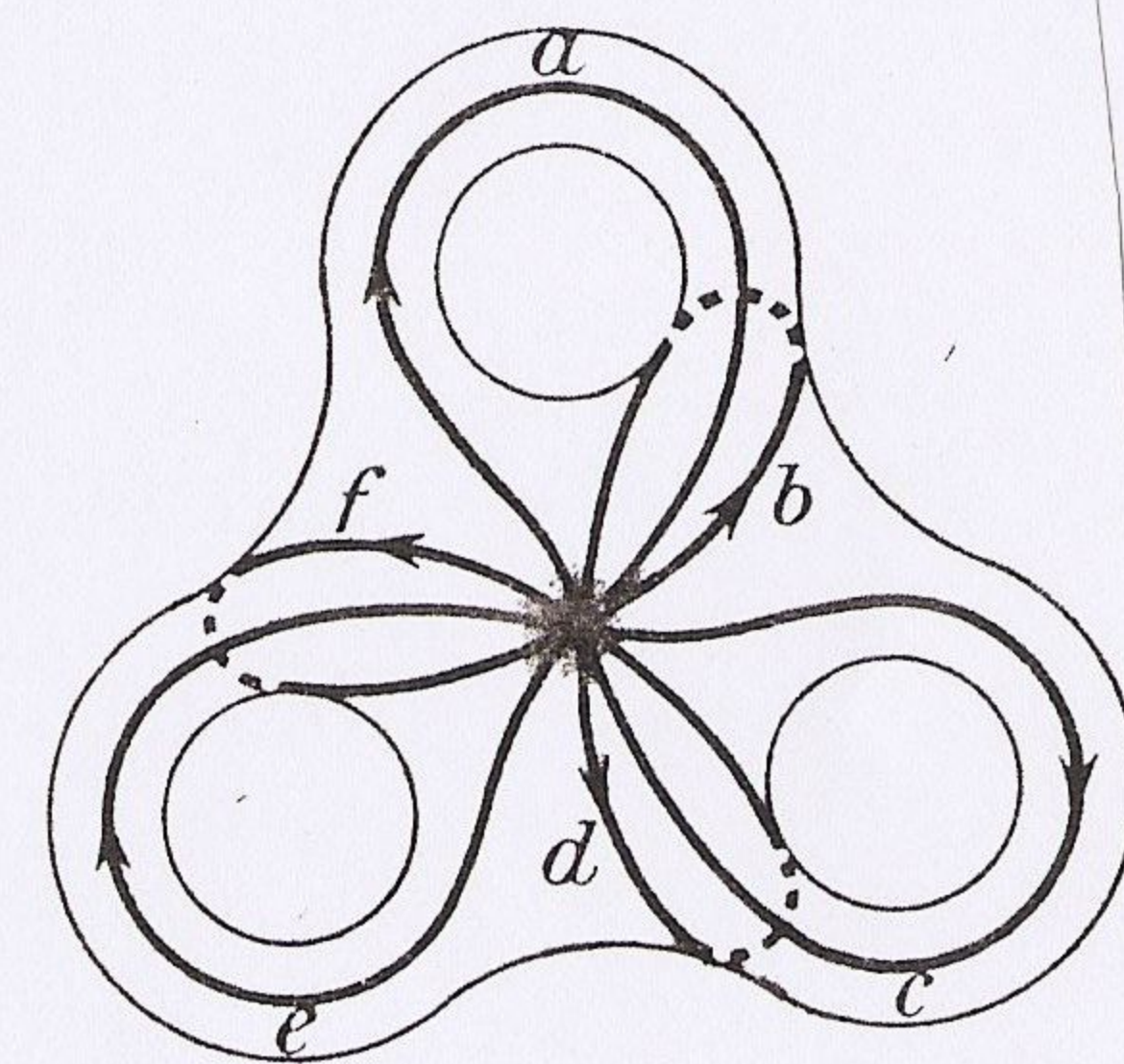
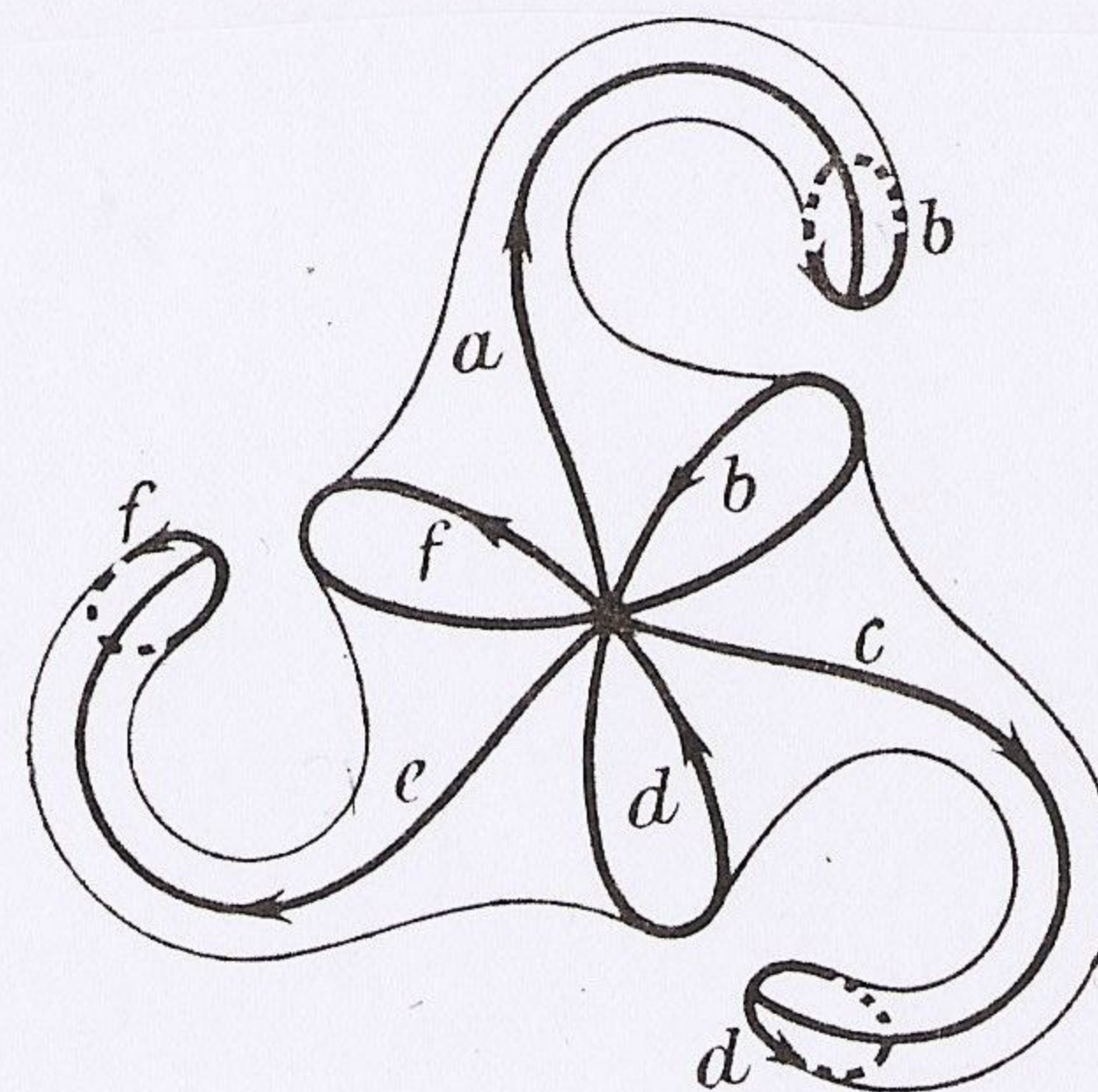
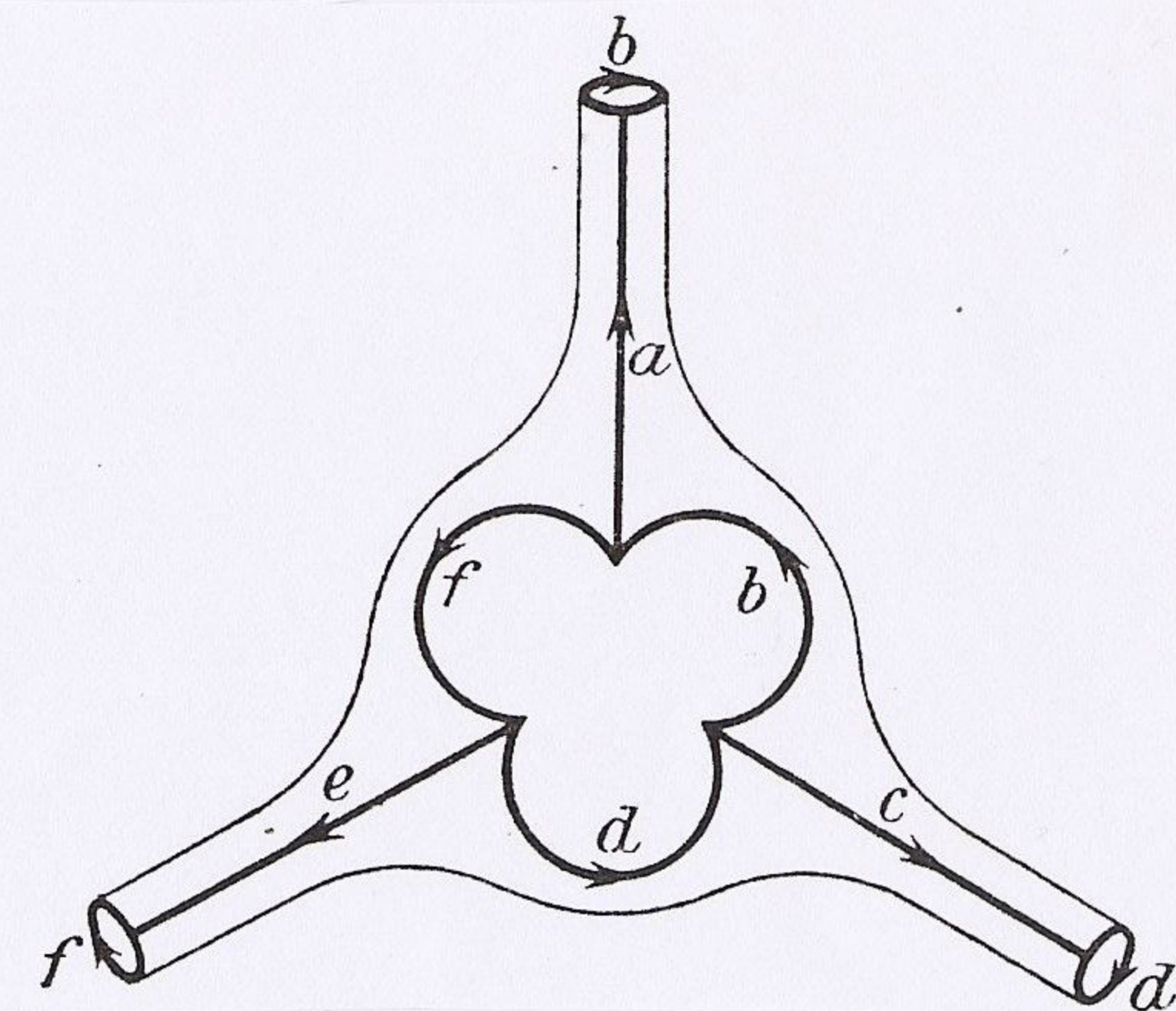
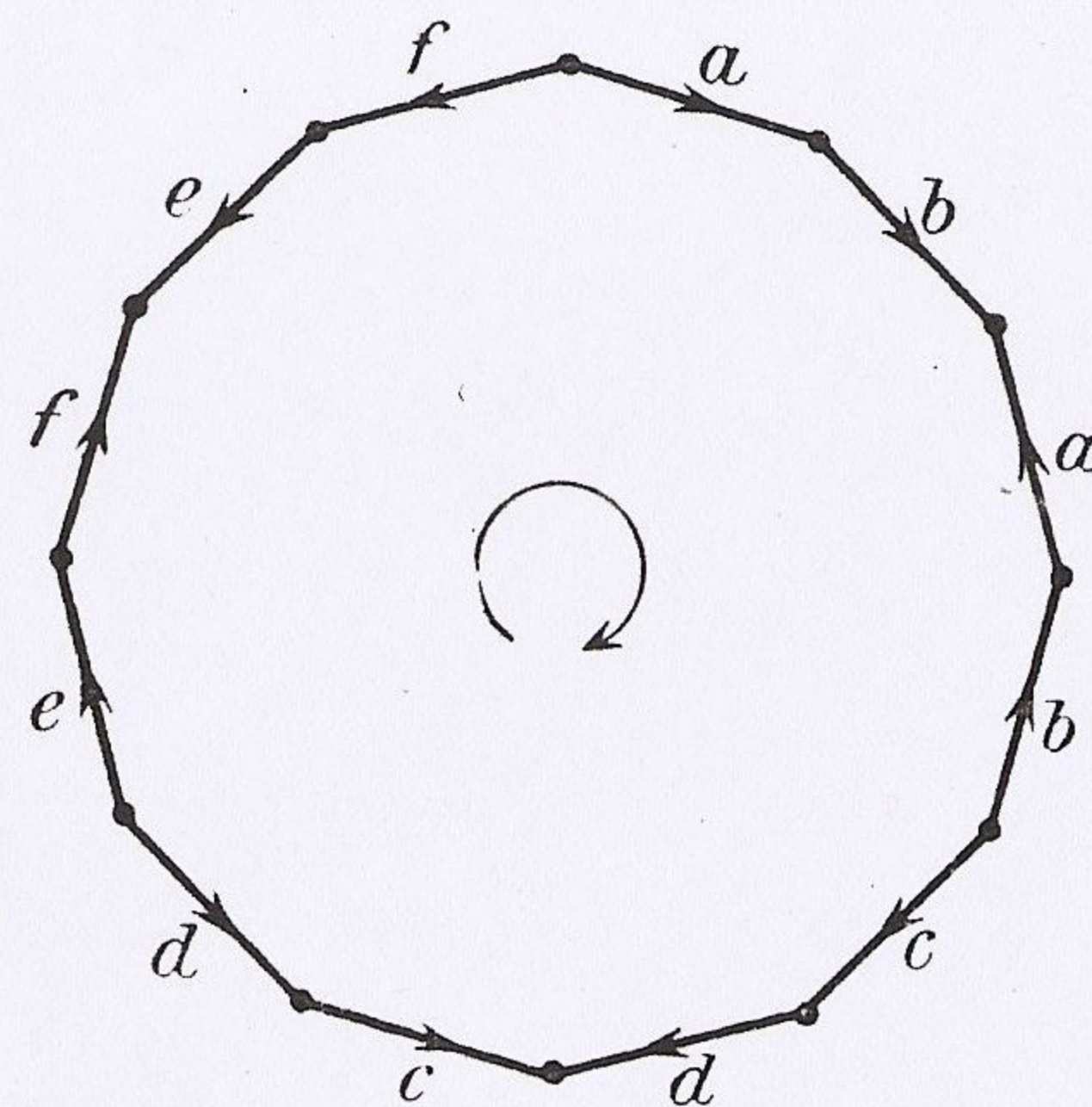


Fig. 36.

↳ le dodécagone engendrant le 3-tore



(figures extraites de [7])



## III/ mesures gaussiennes – intégrales de polynômes

### ① quelques notions sur les mesures

La théorie de la mesure dépassant largement notre cadre d'étude, nous nous contenterons de présenter dans ce paragraphe quelques résultats sur les mesures en général, faciles à énoncer, sans démonstrations, qui permettront de saisir au mieux les notions développées par la suite sans rentrer dans le formalisme de la théorie.

#### a) définition - exemples

On appelle **mesure** sur  $X$  toute application  $\mu$  d'un ensemble  $\mathcal{M}(\mu)$  de parties de  $X$  (qui seront dites **mesurables** pour  $\mu$ ) stable par union dénombrable et par passage au complémentaire (on parle de **tribu**) dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , telle que pour toute famille au plus dénombrable  $(A_i)$  de parties de  $X$  2 à 2 disjointes,  $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$ .

Par exemple, la **mesure de Lebesgue** sur  $\mathbb{R}$ , celle que nous manipulons la plupart du temps, vérifie  $\mu([a, b]) = |b-a|$ ; elle « mesure » un intervalle par sa longueur. Elle vérifie en outre  $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ , puisque  $\mathbb{Q} = \cup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$  est réunion dénombrable de parties 2 à 2 disjointes de mesure nulle.

Plus généralement, on peut parler de **mesure produit** de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , qui vérifie à l'instar de la dimension 1 :  $\mu(\prod [a_i, b_i]) = \prod |b_i - a_i|$ ; elle « mesure » un pavé par son volume.

On se placera désormais sur  $X = \mathbb{R}^N$  où  $N$  entier  $\geq 1$ , muni du produit scalaire canonique  $[x | y] = \sum x_i y_i$ .

#### b) intégrale



17

Etant donnée une fonction de  $X$  (muni d'une mesure  $\mu$ ) dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant certaines conditions, la théorie de la mesure permet de définir l'**intégrale** de  $f$  selon  $\mu$  :

$\int_X f d\mu$  (on dit alors que  $f$  est **intégrable** selon  $\mu$ ). Pour certaines fonctions **étagées** (i.e. qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, analogue des fonctions en escalier

sur  $\mathbb{R}$ ), on posera  $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$  si  $\begin{cases} X \text{ partitionné par les } A_i \\ \forall i, f(A_i) = \{a_i\} \end{cases}$ ; remarquer

l'analogie avec l'intégrale de Riemann dans le cas de la mesure de Lebesgue.

On notera souvent par abus  $\int_X f(x) d\mu(x)$  ou  $\int_{x \in X} f(x) d\mu(x)$  pour  $\int_X f d\mu$ , le  $x$  dans l'intégrale rappelant juste le domaine sur lequel on intègre, et ne représentant nullement l'argument d'une pseudo-fonction  $d\mu$ .

Une propriété remarquable de l'intégrale selon une mesure  $\mu$  est que pour toute partie  $A$  de  $X$ ,  $\mu(A) = \int_X \chi_A d\mu$  (remarquer que  $\chi_A$  est étagée). La donnée d'une intégrale des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  permettra donc, sous certaines conditions, de *définir* une mesure sur  $X$ .

### c) mesure image

Etant donnés  $X$  et  $Y$  deux ensembles et  $\mu$  une mesure sur  $X$ , toute application  $f$  de  $X$  dans  $Y$  induit une mesure  $\nu$  sur  $Y$ , définie par  $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$  pour tout  $B$  dans  $\mathcal{M}(Y)$ ; on parle de la **mesure image** induite par  $f$  sur  $Y$ .

Le calcul des intégrales par rapport à  $\nu$  est ramené à celui des intégrales par rapport à  $\mu$ , par la formule :  $\int_Y \varphi(y) d\nu(y) = \int_X \varphi(f(x)) d\mu(x)$ . On pourra vérifier que

pour les fonctions étagées intégrables, on a bien  $\int_Y \varphi d\nu = \sum_i \varphi(B_i) \nu(B_i) =$

$\sum_i \varphi(f^{-1}(B_i)) \mu(f^{-1}(B_i)) = \int_X \varphi f d\mu$  (avec les abus de notation entendus).

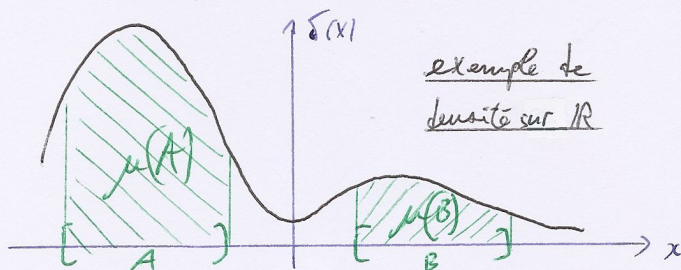
### d) densité



18

On dira qu'une mesure  $\mu$  sur  $X$  admet une **densité** si les intégrales  $\int_X f d\mu$  peuvent s'écrire sous la forme  $\int_X f(x) \delta(x) d\mu_L(x) = \int_X f(x) \delta(x) dx$  où  $\delta$  est une fonction  $C^0(X, \mathbb{R}^+)$  (c'est la **densité** proprement dite de la mesure) et  $d\mu_L$  mesure produit de Lebesgue sur  $X$ , le  $dx$  étant juste une notation pour  $d\mu_L(x)$  (dans le cas unidimensionnel on retrouve le  $dx$  bien connu). On intégrera alors classiquement en séparant les variables (Fubini), sous la condition que la fonction à intégrer soit intégrable en chacune de ses variables.

La notation  $d\mu(x) = \delta(x) dx$  peut alors s'interpréter en cela que la densité  $\delta$  *pondère* le  $dx$  de Lebesgue. On voit alors que plus les éléments d'un ensemble sont « denses » (i.e. leur image par  $\delta$  est grande), plus la mesure de cet ensemble va être élevée. Il est agréable de se représenter cela en traçant le graphe de la densité :

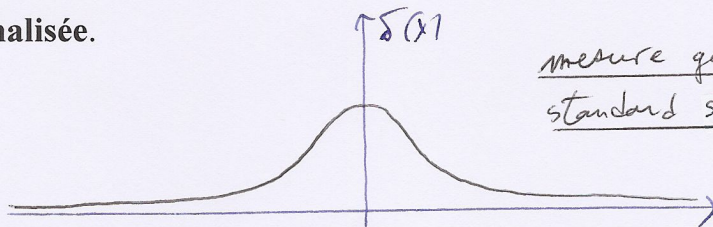


*exemple de densité sur  $\mathbb{R}$*

*on voit que A est "plus dense" que B et que  $\mu(A) > \mu(B)$*

Prenons un exemple tout simple : la mesure produit de Lebesgue sur  $X$ . Elle possède clairement une densité constante  $\equiv 1$ .

Autre exemple, la mesure gaussienne standard sur  $\mathbb{R}$ , qui possède par définition la densité  $\delta(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ . Elle vérifie en particulier  $\int_{\mathbb{R}} 1 d\mu = 1$  ; on dit que la mesure est **normalisée**.



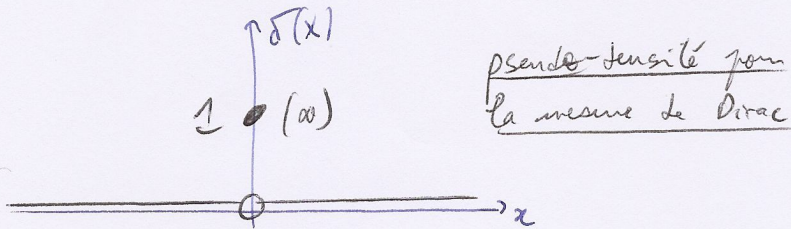
*mesure gaussienne standard sur  $\mathbb{R}$*

En revanche, la mesure de **Dirac** sur  $\mathbb{R}$  en 0, définie par  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = f(0)$ , n'a pas de densité. Mais en se plaçant sur le sev  $\{0\}$  de  $\mathbb{R}$ , on peut retrouver une densité

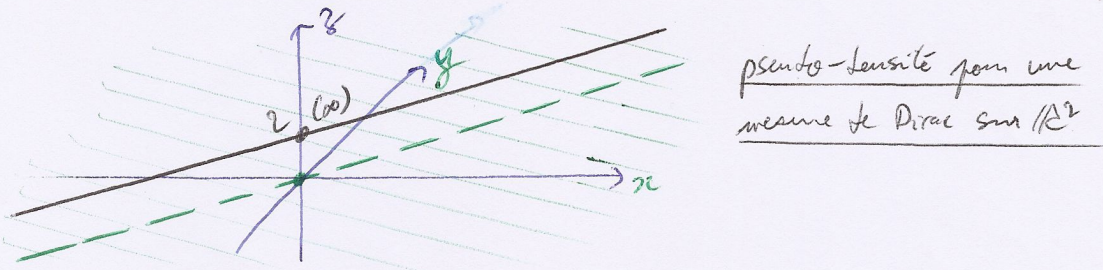


13

(constante  $\equiv 1$ ), à condition de définir l'intégrale sur  $\mathbb{R}^0$  (identifié au singleton  $\{0\}$ ) par  $\int_{\{0\}} d\mu = 1$ . La mesure de Dirac induit donc une mesure à densité sur  $\{0\}$ ; on dit que la mesure est **concentrée** sur le sev  $\{0\}$ . On peut alors tracer une pseudo-densité pour  $\mu$ , qui vaut 0 partout sauf sur le sev où  $\mu$  est concentrée; sur ce dernier, la pseudo-densité vaut la vraie densité de la mesure induite, pondérée par un facteur  $\infty$ :



Prenons une autre mesure de Dirac, définie cette fois sur  $\mathbb{R}^2$ , par  $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} 2 f(x,x) dx$ . Elle ne possède pas non plus de densité, et il est facile de voir que cette mesure est concentrée sur le sev  $\{(x,x) / x \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , où la mesure induite possède une densité constante  $\equiv 2$ :



On admettra par la suite que la donnée d'une densité sur un sev E de X permet de définir une mesure sur X, qui sera alors concentrée sur E.

e) moyenne

On utilisera abondamment la notation  $\langle f \rangle$  pour  $\int_X f d\mu$ , empruntée à la physique, à interpréter comme la **moyenne** de f selon la mesure  $\mu$ . On précisera lorsqu'il y aura ambiguïté sur la mesure en question  $\langle f \rangle_\mu$ .

Ainsi, la propriété de normalisation d'une mesure s'écrit simplement  $\langle 1 \rangle = 1$ .



20

f) fonction caractéristique

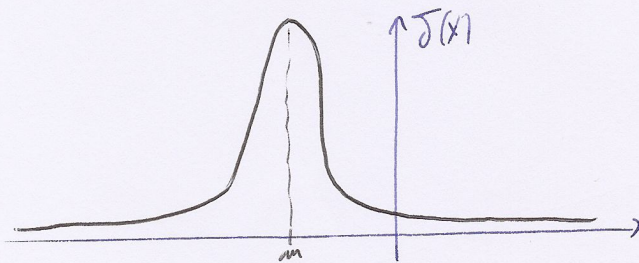
On définit (lorsqu'elle existe) la **fonction caractéristique** ou **transformée de Fourier** de la mesure  $\mu$  par  $\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{X}} e^{i[t|x]} d\mu(x)$ . Une propriété fondamentale est qu'une mesure est entièrement déterminée par la donnée de sa fonction caractéristique.

Par exemple, la fonction caractéristique de la mesure gaussienne standard vaut

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \frac{1}{2}x^2} dx = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \text{ suite à un calcul simple effectué en annexe.}$$

On peut généraliser la mesure gaussienne standard sur  $\mathbb{R}$ , en introduisant un facteur pondérant  $\sigma > 0$  ainsi qu'une translation de  $m$ ; on obtient ainsi une mesure de

densité  $\delta(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ . Remarque que quand  $\sigma$  tend vers 0, on retrouve une pseudo-densité type Dirac centrée en  $m$ :



*densité de la mesure  
gaussienne généralisée*

On peut alors calculer la fonction caractéristique de cette mesure gaussienne

généralisée, qui vaut, après un calcul analogue,  $\varphi(t) = e^{im t - \frac{1}{2}(\sigma t)^2}$ , que nous écrivons

sous la forme plus générale suivante :  $\varphi(t) = e^{i[m|t] - \frac{1}{2}[(\sigma) t|t]}$ . Cette écriture sous

forme matricielle permet d'étendre la notion de mesure gaussienne à  $\mathbb{R}^N$ .

② mesures gaussiennes

a) définition



21

Une mesure  $\mu$  sur  $X = \mathbb{R}^N$  sera dite **gaussienne** si sa fonction caractéristique est

de la forme  $\varphi_\mu(t) = \int_X e^{i[t|x]} d\mu(x) = e^{i[m|t] - \frac{1}{2}[Ct|t]}$  où  $C$  est une matrice  $N \times N$

symétrique réelle à valeurs propres toutes  $\geq 0$  (**matrice de covariance**) et  $m$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$  (**vecteur moyenne**). On prendra par la suite  $m = 0$  pour simplifier, d'où

l'expression arrangée de la fonction caractéristique :  $\varphi_\mu(t) = e^{-\frac{1}{2}[Ct|t]}$ .

Une première chose à remarquer est que  $C$  est diagonalisable en base orthonormée, i.e.  $C = P D P^*$  où  $D$  diagonale à coefficients  $\geq 0$  et  $P$  orthogonale ( $P^* = P^{-1}$ ). On en déduit  $\varphi_\mu(t)$

$$= e^{-\frac{1}{2}[(P D P^*)t|t]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}[D(P^*t)|P^*t]} \quad \text{car } P \text{ orthogonale}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(d_1(P^*t)_1^2 + \dots + d_N(P^*t)_N^2)}$$

$$= \varphi_\mu(t) = e^{-\frac{1}{2}(d_1 t_1^2 + \dots + d_N t_N^2)} \quad \text{où } t_i \text{ désigne la } i\text{-ème coordonnée de } t \text{ dans la base de}$$

diagonalisation décrite par  $P$ . On remarque que seules comptent les coordonnées relatives aux valeurs propres non nulles de  $C$ , et on sent par conséquent que la mesure va être concentrée sur un espace relatif à ces valeurs propres, par exemple l'engendré  $E$  des vecteurs propres de  $C$  qui ne sont pas dans son noyau.

Dans le cas où toutes les valeurs de  $C$  sont  $> 0$ , i.e.  $C$  inversible, on peut vérifier

(cf annexe) que la mesure a la densité  $d\mu(x) = \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2}[Bx|x]} dx$  où  $B = C^{-1} =$

$P D^{-1} P^*$ . Dans le cas contraire, en définissant une mesure  $\mu'$  sur  $E$  ayant la densité

$$d\mu'(x) = \sqrt{\frac{\det B'}{(2\pi)^{\dim(E)}}} e^{-\frac{1}{2}[B'x|x]} dx \quad \text{où } B' = (C|_E)^{-1} \text{ (ayant pour spectre les inverses des}$$

valeurs propres non nulles de  $C$ ), on retrouve la même fonction caractéristique :  $\varphi_\mu(t)$



22

$$= \int_E \sqrt{\frac{\det B'}{(2\pi)^{\dim(E)}}} e^{-\frac{1}{2} [B' x | x]} e^{i [t | x]} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\dim(E)}} \sqrt{\frac{\prod d_j^{-1}}{(2\pi)^{\dim(E)}}} e^{-\frac{1}{2} \sum d_j^{-1} x_j'^2} e^{i \sum t_j x_j} \prod dx_j' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où les } x_j' \text{ sont les coordonnées} \\ \text{de } x \text{ dans la base orthonormée} \\ \text{de } E \text{ induite par } P \end{array} \right.$$

$$= \prod \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{d_j^{-1}}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} d_j^{-1} x_j'^2} e^{i t_j x_j'} dx_j'$$

$$= \prod e^{-\frac{1}{2} d_i t_i'^2} \quad \text{fonction caractéristique de la mesure gaussienne sur } \mathbb{R} \text{ généralisée}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} (d_1 t_1'^2 + \dots + d_N t_N'^2)}$$

=  $\underline{\varphi_{\mu'}(t)} = \underline{\varphi_{\mu}(t)}$ , donc  $\mu$  se confond avec  $\mu'$ , et on a ainsi montré que  $\mu$  est effectivement concentrée sur  $E$ .

Plus généralement, en considérant le vecteur moyenne, on a la densité

$$\boxed{d\mu(x) = \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2} [B(x-m) | (x-m)]} dx} ; \text{ on voit donc que celui-ci n'a qu'un effet de}$$

translation, c'est pourquoi on le prendra nul. Remarquer que ces formules sont cohérentes avec le cas unidimensionnel, en posant  $C = (\sigma^2)$ .

### b) propriétés

Nous nous intéresserons bientôt à l'intégration de polynômes selon une mesure gaussienne ; il s'agit déjà de savoir calculer les moyennes de polynômes de petits degrés.

Le cas des polynômes de degré 1 est facile, car les moyennes  $\langle x_i \rangle$  sont nulles :

$\boxed{\langle x_i \rangle = 0}$ . Plus généralement, on a (cf annexe)  $\boxed{\langle x_i \rangle = m_i}$ , d'où l'appellation du vecteur moyenne.

Quant aux moyennes quadratiques  $\langle x_i x_j \rangle$ , leur calcul fait intervenir la matrice de covariance. En effet, on a la proposition (cf annexe)  $\boxed{\langle x_i x_j \rangle = c_{i,j}}$  : les moyennes quadratiques se lisent donc directement dans la matrice de covariance !



23

Il convient à présent d'évaluer des polynômes de degrés quelconques. Le cas des monômes de degré impair ne pose pas de problèmes, puisqu'une des puissances est nécessairement impaire et donc l'intégrale vaut 0 (cf annexe). La formule de Wick développée dans le paragraphe suivant permet de ramener le calcul des monômes pairs aux moyennes quadratiques.

### ③ intégration de polynômes - formule de Wick

Il est commun en physique quantique d'avoir à intégrer des polynômes selon une mesure gaussienne. Nous avons déjà vu le cas des polynômes de degré  $\leq 2$ , et la formule de Wick permet de s'y ramener. Nous aurons besoin pour la démontrer de deux petits résultats.

a) lemme 1

$$\text{Si } \begin{cases} \mu \text{ mesure gaussienne sur } \mathbb{R}^p \\ A \text{ linéaire de } \mathbb{R}^p \text{ dans } \mathbb{R}^q \end{cases}, \text{ alors } A \text{ induit une mesure gaussienne } \nu \text{ sur } \mathbb{R}^q.$$

Démonstration : considérons la mesure image de  $\mu$  induite par  $A$  sur  $\mathbb{R}^q$ , notée  $\nu$ . Soit  $C$  la matrice de covariance de la mesure  $\mu$ . On regarde alors la forme de la fonction caractéristique :  $\varphi_\nu(s)$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^q} e^{i[s|y]} d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} e^{i[s|Ax]} d\mu(x) \quad \text{par propriété de la mesure image} \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} e^{i[A^*s|x]} d\mu(x) \\ &= \varphi_\mu(A^*s) \\ &= e^{-\frac{1}{2}[CA^*s|A^*s]} \\ &= e^{-\frac{1}{2}[ACA^*s|s]} \end{aligned}$$



24

D'où la matrice de covariance  $C_v = A C A^*$ , qui est bien de taille  $q \times q$  réelle symétrique. Quant à la positivité des valeurs propres, on remarque si  $\lambda \in \text{Sp } C_v$ , alors pour tout vecteur propre associé  $x : \lambda \|x\|^2$

$$\begin{aligned}
 &= [C_v x | x] \\
 &= [(A C A^*) x | x] \\
 &= [C A^* x | A^* x] \\
 &= [(P^* D P) A^* x | A^* x] \\
 &= [D (P A^* x) | (P A^* x)] \\
 &= \sum d_i [P A^* x]_i^2 \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

b) lemme 2

Nous allons exprimer les coefficients de Taylor d'une fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  analytique en 0 en fonction de ceux de son logarithme. Nous utiliserons des notations

$$\text{multi-indices : } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N \\ \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N! \\ t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_N^{\alpha_N} \\ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_N^{\alpha_N}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{et soit } f \text{ de } \mathbb{R}^N \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \text{analytique en } 0, \\ \text{vérifiant } f(0) = 1. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{voir annexe pour} \\ \text{quelques notions} \\ \text{sur l'analyticité} \end{array} \right.$$

On la développe en série de Taylor :  $f(t) = 1 + \sum_{|\alpha| > 0} \frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha$ , avec  $m_\alpha = \left[ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha} \right] (t = 0)$ , et

pareil pour le logarithme :  $\ln f(t) = \sum_{|\beta| > 0} \frac{s_\beta}{\beta!} t^\beta$ . On a alors :  $f(t)$

$$= \exp(\ln(f(t)))$$

$$= \exp \left( \sum_{|\beta| > 0} \frac{s_\beta}{\beta!} t^\beta \right)$$



(25)

$$= 1 + \sum_{i > 0} \frac{\left( \sum_{|\beta| > 0} \frac{s_\beta}{\beta!} t^\beta \right)^i}{i!}$$

$$= 1 + \sum_{i > 0} \frac{1}{i!} \sum_{\begin{cases} |\beta_1| > 0 \\ \dots \\ |\beta_i| > 0 \end{cases}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} t^{\beta_1 + \dots + \beta_i}$$

$$= 1 + \sum_{i > 0} \frac{1}{i!} \sum_{|\alpha| > 0} \sum_{\begin{cases} \beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0 \end{cases}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} t^\alpha$$

$$= 1 + \sum_{|\alpha| > 0} \sum_{i > 0} \frac{1}{i!} \sum_{\begin{cases} \beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0 \end{cases}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} t^\alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{cf annexe pour} \\ \text{justifier l'interversion} \end{array} \right.$$

$$= 1 + \sum_{|\alpha| > 0} \frac{\left( \sum_{i > 0} \frac{\alpha!}{i!} \sum_{\begin{cases} \beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0 \end{cases}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} \right)}{\alpha!} t^\alpha$$



28

$$= 1 + \sum_{|\alpha| > 0} \left( \frac{\sum_{i=1}^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!}}{\alpha!} \right) t^\alpha \text{ car } \begin{cases} i \\ = 1 + \dots + 1 \\ \leq |\beta_1| + \dots + |\beta_i| \\ = |\beta_1| + \dots + |\beta_i| \\ = |\alpha| \end{cases}$$

On en déduit la formule cherchée :

$$m_\alpha = \sum_{i=1}^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!}$$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la formule de Wick.

### c) formule de Wick

Soit  $f_1, f_2, \dots, f_{2k}$  des fonctions linéaires de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ . La formule de Wick affirme que  $\langle f_1 f_2 \dots f_{2k} \rangle = \sum \langle f_{p_1} f_{q_1} \rangle \langle f_{p_2} f_{q_2} \rangle \dots \langle f_{p_k} f_{q_k} \rangle$ , la somme étant prise sur toutes les suites d'entiers  $(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k)$  partitionnant  $\{1, \dots, 2k\}$  et

$$\text{vérifiant } \begin{cases} p_1 < p_2 < \dots < p_k \\ p_1 < q_1 \\ \dots \\ p_k < q_k \end{cases} \quad (\text{une telle suite sera appelée } \mathbf{Wick\text{-}couplage})$$

Insistons tout d'abord sur la forme des Wick-couplages, qu'il est indispensable de bien saisir. Les conditions imposent à  $p_1$  d'être minimum, et donc  $p_1 = 1$  ; le choix de  $q_1$  est alors libre parmi les  $2k-1$  entiers  $\{2, 3, \dots, 2k\}$ . Ensuite, les conditions imposent à  $p_2$  d'être à son tour minimum parmi  $(p_2, \dots, p_k, q_2, \dots, q_k)$ , donc  $p_2$  est fixé le plus à gauche possible de  $p_1$  et  $q_1$  ; on a alors le choix de  $q_2$  parmi les  $2k-3$  entiers restants. Et ainsi de suite. On a donc au final  $(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = (2k-1)!!$



27

Wick-couplages possibles. On pourra également voir ces derniers comme les permutations  $(p_1, q_1)(p_2, q_2)\dots(p_k, q_k)$  de  $\{1, \dots, 2k\}$  dont la décomposition en cycles à supports disjoints est formée de exactement  $k$  transpositions ; par exemple, si  $k = 4$ , la permutation  $(1, 4)(2, 8)(3, 5)(6, 7)$  représente un Wick-couplage.

Donnons une illustration de la formule de Wick avant de la démontrer. On veut

déterminer  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ , i.e.  $\langle x^{2n} \rangle$  pour la mesure gaussienne standard. On

applique bêtement  $\langle x^{2n} \rangle = \langle x x \dots x \rangle = \sum \langle x x \rangle \langle x x \rangle \dots \langle x x \rangle = \sum 1 1 \dots 1 = (2n-1) !!$

Démonstration : l'idée consiste à appliquer le lemme 2 à la fonction caractéristique d'une mesure gaussienne bien choisie, puisque son logarithme est un polynôme de degré  $\leq 2$  (d'où les  $s_\alpha$  déjà tous prêts).

Considérons l'application linéaire  $A$  de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^{2k}$ , qui à  $x$  associe  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2k}(x))$ ,  $\nu$  la mesure gaussienne induite (cf lemme 1) par  $\mu$  et  $A$  sur  $\mathbb{R}^{2k}$ ,  $C_\nu$  sa matrice de covariance. Alors  $\varphi_\nu(t) = \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{i[t|y]} d\nu(y) = e^{-\frac{1}{2}[C_\nu t|t]}$ .

On justifie en annexe que  $\varphi_\nu$  est analytique en 0, et on admettra qu'on peut indéfiniment dériver  $\varphi_\nu$  sous le signe intégral ; ce dernier point peut se comprendre si l'on se restreint au sev où  $\nu$  est concentrée, où l'on a une intégrale par rapport à une densité en exponentielle d'un terme quadratique (et donc toutes les dérivées sont

clairement dominées). On peut donc calculer  $m_\alpha = \left[ \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi_\nu(t)}{\partial t^\alpha} \right] (t=0)$

$$= \left[ \int_{\mathbb{R}^{2k}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^\alpha} e^{i(t_1 y_1 + \dots + t_{2k} y_{2k})} d\nu(y) \right] (t=0)$$

$$= \left[ \int_{\mathbb{R}^{2k}} (i y_1)^{\alpha_1} \dots (i y_{2k})^{\alpha_{2k}} e^{i(t_1 y_1 + \dots + t_{2k} y_{2k})} d\nu(y) \right] (t=0)$$

$$= \left[ \int_{\mathbb{R}^{2k}} (i y)^\alpha e^{i[t|y]} d\nu(y) \right] (t=0)$$

$$= i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^{2k}} y^\alpha d\nu(y)$$



28

$$= i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} A(x)^\alpha d\mu(x) \quad \text{par construction de la mesure induite } \nu$$

$$= i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f_1(x)^{\alpha_1} \dots f_{2k}(x)^{\alpha_{2k}} d\mu(x)$$

$$= \boxed{m_\alpha = i^{|\alpha|} \langle f_1^{\alpha_1} \dots f_{2k}^{\alpha_{2k}} \rangle_\mu}. \text{ On veut donc } m_{(1, \dots, 1)}; \text{ calculons pour cela les } s_\beta.$$

On a  $\ln \varphi_\nu(t)$

$$= -\frac{1}{2} [C_\nu t \mid t]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{\nu_{i,j}} t_i t_j$$

$$= \sum_{i < j} (-c_{\nu_{i,j}}) t_i t_j + \sum_i -\frac{1}{2} c_{\nu_{i,i}} t_i^2$$

$$= \sum_{i < j} \frac{-c_{\nu_{i,j}}}{(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)!} t^{(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)} + \sum_i \frac{-c_{\nu_{i,i}}}{(\dots, 0, 2, 0, \dots)!} t^{(\dots, 0, 2, 0, \dots)}$$

donc  $s_\beta \neq 0$  ssi  $|\beta| = 2$ . De plus,  $s_{(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}$

$$= -c_{\nu_{i,j}} \quad (\text{les } i < j \text{ désignant les places des } 1 \text{ dans } (\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots))$$

$$= -\langle y_i y_j \rangle_\nu \quad (\text{intérêt de la matrice de covariance})$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{2k}} y_i y_j d\nu(y)$$

$$= \boxed{s_{(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)} = -\langle f_i f_j \rangle_\mu}. \text{ On voit poindre les termes de la formule de Wick...}$$

Dernière étape, appliquer :  $m_{(1, \dots, 1)} = \sum_{i=1}^{|(1, \dots, 1)|} \frac{(1, \dots, 1)!}{i!} \sum_{\begin{cases} \beta_1 + \dots + \beta_i = (1, \dots, 1) \\ \forall j, |\beta_j| > 0 \end{cases}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!}$

On a vu que les seuls  $s_{\beta_j} \neq 0$  sont ceux où  $\beta_j$  est du type  $(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  ou  $(\dots, 0, 2, 0, \dots)$ ; mais il faut que la somme de ces derniers fasse  $(1, \dots, 1)$ , donc on ne garde que les  $(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ . Mais alors  $\beta_1 + \dots + \beta_i$  contient  $i * 2 = 2i$  chiffres 1, et doit valoir  $(1, \dots, 1)$  qui en contient  $2k$ ; il faut donc  $i = k$ . On en déduit :  $\langle f_1 \dots f_{2k} \rangle$



29

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m_{(1, \dots, 1)}}{i^{(1, \dots, 1)}} \\
 &= \frac{1}{i^{2k}} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\beta_j = (\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ \beta_1 + \dots + \beta_k = (1, \dots, 1)}} s_{\beta_1} \dots s_{\beta_k} \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\beta_j = (\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ \beta_1 + \dots + \beta_k = (1, \dots, 1)}} \frac{1}{(-1)^k} \langle -f_{p_1} f_{q_1} \rangle \dots \langle -f_{p_k} f_{q_k} \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{les } p_j < q_j \text{ étant les} \\ \text{places des 1 dans } \beta_j \end{array} \right. \\
 &= \sum_{\substack{\beta_j = (\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ \beta_1 + \dots + \beta_k = (1, \dots, 1) \\ \beta_1 > \dots > \beta_k}} \langle f_{p_1} f_{q_1} \rangle \dots \langle f_{p_k} f_{q_k} \rangle \text{ car il y a } k! \text{ permutations possibles des } \beta_j \\
 &= \sum \langle f_{p_1} f_{q_1} \rangle \dots \langle f_{p_k} f_{q_k} \rangle \text{ CFQD.} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} p_j < q_j \\ \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\} = \{1, \dots, 2k\} \\ p_1 < \dots < p_k \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Remarque : Wick reste en fait valable lorsqu'on suppose les  $f_j$  seulement linéaires de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{C}$ , ce que l'on obtient par une récurrence sur le nombre  $c$  de  $f_j$  admettant une coordonnée imaginaire non nulle. Pour  $c = 0$ , rien à faire ; pour  $c \geq 1$ , on prend un  $f_j$  s'écrivant  $f + \sqrt{-1} g$  où  $g \neq 0$ , on sépare  $\langle f_1 f_2 \dots f_{2k} \rangle$  par linéarité en deux sommes identiques ayant un nombre  $c$  moindre, on applique Wick revisité avec l'hypothèse de récurrence, puis on factorise tout ce qu'il faut dans la somme portant sur les Wick-couplages pour recomposer ce que l'on veut (l'écrire, ça marche tout seul).

Nous nous placerons désormais sur l'espace  $\mathcal{H}_N$  des matrices hermitiennes de taille  $N \times N$ , où le langage des matrices nous permettra de caractériser plus facilement nos outils de travail.



### III/ l'espace $\mathcal{H}_N$ des matrices hermitiennes

#### ① Définitions

On notera  $\mathcal{H}_N$  l'espace des matrices hermitiennes de taille  $N \times N$ , i.e. les matrices  $H$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  égales à leur transconjuguées :  $\forall i, j, \boxed{h_{j,i} = \overline{h_{i,j}}}$ .

Une telle matrice est donc caractérisée par  $N^2$  paramètres, les  $\frac{N(N+1)}{2}$  parties réelles  $(x_{i,j})_{i \leq j}$  et les  $\frac{N(N-1)}{2}$  parties imaginaires  $(y_{i,j})_{i < j}$  ; par conséquent  $\boxed{\mathcal{H}_N \cong \mathbb{R}^{N^2}}$ .

On pensera alors toute matrice  $H = (h_{i,j})_{i,j} = (x_{i,j} + \sqrt{-1} y_{i,j})_{i,j}$  comme un  $N^2$ -uplet de réels  $((x_{i,i}) (x_{i < j}) (y_{i < j}))$ .

#### ② une mesure gaussienne sur $\mathcal{H}_N$

Il convient d'abord d'introduire la mesure produit de Lebesgue sur  $\mathcal{H}_N$ , analogue de celle sur  $\mathbb{R}^{N^2}$  :  $dv(H) = \prod_i dx_{i,i} \prod_{i < j} dx_{i,j} dy_{i,j}$ .

Ensuite il nous faut une forme quadratique sur  $\mathcal{H}_N$ , de préférence ayant sa matrice inversible de façon à avoir une mesure avec densité, dont on rappelle la forme :  $d\mu(H) = \sqrt{\frac{\det(B)}{(2\pi)^{N^2}}} e^{-i[BH|H]} dv(H)$ , le  $H$  figurant dans le produit scalaire étant pris comme le vecteur colonne de ses paramètres  $((x_{i,i}) (x_{i < j}) (y_{i < j}))$ .

$$\text{On prend } \text{tr}(H^2) = \sum_{i,j} h_{i,j} h_{j,i} = \sum_{i,j} h_{i,j} \overline{h_{i,j}} = \sum_{i,j} |h_{i,j}|^2 = \sum_i |h_{i,i}|^2 + 2 \sum_{i < j} |h_{i,j}|^2$$



31

$$= \sum_i x_{i,i}^2 + 2 \sum_{i < j} x_{i,j}^2 + 2 \sum_{i < j} y_{i,j}^2, \text{ de matrice } B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \text{ toute simple ! D'où}$$

tout ce qu'il faut pour caractériser  $\mu$  : on a  $\frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2 - N$  chiffres 2 sur la

diagonale, d'où  $\det(B) = 2^{N^2 - N}$ , et  $d\mu(H) = \sqrt{\frac{2^{N^2 - N}}{(2\pi)^{N^2}}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(H^2)} dv(H) \Rightarrow$

$$\boxed{d\mu(H) = \sqrt{\frac{1}{2^N \pi^{N^2}}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(H^2)} dv(H)}. \text{ La matrice de covariance s'obtient trivialement}$$

en inversant B, d'où les moyennes  $\langle x_{i,i}^2 \rangle = 1, \langle x_{i,j}^2 \rangle = \langle y_{i,j}^2 \rangle = \frac{1}{2}$ , les autres étant nulles car faisant intervenir des termes hors de la diagonale.

Nous disposons à présent d'une mesure gaussienne sur  $\mathcal{H}_N$ , ainsi que d'une formule pour intégrer des polynômes sur  $\mathcal{H}_N$ . Qu'attendons-nous ? Avanti !

### ③ exemple de polynôme : $\text{tr}(H^{2n})$

Voyons alors comment nos outils fonctionnent sur  $\text{tr}(H^{2n})$ , polynôme de degré

$2n$  en les  $N^2$  variables  $x_{i,j} \dots y_{i,j}$  :  $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2n} = 1}^N h_{i_1, i_2} h_{i_2, i_3} \dots h_{i_{2n}, i_1}$ . Les  $h_{i_k, i_{k+1}}$  étant des

fonctions linéaires en les variables  $x_{i,j} \dots y_{i,j}$ , on peut appliquer Wick :  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$

$$= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2n} = 1}^N \langle h_{i_1, i_2} h_{i_2, i_3} \dots h_{i_{2n}, i_1} \rangle$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_{2n} = 1}^N \sum_{\substack{(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \\ \text{Wick-couplage}}} \langle h_{i_{p_1}, i_{p_1+1}} h_{i_{q_1}, i_{q_1+1}} \rangle \dots \langle h_{i_{p_n}, i_{p_n+1}} h_{i_{q_n}, i_{q_n+1}} \rangle$$

[ les indices  $p_k+1$  et  $q_k+1$  étant évidemment pris modulo  $2n$  ]



32

$$= \sum_{i_1, \dots, i_{2n} = 1}^N \sum_{\substack{(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \\ \text{Wick-couplage}}} \langle h_{i_{p_1}, i_{p_1+1}} h_{i_{q_1}, i_{q_1+1}} \rangle \dots \langle h_{i_{p_n}, i_{p_n+1}} h_{i_{q_n}, i_{q_n+1}} \rangle$$

Il convient pour évaluer cette horreur de connaître les  $\langle h_{i,j} h_{k,l} \rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle (x_{i,j} + \sqrt{-1} y_{i,j}) (x_{k,l} + \sqrt{-1} y_{k,l}) \rangle \\ &= \langle x_{i,j} x_{k,l} - y_{i,j} y_{k,l} + \sqrt{-1} (x_{i,j} y_{k,l} + x_{k,l} y_{i,j}) \rangle \\ &= \langle x_{i,j} x_{l,k} \rangle + \langle y_{i,j} y_{l,k} \rangle + \sqrt{-1} (\langle x_{j,i} y_{k,l} \rangle - \langle x_{k,l} y_{j,i} \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \delta_i^l \delta_j^k + \frac{1}{2} \delta_i^l \delta_j^k + \sqrt{-1} (\frac{1}{2} \delta_j^k \delta_i^l - \frac{1}{2} \delta_j^k \delta_i^l) \\ &= \delta_i^l \delta_j^k. \text{ Donc} \end{aligned}$$

$$\langle h_{i,j} h_{k,l} \rangle = 0 \text{ sauf si } \begin{cases} i = l \\ j = k \end{cases} \text{ auquel cas on a } \langle h_{i,j} h_{j,i} \rangle = 1.$$

On voit alors que chaque terme a de bonnes chances d'être nul, et apporte sinon un contribution de 1 à l'intégrale. Tiens donc, on somme des 1, alors ? La combinatoire ne doit pas être bien loin...

Prenons un cas particulier pour mieux comprendre ce qui se passe, par exemple  $n = 4$ , et donnons-nous un Wick-couplage de  $\{1, \dots, 8\}$ , mettons  $(1, 5)(2, 4)(3, 8)(6, 7)$ .

On cherche alors  $\sum_{i_1, \dots, i_8 = 1}^N \langle h_{i_1, i_2} h_{i_5, i_6} \rangle \langle h_{i_2, i_3} h_{i_4, i_5} \rangle \langle h_{i_3, i_4} h_{i_8, i_1} \rangle \langle h_{i_6, i_7} h_{i_7, i_8} \rangle$ . On

sait que chacun des termes de la somme est nul sauf sous certaines conditions très restrictives à savoir :  $\begin{cases} i_1 = i_6 \\ i_2 = i_5 \\ i_3 = i_4 \\ i_4 = i_8 \\ i_7 = i_7 \end{cases}$ , ce qui s'écrit aussi sous forme de

3 chaînes d'égalités :  $\begin{cases} i_1 = i_6 = i_8 = i_4 = i_3 = i_1 \\ i_2 = i_5 = i_2 \\ i_7 = i_7 \end{cases}$  ; on peut donc choisir librement

exactement 3 des indices  $i_1, \dots, i_8$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1, \dots, i_8 = 1}^N \langle h_{i_1, i_2} h_{i_5, i_6} \rangle \langle h_{i_2, i_3} h_{i_4, i_5} \rangle \langle h_{i_3, i_4} h_{i_8, i_1} \rangle \langle h_{i_6, i_7} h_{i_7, i_8} \rangle \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_8 = 1}^N [i_1 = i_6 = i_8 = i_4 = i_3 = i_1] * [i_2 = i_5 = i_2] * [i_7 = i_7] \end{aligned}$$



33

$$= \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^N 1$$

$$= N^3.$$

Le Wick-couplage choisi ci-dessus contribue donc à l'intégrale d'un facteur  $N^3$ . Plus généralement, la contribution d'un Wick-couplage donné est  $N^L$  où  $L$  est le nombre d'indices *libres* induit par ce Wick-couplage. On a ainsi la proposition suivante, d'importance capitale : si  $\sigma$  est une application de  $\{1, \dots, N\}$  dans lui-même, on a

$$\left\langle \sum_{i_1, \dots, i_{2k} = 1}^N h_{i_1, \sigma(i_1)} h_{i_2, \sigma(i_2)} \dots h_{i_{2k}, \sigma(i_{2k})} \right\rangle = \sum_{\substack{\text{nombre d'indices libres} \\ \{ (p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) \\ \text{Wick-couplage} \}}} N$$

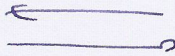
Comment calculer ce nombre  $L$  ? C'est là que les cartes reviennent en beauté.

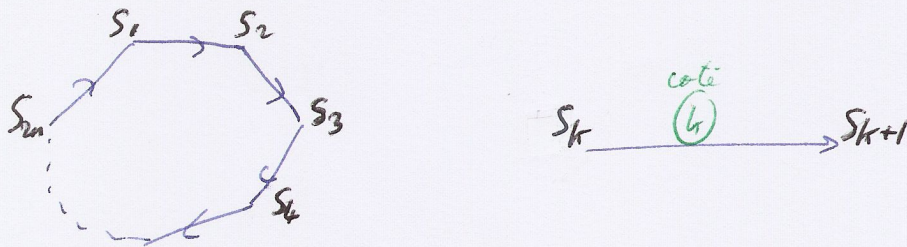


## IV/ cartes et mesures gaussiennes : un lien très fort

### ① retour au problème des $\varepsilon_g(n)$

#### a) interprétation géométrique des Wick-couplages


On rappelle qu'on cherche le nombre de façon d'apparier 2 à 2 les côtés d'un  $2n$ -gone régulier orienté numéroté pour obtenir une carte de genre  $g$ , les appariements étant nécessairement  pour avoir l'orientabilité.



Le point fondamental est de remarquer qu'à un tel appariement (donc à toute carte engendrée par le  $2n$ -gone) correspond un unique Wick-couplage : en numérotant par  $k$  le côté  $[S_k, S_{k+1}]$ , associer  $p < q$  dans un Wick-couplage revient à apparier les côtés  $p$  et  $q$  du polygone ; on a bien  $(2n-1)!!$  façons de le faire dans les deux cas.

Mais on a plus encore : associer  $p < q$  revient à considérer un facteur  $\langle h_{i_p, i_{p+1}} h_{i_q, i_{q+1}} \rangle$

dans  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$ , qui est  $\neq 0$  ssi  $\begin{cases} i_p = i_{q+1} \\ i_q = i_{p+1} \end{cases}$  ; or, apparier les côtés  $p$  et  $q$  du  $2n$ -gone,

c'est faire  i.e.  $\begin{cases} S_p \equiv S_{q+1} \\ S_q \equiv S_{p+1} \end{cases}$ . Par conséquent, les chaînes

d'égalités sur les indices  $i_1, \dots, i_{2n}$  induites par un Wick-couplage se traduisent (et c'est là le point important à saisir) par les chaînes d'égalités sur les sommets induites par l'appariement correspondant des côtés du polygone ; en corollaire, le nombre d'indices libres du Wick-couplage est le même que le nombre de sommets du  $2n$ -gone libres après l'appariement correspondant, i.e. le nombre de sommets de la carte engendrée par l'appariement !



35

Or, on a déjà calculé celui-ci par Euler : la carte a par construction 1 face et  $\frac{2n}{2}$

= n arêtes, donc  $S - A + F = 2 - 2g \Rightarrow \boxed{S = n + 1 - 2g}$ . On en déduit  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$

$$= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2n} = 1}^N \langle h_{i_1, i_2} h_{i_2, i_3} \dots h_{i_{2n}, i_1} \rangle$$

$$= \sum_{\substack{(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \\ \text{Wick-couplage}}} N^{\text{nombre d'indices libres}}$$

$$= \sum_{\substack{(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \\ \text{Wick-couplage}}} N^{n+1-2g}$$

$$= \sum_{g=0}^{n/2} \sum_{\substack{(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \\ \text{Wick-couplage} \\ \text{de genre } g}} N^{n+1-2g}$$

$$= \sum_{g=0}^{n/2} N^{n+1-2g} \sum_{\substack{\text{cartes engendrées} \\ \text{de genre } g}} 1$$

$$= \boxed{\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle = \sum_{g=0}^{n/2} \varepsilon_g(n) N^{n+1-2g}}$$

Remarque 1 : on dirait en physique que les cartes engendrées par le 2n-gone nous servent de **diagrammes de Feynman** pour notre intégrale.

Remarque 2 : on peut réécrire  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle = N^{n+1} \sum_{g=0}^{\infty} \varepsilon_g(n) \left(\frac{1}{N^2}\right)^g$  où  $\frac{1}{N^2}$  joue le rôle

d'un paramètre formel ; ainsi  $\frac{\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle}{N^{n+1}}$  joue le rôle d'une série génératrice des  $\varepsilon_g(n)$ .

Il faut maintenant calculer  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$  pour obtenir de plus amples informations sur les  $\varepsilon_g(n)$ .



b) coloriage du 2n-gone

Signalons tout d'abord une interprétation combinatoire pour  $n \geq 1$  de  $\Omega_\chi(n) = \sum_{g=0}^{n/2} \varepsilon_g(n) \chi^{n+1-2g}$ ; ce dernier vaut le nombre de  $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$  tels que  $\mathcal{A}$  appariement du 2n-gone et  $\mathcal{K}$  coloriage des sommets du polygone avec  $\chi$  couleurs (au plus) compatible avec  $\mathcal{A}$  (i.e. deux sommets identifiés par  $\mathcal{A}$  doivent être de la même couleur). En effet, si l'on fixe un  $\mathcal{A}$  engendrant une carte de genre  $g$  donné, on a  $\chi^S$  choix pour  $\mathcal{K}$  si  $S$  nombre de sommets de la carte, et Euler nous donne  $S = n + 1 - 2g$ .

*Remarque* : en dénombrant  $\Omega_\chi(n)$  à  $\mathcal{K}$  fixé, on peut retrouver « à la main »  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$ , cf la partie combinatoire du travail de Harer et Zagier ([2]).

On montre dans le paragraphe suivant que  $\left\{ \begin{array}{l} \forall \chi \geq 0 \\ \forall n \geq 0 \end{array} \right\} \Omega_\chi(n) =$

$$\sum_{g=0}^{n/2} \varepsilon_g(n) \chi^{n+1-2g} = (2n-1)!! \sum_{k \geq 1} 2^{k-1} \binom{\chi}{k} \binom{n}{k-1}.$$

c) calcul de  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$

Une remarque fondamentale quand on manipule des matrices hermitiennes est de remarquer que tout  $H$  de  $\mathcal{H}_\chi$  peut s'écrire  $U^* D U$  où  $U$  unitaire et  $D$  diagonale, et que les fonctions que l'on considère (essentiellement des traces) ne dépendent que de  $D$ . Au lieu d'intégrer sur  $\mathcal{H}_\chi$ , on devrait donc pouvoir se ramener à une intégrale sur l'ensemble des matrices  $\chi \times \chi$  diagonales, i.e.  $\cong \mathbb{R}^\chi$ . Cela fait l'objet de la proposition suivante, qui peut être démontrée si l'on possède un bon bagage sur la théorie de la mesure ; nous l'admettrons donc.

Soit  $\chi \geq 1$ , et  $F$  un fonction de  $\mathcal{H}_\chi$  dans  $\mathbb{R}$  unitairement invariante, i.e.  $\forall H$  hermitienne,  $\forall U$  unitaire,  $F(U^* H U) = F(H)$ . On alors



$$\int_{\mathcal{H}_\chi} F(H) d\mu_\mathcal{L}(H) = \frac{\sqrt{\pi^{\chi^2 - \chi}}}{\chi! \dots 1!} \int_{D \in \mathbb{R}^\chi} F\left(\left(\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_\chi \end{array}\right)\right) \prod_{i < j} (d_i - d_j)^2 dv_\mathcal{L}(D) \quad \text{où } \mu_\mathcal{L} \text{ et } v_\mathcal{L}$$

désignent les mesures de Lebesgue sur  $\mathcal{H}_\chi$  et  $\mathbb{R}^\chi$  respectivement. En multipliant par  $\sqrt{\frac{1}{2^\chi \pi^{\chi^2}}}$ , et en considérant  $F(H) = f(H) e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(H^2)}$  où  $f$  unitairement invariante, on

$$\text{obtient : } \int_{\mathcal{H}_\chi} f(H) d\mu_\chi(H) = \frac{1}{\chi! \dots 1!} \int_{D \in \mathbb{R}^\chi} f\left(\left(\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_\chi \end{array}\right)\right) \prod_{i < j} (d_i - d_j)^2 dv_\chi(D) \quad \text{où } \mu_\chi$$

désigne la mesure gaussienne sur  $\mathcal{H}_\chi$  développée en III, et  $v_\chi$  la mesure gaussienne standard sur  $\mathbb{R}^\chi$ .

$$\begin{aligned} & \text{On applique alors à } f(H) = \text{tr}(H^{2n}) : \langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle_{\mu_\chi} = \\ &= \frac{1}{\chi! \dots 1!} \int_{\mathbb{R}^\chi} \text{tr}\left(\left(\begin{array}{c} d_1^{2n} \\ \vdots \\ d_\chi^{2n} \end{array}\right)\right) \prod_{i < j} (d_i - d_j)^2 dv_\chi \\ &= \frac{1}{\chi! \dots 1!} \int_{\mathbb{R}^\chi} (d_1^{2n} + \dots + d_\chi^{2n}) (-1)^{\chi^2/2 - \chi/2} \prod_{i \neq j} (d_i - d_j) dv_\chi \\ &= \frac{1}{\chi! \dots 1!} \int_{\mathbb{R}^\chi} \chi d_\chi^{2n} \left( (-1)^{\chi^2/2 - \chi/2} \prod_{i \neq j} (d_i - d_j) \right) dv_\chi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car on a invariance} \\ \text{par permutation des } d_i \end{array} \right. \\ &= \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \int_{\mathbb{R}^\chi} d_\chi^{2n} \left( \sum_{p=0}^{2\chi-2} a_p(d_1, \dots, d_{\chi-1}) d_\chi^p \right) dv_\chi \quad \text{en développant le Vandermonde en } d_\chi \\ & \quad [ \text{on remarquera que le terme de plus haut degré en } d_\chi \text{ dans} \\ & \quad \prod_{1 \leq i < j \leq \chi} (d_i - d_j)^2, \text{ qui est } a_{2\chi-2}(d_1, \dots, d_{\chi-1}), \text{ vaut } \prod_{1 \leq i < j \leq \chi-1} (d_i - d_j)^2 ] \\ &= \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \sum_{p=0}^{2\chi-2} \int_{\mathbb{R}^{\chi-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^{\chi-1}} a_p(d_1, \dots, d_{\chi-1}) dv_{\chi-1} \right) d_\chi^{p+2n} dv_1 \quad \text{afin d'intégrer en } d_\chi \end{aligned}$$



38

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \sum_{p=0}^{2\chi-2} \int_{\mathbb{R}} \alpha_{p, \chi} d_{\chi}^{2n+p} dv_1 \text{ avec } \alpha_{p, \chi} = \int_{\mathbb{R}^{\chi-1}} a_p(d_1, \dots, d_{\chi-1}) dv_{\chi-1} \\
 &= \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \sum_{q=0}^{\chi-1} \int_{\mathbb{R}} \alpha_{2q, \chi} d_{\chi}^{2n+2q} dv_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car les puissances impaires} \\ \text{intégrées sur } \mathbb{R} \text{ sont nulles} \end{array} \right. \\
 &= \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \sum_{q=0}^{\chi-1} \alpha_{2q, \chi} (2n+2q-1)!! \quad (\text{cf illustration de la formule de Wick}) \\
 &= (2n-1)!! \sum_{q=0}^{\chi-1} \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \alpha_{2q, \chi} (2n+2q-1) \dots (2n+1).
 \end{aligned}$$

D'où  $\boxed{\begin{cases} \forall \chi \geq 1 \\ \forall n \geq 0 \end{cases} : \Omega_{\chi}(n) = (2n-1)!! \omega_{\chi}(n)}$  (avec la convention  $(-1)!! = 1$ ) où  $\omega_{\chi}$

polynôme en n de degré  $\chi-1$  et de terme dominant =

$$\begin{aligned}
 &= (2n)^{\chi-1} \frac{\chi}{\chi! \dots 1!} \int_{\mathbb{R}^{\chi-1}} a_{2\chi-2}(d_1, \dots, d_{\chi-1}) dv_{\chi-1} \\
 &= (2n)^{\chi-1} \frac{\chi}{\chi! (\chi-1)! \dots 1!} \int_{\mathbb{R}^{\chi-1}} 1 * \prod_{1 \leq i < j \leq \chi-1} (d_i - d_j)^2 dv_{\chi-1} \\
 &= (2n)^{\chi-1} \frac{1}{(\chi-1)!} \int_{\mu_{\chi-1}} 1 d\mu_{\chi-1} \quad \text{en réappliquant la proposition sus-citée} \\
 &= \frac{(2n)^{\chi-1}}{(\chi-1)!} \text{ car } \mu_{\chi-1} \text{ normalisée. On connaît donc le } \boxed{\text{terme dominant de } \omega_{\chi}(n) = \frac{(2n)^{\chi-1}}{(\chi-1)!}} ;
 \end{aligned}$$

revenons alors à l'interprétation combinatoire de  $\Omega_{\chi}(n)$  pour calculer ses racines.

Posons pour cela  $\Omega_k^{\circ}(n)$  le nombre de  $(\mathbf{a}, \mathcal{K})$  où  $\mathcal{K}$  utilise exactement  $k \geq 0$  couleurs (attention, ce nombre combinatoire n'a de sens que pour  $n \geq 1$ ) : ceci pour

avoir  $\boxed{\begin{cases} \forall n \geq 1 \\ \forall \chi \geq 0 \end{cases} , \Omega_{\chi}(n) = \sum_{k=1}^{\chi} \binom{\chi}{k} \Omega_k^{\circ}(n) = \sum_{k=0}^{\chi} \binom{\chi}{k} \Omega_k^{\circ}(n)}$  car tout  $(\mathbf{a}, \mathcal{K})$  utilise k

couleurs pour un k dans  $\{1, \dots, \chi\}$ , et  $\Omega_0^{\circ}(n) = 0$  ; d'où en inversant la formule



39

(classique, cf annexe) :  $\Omega_\chi^\circ(n) = \sum_{k=0}^{\chi} (-1)^{\chi-k} \binom{\chi}{k} \Omega_k(n) = \sum_{k=1}^{\chi} (-1)^{\chi-k} \binom{\chi}{k} \Omega_k(n) =$

$$\sum_{k=1}^{\chi} (-1)^{\chi-k} \binom{\chi}{k} (2n-1)!! \omega_k(n) = (2n-1)!! \sum_{k=1}^{\chi} (-1)^{\chi-k} \binom{\chi}{k} \omega_k(n), \quad \text{i.e.}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \forall \chi \geq 1 \\ \forall n \geq 1 \end{array} \right., \Omega_\chi^\circ(n) = (2n-1)!! \omega_\chi^\circ(n)} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_\chi^\circ(n) = \sum_{k=1}^{\chi} (-1)^{\chi-k} \binom{\chi}{k} \omega_k(n)} \quad \text{polynôme}$$

de degré  $\chi - 1$  de terme dominant  $\frac{(2n)^{\chi-1}}{(\chi-1)!}$  (celui de  $\omega_\chi(n)$ ). Pour avoir ses racines, on remarque que tout  $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$  utilise  $n + 1 - 2g$  sommets libres, et donc au plus  $n + 1$  couleurs ; d'où  $\Omega_\chi^\circ(n) = 0$  pour  $\chi > n + 1$  (joli, non ?), i.e. pour  $n \in \{1, \dots, \chi - 2\}$  ; reste la dernière racine  $n = 0$ .

• Pour  $\chi \geq 2$ , on a :  $\sum_{k=0}^{\chi} \binom{\chi}{k} \delta_k^1 = \chi = \Omega_\chi(0)$ , d'où (en inversant)  $0 = \delta_\chi^1 =$

$$\sum_{k=0}^{\chi} (-1)^{\chi-k} \binom{\chi}{k} \Omega_k(0) = (2*0-1)!! \omega_\chi^\circ(0) = \omega_\chi^\circ(0), \text{ i.e. } 0 \text{ racine de } \omega_\chi^\circ(n) ; \text{ on a donc } \forall$$

$$n \in \mathbb{R}, \omega_\chi^\circ(n) = \frac{2^{\chi-1}}{(\chi-1)!} n(n-1) \dots (n-\chi+2) = \frac{2^{\chi-1}}{(\chi-1)!} \binom{n}{\chi-1}. \quad \bullet \text{ Pour } \chi = 1, \text{ on a } \omega_\chi^\circ(n) =$$

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^{1-k} \binom{1}{k} \omega_k(n) = \omega_1(n) = \frac{2^{1-1}}{(1-1)!} = 1 = \frac{2^{\chi-1}}{(\chi-1)!} \binom{n}{\chi-1}. \quad \bullet \text{ Par conséquent,}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \forall \chi \geq 1 \\ \forall n \in \mathbb{R} \end{array} \right., \omega_\chi^\circ(n) = \frac{2^{\chi-1}}{(\chi-1)!} \binom{n}{\chi-1}}.$$



40

On en déduit  $\begin{cases} \forall n \geq 1 \\ \forall \chi \geq 0 \end{cases}, \Omega_\chi(n) = \sum_{k=1}^{\chi} \binom{\chi}{k} \Omega_k^\circ(n) = \sum_{k=1}^{\chi} \binom{\chi}{k} (2n-1)!! \omega_\chi^\circ(n) =$

$$\sum_{k=1}^{\chi} \binom{\chi}{k} (2n-1)!! 2^{k-1} \binom{n}{k-1} = (2n-1)!! \sum_{k \geq 1} 2^{k-1} \binom{\chi}{k} \binom{n}{k-1} \quad \text{CFDQ.}$$

Reste à tirer de cette relation une formule close pour les  $\varepsilon_g(n)$ .

d) calcul des  $\varepsilon_g(n)$

On part des  $\omega_\chi(n) = \sum_{k \geq 1} 2^{k-1} \binom{\chi}{k} \binom{n}{k-1}$  et de leur fonction génératrice :

$$1 + \sum_{n \geq 0} 2 \omega_\chi(n) X^{n+1} = \left( \frac{1+X}{1-X} \right)^\chi.$$

Démonstration :  $\left( \frac{1+X}{1-X} \right)^\chi$

$$= \left( 1 + \frac{2X}{1-X} \right)^\chi$$

$$= \sum_{k \geq 0} \binom{\chi}{k} 2^k X^k \left( \frac{1}{1-X} \right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k \geq 1} \binom{\chi}{k} 2^k X^k \sum_{j \geq 0} \binom{j+k-1}{j} X^j \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{cf annexe pour les séries} \\ \text{génératrices classiques} \end{array} \right.$$

$$= 1 + \sum_{\substack{j \geq 0 \\ k \geq 1}} \binom{\chi}{k} 2^k \binom{j+k-1}{j} X^{k+j}$$



(41)

$$= 1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{\begin{cases} k+j = n+1 \\ j \geq 0 \\ k \geq 1 \end{cases}} 2^k \binom{\chi}{k} \binom{j+k-1}{j} X^{k+j}$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 1} 2^k \binom{\chi}{k} \binom{n}{n-k+1} X^n.$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 0} 2 \left( \sum_{k \geq 1} 2^{k-1} \binom{\chi}{k} \binom{n}{k-1} \right) X^n.$$

On en déduit alors une expression différente des  $\omega_\chi(n)$  :

$$(n+1) \omega_\chi(n) = 2^n \sum_{g=0}^{n/2} \frac{\gamma_g(n) \chi^{n+1-2g}}{(n-2g)!} \quad \text{où } \gamma_g(n) \text{ est le coefficient de } t^{2g} \text{ dans } \left( \frac{t/2}{\text{th}(t/2)} \right)^{n+1}.$$

Démonstration : on dérive la série génératrice des  $\omega_\chi(n)$  :

$$\sum_{n \geq 0} 2(n+1) \omega_\chi(n) X^n = \chi \left( \frac{1+X}{1-X} \right)^\chi \left( \frac{1-X}{1+X} \right) \frac{(1-X) + (1+X)}{(1-X)^2} = \chi \left( \frac{1+X}{1-X} \right)^\chi \frac{2}{1-X^2},$$

d'où, en identifiant les coefficients de  $X^n$  :

$$\begin{aligned} (n+1) \omega_\chi(n) &= \chi \operatorname{Res}_{x=0} \left[ \frac{1}{x^{n+1}} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^\chi \frac{dx}{1-x^2} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{voir l'annexe pour quelques} \\ \text{notions sur les résidus} \end{array} \right. \\ &= \chi \operatorname{Res}_{t=0} \left[ \left( \frac{1}{\text{th}(t/2)} \right)^{n+1} \left( \frac{1+\text{th}(t/2)}{1-\text{th}(t/2)} \right)^\chi \frac{(1-\text{th}(t/2)^2) dt/2}{1-\text{th}(t/2)^2} \right] \quad \text{en posant } x = \text{th}(t/2) \\ &= \chi \operatorname{Res}_{t=0} \left[ 2^n \frac{1}{t^{n+1}} \left( \frac{t/2}{\text{th}(t/2)} \right)^{n+1} e^{\chi t} dt \right] \\ &= 2^n \chi \operatorname{Coef de } t^n \text{ dans } \left[ \left( \frac{t/2}{\text{th}(t/2)} \right)^{n+1} e^{\chi t} \right] \end{aligned}$$



(42)

$$= 2^n \chi \text{ Coef de } t^n \text{ dans } \left[ \left( \sum_{g \geq 0} \gamma_g(n) t^{2g} \right) \left( \sum_{p \geq 0} \frac{(\chi t)^p}{p!} \right) \right]$$

$$= 2^n \chi \text{ Coef de } t^n \text{ dans } \left[ \sum_{\begin{cases} g \geq 0 \\ p \geq 0 \end{cases}} \frac{\gamma_g(n) \chi^p}{p!} t^{2g+p} \right]$$

$$= 2^n \chi \text{ Coef de } t^n \text{ dans } \left[ \sum_{n \geq 0} \sum_{\begin{cases} 2g+p=n \\ g \geq 0 \\ p \geq 0 \end{cases}} \frac{\gamma_g(n) \chi^p}{p!} t^{2g+p} \right]$$

$$= 2^n \chi \text{ Coef de } t^n \text{ dans } \left[ \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{g=0}^{n/2} \frac{\gamma_g(n) \chi^{n-2g}}{(n-2g)!} \right) t^n \right]$$

$$= 2^n \chi \sum_{g=0}^{n/2} \frac{\gamma_g(n) \chi^{n-2g}}{(n-2g)!}.$$

Il en résulte (enfin...) la formule tant convoitée :

$$\boxed{\varepsilon_g(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-2g)!} \text{ Coef de } t^{2g} \text{ dans } \left( \frac{t/2}{\text{th}(t/2)} \right)^{n+1}}.$$

Démonstration : on reprend l'expression originelle  $\sum_{g=0}^{n/2} \varepsilon_g(n) \chi^{n+1-2g}$

$$= (2n-1)!! \omega_\chi(n)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{n+1} (n+1) \omega_\chi(n)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n+1)!} 2^n \sum_{g=0}^{n/2} \frac{\gamma_g(n) \chi^{n+1-2g}}{(n-2g)!}$$



(43)

$$= \sum_{g=0}^{n/2} \frac{(2n)!}{(n+1)! (n-2g)!} \gamma_g(n) \chi^{n+1-2g}, \text{ d'où le résultat en identifiant les coefficients des}$$

deux polynômes en  $\chi$ .

On peut en déduire une formule (somme toute) simple de récurrence :

$$\boxed{\varepsilon_g(n+1) = \frac{4n+2}{n+2} \varepsilon_g(n) + \frac{(2n+1)n(2n-1)}{n+2} \varepsilon_{g-1}(n-1)}.$$

*Démonstration* : on dérive  $\left(\frac{t/2}{\text{th}(t/2)}\right)^{n+1} = \sum_{g \geq 0} \gamma_g(n) t^{2g}$ , d'où une formule de récurrence

pour les  $\gamma_g(n)$ , puis celle voulue en passant aux  $\varepsilon_g(n)$  (laissé au soin du lecteur...).

Après tant d'effort, autant sur le plan outils mis en jeu que sur le plan calculatoire, il est presque frustrant de trouver une relation aussi simple. N'y aurait-il pas un moyen d'y arriver plus vite, moyennant quelque argument combinatoire bien choisi ? Un résultat sur le groupe symétrique permet d'y parvenir. Nous développons la méthode en question dans le paragraphe suivant, présentée plus en guise en complément car nous sortons ici un peu du sujet.

#### e) le groupe symétrique à la rescousse

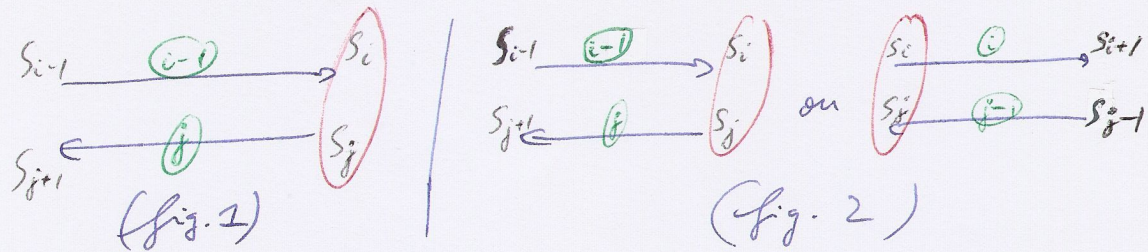
Revenons un peu plus haut sur le rapport entre un appariement du  $2n$ -gone et un Wick-couplage. En reprenant les même numérotation des côtés, i.e. le côté  $k$  est  $[S_k, S_{k+1}]$ , puis en notant  $\omega$  la permutation de  $\{1, \dots, 2n\}$  associée au Wick-couplage (i.e.  $\omega(i) = j$  ssi  $\omega(j) = i$  ssi les côtés  $i$  et  $j$  sont appariés par le Wick-couplage) ainsi que  $\gamma$  le  $2n$ -cycle  $(2n, 2n-1, \dots, 1)$ , on peut retraduire les relations  $\begin{cases} i_p = i_{q+1} \\ i_q = i_{p+1} \end{cases}$  et  $\begin{cases} S_p \equiv S_{q+1} \\ S_q \equiv S_{p+1} \end{cases}$  en termes de permutations. Plus précisément, on a la proposition :

**le nombre de sommets de la carte induite par  $\omega$  est le nombre d'orbites de  $\omega\gamma$ .**

*Démonstration* : •  $\omega\gamma(i) = j \Rightarrow \omega(i-1) = j \Rightarrow S_i \equiv S_j$  (cf fig. 1); donc si  $i$  et  $j$  sont dans la même orbite de  $\omega\gamma$ , on a alors de proche en proche  $S_i \equiv S_j$ . • Réciproquement, si  $S_i$



et  $S_j$  sont identifiés directement par un seul appariement de côtés, on a deux cas possibles (cf fig. 2) :  $\omega(i-1) = j$  d'où  $\omega\gamma(i) = j$ , ou bien  $\omega(j-1) = i$  d'où  $\omega\gamma(j) = i$  ; dans les deux cas,  $i$  et  $j$  sont dans la même orbite de  $\omega\gamma$ . Par conséquent, si  $S_i$  et  $S_j$  sont identifiés par  $\omega$ , on a alors de proche en proche  $i$  et  $j$  dans la même orbite de  $\omega\gamma$ .



Si l'on note  $\Omega_{2n}$  la classe de conjugaison des permutations de  $\{1, \dots, 2n\}$  ayant exactement  $n$  orbites de longueur 2 (interprétation des Wick-couplages en terme de permutations), une conséquence de la proposition ci-dessus est que  $\varepsilon_g(n) = \# \{ \text{Wick-couplages engendrant une carte ayant } n + 1 - 2g \text{ sommets (Euler)} \} = \# \{ \omega \in \Omega_{2n} \text{ tels que } \omega\gamma \text{ ait exactement } n + 1 - 2g \text{ orbites} \}$ . En notant  $\theta(\omega)$  le nombre d'orbites d'une permutation  $\omega$ , on cherche alors  $\varepsilon_g(n) = \# \{ \omega \in \Omega_{2n} / \theta(\omega\gamma) = n + 1 - 2g \}$ .

Or il existe un théorème plus général, assez court à montrer (ce qui ne veut pas dire facile !) si l'on connaît les représentations linéaires des groupes finis, affirmant que si  $\Omega$  est une classe de conjugaison du groupe symétrique  $S_N$ ,  $\theta_i(\Omega)$  le nombre d'orbites de longueur  $i$  de tout élément de  $\Omega$  ( $\theta_i$  est un invariant de conjugaison, cf annexe), et  $\gamma$  un  $N$ -cycle, alors les nombres  $p_m(\Omega) = \frac{1}{\#\Omega} \# \{ \omega \in \Omega / \theta(\omega\gamma) = m \}$  (à

interpréter comme des probabilités) sont déterminés par

$$\sum_{m \geq 1} p_m(\Omega) \sum_{k \geq 1} k^m X^{k-1} = \frac{\prod_{i=1}^N (1 - X^i)^{\theta_i(\Omega)}}{(1 - X)^{N+2}}.$$



45

Remarque 1:  $\prod_{i=1}^N (1-X^i)^{\theta_i(\Omega)}$  représente en fait le polynôme caractéristique de la

représentation linéaire canonique dans  $\mathbb{C}^N$  de tout élément de  $\Omega$ , où chaque cycle est

représenté par une matrice type  $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$  de taille la longueur du cycle.

Remarque 2 : on a l'implication  $\boxed{m > N + 1 - \theta(\Omega) \Rightarrow p_m(\Omega) = 0}$ . En effet, le terme

de droite possède un pôle en  $X = 1$  d'ordre  $(N + 2) - \sum_{i=1}^N \theta_i(\Omega) = N + 2 - \theta(\Omega)$ , tandis

que les  $\Phi_m = \sum_{k \geq 1} k^m X^{k-1}$ , qui sont clairement déterminés par  $\begin{cases} \Phi_0 = \frac{1}{1-X} \\ \Phi_{m+1} = (X \Phi_m)' \end{cases}$ , sont de

la forme  $\frac{P_m}{(1-X)^{m+1}}$  avec  $\begin{cases} \deg P_m \leq m \\ P_m(1) \neq 0 \end{cases}$  (par une récurrence immédiate), et par

conséquent admettent le pôle 1 avec le degré  $m + 1$ ; la somme de *gauche* possède donc le pôle 1 avec le degré  $\max\{m / p_m(\Omega) \neq 0\} + 1$ , d'où l'implication.

Remarque 3 : on a l'implication  $\boxed{\text{signature}(\Omega) = (-1)^m \Rightarrow p_m(\Omega) = 0}$ ; sinon  $\exists \omega \in \Omega / (-1)^{N-m} = (-1)^{N-\theta(\omega\gamma)} = \text{signature}(\omega\gamma) = \text{signature}(\gamma) * \text{signature}(\omega) = (-1)^{N-1} * \text{signature}(\Omega) = (-1)^{N-1-m}$  absurde.

On applique alors pour  $N = 2n$  et  $\Omega = \Omega_{2n}$  :  $\begin{cases} \theta(\Omega) = n \\ \text{signature}(\Omega) = (-1)^n \end{cases}$ . D'après les

remarques préliminaires,  $p_m(\Omega)$  est non nul seulement pour  $\begin{cases} m \leq (2n) + 1 - (n) \\ (-1)^n \neq (-1)^m \end{cases}$  i.e.

pour  $\begin{cases} m \leq n + 1 \\ n - m + 1 \text{ pair} \end{cases}$  i.e. pour  $\begin{cases} m = n + 1 - 2g \\ 0 \leq g \leq n/2 \end{cases}$ . Or, on a vu que  $\varepsilon_g(n) = \# \{ \omega \in \Omega_{2n} /$

$\theta(\omega\gamma) = n + 1 - 2g \} = \# \Omega * p_{n+1-2g}(\Omega) = (2n-1)!! p_{n+1-2g}(\Omega)$ . On utilise alors la formule

barbare :  $\sum_{0 \leq g \leq n/2} \frac{\varepsilon_g(n)}{(2n-1)!!} \sum_{k \geq 1} k^{n+1-2g} X^{k-1} = \frac{\prod_{i=1}^N (1-X^i)^{\theta_i(\Omega)}}{(1-X)^{N+2}} = \frac{(1-X^2)^n}{(1-X)^{2n+2}} = \frac{(1+X)^n}{(1-X)^{n+2}}$ , d'où

$\frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{0 \leq g \leq n/2} \varepsilon_g(n) k^{n+1-2g}$



(46)

= Coef de  $X^{k-1}$  dans  $\left[ \frac{(1+X)^n}{(1-X)^{n+2}} \right]$  *par identification des coefficients*

= Coef de  $t^{n+1}$  dans  $\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^k \right]$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{en évaluant de 2 façons différentes} \\ \text{le coef de } X^{k-1} t^{n+1} \text{ dans } \frac{1+t}{1-X-t-Xt} \text{ (cf annexe)} \end{array} \right.$

Et là on retombe sur du déjà vu, à savoir que  $\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 0} \omega_k(n) t^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^k$ , d'où les

$\varepsilon_g(n)$  par une démonstration déjà faite.

Nous avons bien fait le tour de notre problème de combinatoire originel, qui consistait à dénombrer les  $\varepsilon_g(n)$ . Le point essentiel de ce paragraphe était de montrer comment l'évaluation de l'intégrale gaussienne d'un polynôme sur l'espace  $\mathcal{H}_N$  pouvait servir dans un problème de combinatoire sur les cartes.

Voyons à présent comment réciproquement le dénombrement de certaines cartes peut intervenir dans le calcul d'autres intégrales, et si on peut appliquer une méthode similaire pour l'intégration de fonctions non polynomiales.

## ② intégration de fonctions non polynomiales

### a) position du problème

On s'intéresse maintenant à l'intégrale (toujours par rapport à la mesure gaussienne sur  $\mathcal{H}_N$  introduite en III) :  $\int_{\mathcal{H}_N} e^{-\frac{t}{N} \text{tr}(G^4)} d\mu(G)$ , plus difficile à évaluer ;

même pour  $N = 1$ , on veut  $\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^4 - \frac{1}{2}x^2} dx$ , qui n'est pas trivial du tout.

Comme on ne sait intégrer que des polynômes, on doit clairement développer l'exponentielle en série entière, puis appliquer Wick à chaque terme :

$$\langle e^{-\frac{t}{N} \text{tr}(G^4)} \rangle$$



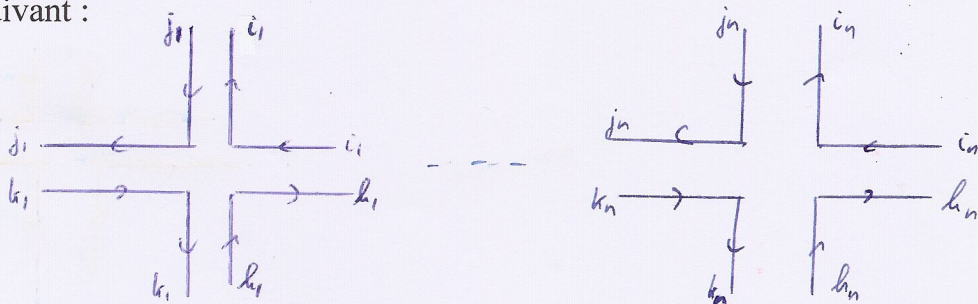
47

$$\begin{aligned}
 &= \left\langle \sum_{n \geq 0} \frac{\left(-\frac{t}{N} \text{tr}(G^4)\right)^n}{n!} \right\rangle \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n! N^n} \left\langle \left( \sum_{h, i, j, k=1}^N g_{h, i} g_{i, j} g_{j, k} g_{k, h} \right)^n \right\rangle \quad (\text{en admettant l'interversion...}) \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n! N^n} \sum_{\begin{cases} h_1, \dots, h_n \\ i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{cases}} \left\langle (g_{h_1, i_1} g_{i_1, j_1} g_{j_1, k_1} g_{k_1, h_1}) \dots (g_{h_n, i_n} g_{i_n, j_n} g_{j_n, k_n} g_{k_n, h_n}) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Vue la tête de la somme à intégrer (et on n'a pas encore appliqué Wick !), il est légitime d'avoir quelque appréhension... Les diagrammes de Feynman (ou cartes) sont des outils inestimables pour résoudre ce genre d'horreur.

b) utilisation des cartes

On représentera  $\langle (g_{h_1, i_1} g_{i_1, j_1} g_{j_1, k_1} g_{k_1, h_1}) \dots (g_{h_n, i_n} g_{i_n, j_n} g_{j_n, k_n} g_{k_n, h_n}) \rangle$  par le schéma suivant :



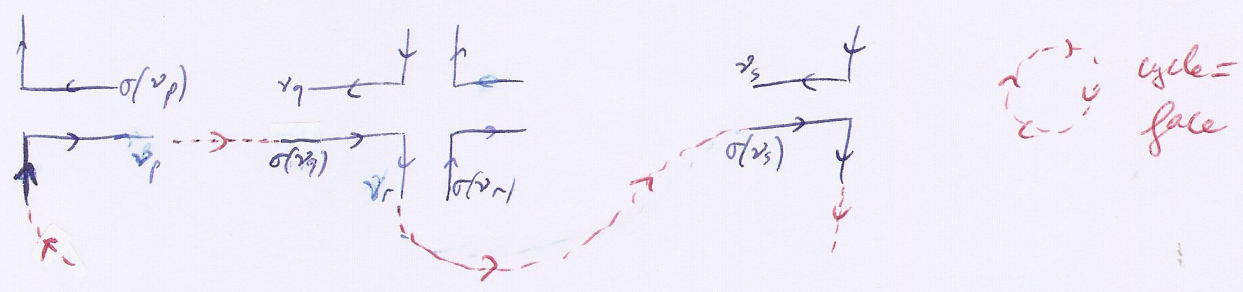
Afin de faciliter les explications, on notera  $(v_1, v_2, \dots, v_{4n})$  les indices  $(h_1, i_1, j_1, k_1, h_2, \dots, k_n)$ , et  $\sigma(v_p)$  l'indice suivant  $v_p$  autour du sommet où  $v_p$  apparaît (par exemple,  $\sigma(i_3) = j_3, \sigma(k_5) = h_5$ ) ; on a alors  $\langle (g_{h_1, i_1} g_{i_1, j_1} g_{j_1, k_1} g_{k_1, h_1}) \dots (g_{h_n, i_n} g_{i_n, j_n} g_{j_n, k_n} g_{k_n, h_n}) \rangle = \langle g_{v_1, \sigma(v_1)} \dots g_{v_{4n}, \sigma(v_{4n})} \rangle$ . Dans le schéma, chaque début de route  $\widehat{v_p \sigma(v_p)}$  correspond ainsi à un facteur de  $\langle h_{v_1, \sigma(v_1)} \dots h_{v_{4n}, \sigma(v_{4n})} \rangle$ . Un Wick-couplage sera alors représenté par la jonction routière de  $\widehat{v_p \sigma(v_p)}$  et  $\widehat{v_q \sigma(v_q)}$  si  $p$  est couplé avec  $q$  : par exemple, on



joindra  $\widehat{i_2 j_2}$  et  $\widehat{h_4 i_4}$  si  $i_2$  et  $h_4$  sont couplés (remarque : le couplage  $(h_4, i_2)$  sera qualifié de **canonique**). Une fois les couplages effectués, on dispose de sommets et de paires parmi ces sommets, i.e. d'un graphe ; mais puisqu'on a imposé un ordre cyclique autour de ces sommets, on dispose même une carte (en fait une pseudo-carte car le graphe obtenu n'est pas nécessairement connexe). Cette pseudo-carte possède  $S = n$  sommets de degré 4,  $A = \frac{4n}{2} = 2n$  arêtes, et donc  $F = A - S + \chi = n + \chi$  faces (où  $\chi$  caractéristique d'Euler de la pseudo-carte). On appellera **diagramme** à  $n$  sommets un tel objet.

Comment se traduisent les chaînes d'égalités induites par un Wick-couplage ? Coupler  $p$  et  $q$ , c'est considérer un terme  $\langle g_{v_p, \sigma(v_p)} g_{v_q, \sigma(v_q)} \rangle$  dans la somme  $\langle g_{v_1, \sigma(v_1)} \dots g_{v_{4n}, \sigma(v_{4n})} \rangle$ , qui est non nul ssi  $\begin{cases} v_p = \sigma(v_q) \\ v_q = \sigma(v_p) \end{cases}$  ; or cette égalité est représentée exactement par la jonction de  $\widehat{v_p \sigma(v_p)}$  et  $\widehat{v_q \sigma(v_q)}$  ! Les chaînes d'égalités sur les indices  $v_1, \dots, v_{4n}$  induites par un Wick-couplage se traduisent par conséquent par les chaînes de jonctions de routes induites par l'appariement correspond des débuts de route du diagramme, i.e. par des faces !

Pour mieux voir cela, supposons que  $p$  et  $q$  sont couplés : on a donc  $v_p \equiv \sigma(v_q)$ , ce qu'on représente par une jonction sur le diagramme ; en appelant  $r$  l'indice tel que  $v_r = \sigma(v_q)$ ,  $r$  est couplé mettons avec  $s$ , donc  $v_r \equiv \sigma(v_s)$ , ce qui se traduit par une autre jonction des sommets, qui s'enchaîne avec la première et qui se trouve à la première à droite juste après celle ci ; en continuant ainsi on obtient un cycle de jonctions correspondant à une face de la pseudo-carte (c'est comme pour la démonstration des ordres cycliques). Mais le plus important est que de noter que les arêtes d'une face donnée s'enchaînent comme les égalités de sommets qu'elles contiennent (à l'instar de  $v_p \equiv \sigma(v_q) = v_r \equiv \sigma(v_s) \dots$ ), et comme les arêtes d'une face bouclent, les égalités aussi !!





(62)

On a ainsi en corollaire que le nombre d'indices libres induit par un Wick-couplage est le nombre de faces  $F = n + \chi$  de la pseudo-carte ; attention, ce n'est plus la même chose que pour le  $2n$ -gone ! La contribution d'un Wick-complage à  $\langle g_{v_1, \sigma(v_1)} \dots g_{v_n, \sigma(v_n)} \rangle$  sera donc de  $N^{n+\chi}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n! N^n} \sum_{\left\{ \begin{array}{l} h_1, \dots, h_n \\ i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n \\ k_1, \dots, k_n \end{array} \right\}} \langle (g_{h_1, i_1} g_{i_1, j_1} g_{j_1, k_1} g_{k_1, h_1}) \dots (g_{h_n, i_n} g_{i_n, j_n} g_{j_n, k_n} g_{k_n, h_n}) \rangle \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n! N^n} \sum_{\left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{à } n \text{ sommets} \end{array} \right\}} N^{n+\chi} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{à } n \text{ sommets} \end{array} \right\} \frac{\sum N^\chi}{n!} (-t)^n. \end{aligned}$$

Nous avons ici une série génératrice exponentielle des  $\sum_{\left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{à } n \text{ sommets} \end{array} \right\}} N^\chi$ . Le problème est que

les diagrammes sur lesquels on somme n'ont aucune raison d'être connexes. Or, dénombrer des trucs pas connexes, c'est en général plus dur que de dénombrer les mêmes trucs connexes ; il serait donc agréable de se ramener à une somme sur des diagrammes connexes (des *vraies* cartes).

Un résultat plus général, démontré en annexe, affirme qu'il suffit pour cela de prendre le logarithme de notre série génératrice. Appliquons :

$$\begin{aligned} & \ln \left( \langle e^{-\frac{t}{N} \text{tr}(G^4)} \rangle \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{connexes} \\ \text{à } n \text{ sommets} \end{array} \right\} \frac{\sum N^\chi}{n!} (-t)^n \end{aligned}$$



50

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \sum_{g \geq 0} \sum N^{\chi} \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{connexes} \\ \text{\`a } n \text{ sommets} \\ \text{de genre } g \end{array} \right.$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \sum_{g \geq 0} \sum N^{2-2g} \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{connexes} \\ \text{\`a } n \text{ sommets} \\ \text{de genre } g \end{array} \right.$$

$$= N^2 \sum_{g \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \sum \left( \frac{1}{N^2} \right)^{ng} \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes} \\ \text{connexes} \\ \text{\`a } n \text{ sommets} \\ \text{de genre } g \end{array} \right.$$

$$= N^2 \sum_{g \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \sum \left\{ \begin{array}{l} \sum 1 \\ \text{diagrammes} \\ \text{connexes} \\ \text{\`a } n \text{ sommets} \\ \text{de genre } g \end{array} \right\} \left( \frac{1}{N^2} \right)^{ng} \right)$$

$$= N^2 \sum_{g \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} K_g(n) \right) \left( \frac{1}{N^2} \right)^g \left\{ \begin{array}{l} \text{o\`u } K_g(n) \text{ nombre de diagrammes} \\ \text{connexes \`a } n \text{ sommets de genre } g \end{array} \right.$$

On a donc  $\boxed{\frac{1}{N^2} \ln \langle e^{-\frac{t}{N} \text{tr}(G^4)} \rangle = \sum_{g \geq 0} E_g(-t) \left( \frac{1}{N^2} \right)^g}$  où  $E_g(t)$  s\u00e9rie g\u00e9n\u00e9ratrice

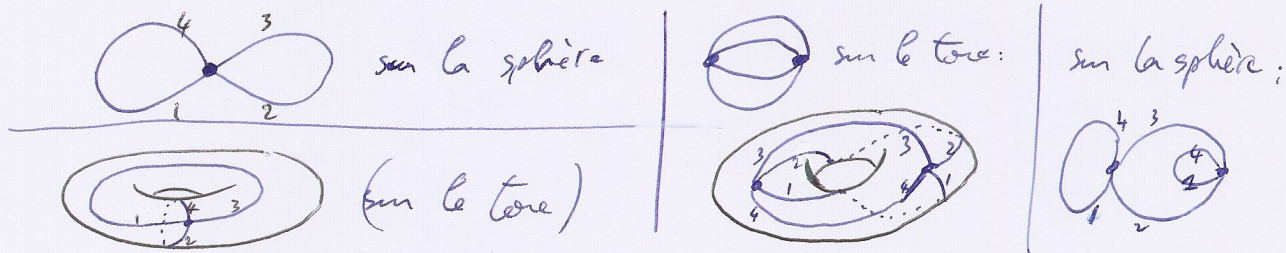
exponentielle des  $K_g(n)$ .

Nous avons donc ramen\u00e9 l'\u00e9valuation de notre int\u00e9grale horrible \u00e0 un probl\u00e8me compl\u00e8tement autre, \u00e0 savoir d\u00e9nombrer une certaine cat\u00e9gorie de cartes. Pr\u00e9cisons



(51)

alors bien la catégorie à laquelle nous avons affaire ici : un diagramme connexe à  $n$  sommets est une carte à  $n$  sommets, chacun de degré 4, où on peut numéroter toutes les arêtes à l'aide des nombres 1, 2, 3, et 4, de sorte que chaque sommet possède les quatre numéros autour de lui (une boucle ayant 2 numéros) et ce dans l'ordre cyclique imposé 1-2-3-4. Par exemple :



Nous ne pousserons pas plus loin ici le calcul des  $K_g(n)$ , car nous avons voulu seulement illustrer comment les cartes servent à intégrer des fonctions non polynomiales.

### ③ d'autres exemples d'intégrales

Nous présentons dans ce bref paragraphe, sans démonstrations, quelques-unes des nombreuses possibilités offertes par les intégrales de matrices par rapport à une mesure gaussienne, ainsi que leur rapport avec la combinatoire des cartes.

Changer  $H^4$  en  $H^3$  dans  $\int \mathcal{H}_N e^{-\frac{t}{N} \text{tr}(H^4)} d\mu(H)$  donne lieu à l'énumération des cartes à  $n$  sommets tous de degré 3, ou, de manière équivalente, des cartes à  $n$  faces toutes triangulaires (**triangulations**).

D'autres polynômes utilisant la trace à l'instar de  $\text{tr}(H^{2n})$ , du type  $\prod_i (\text{tr}(H^{k_i}))^{m_i}$ , permettent de dénombrer des cartes ayant des faces de degré fixé.

Considérer une mesure gaussienne avec une moyenne non nulle peut servir à énumérer des cartes sans boucles.



Intégrer sur l'espace des matrices symétriques à coefficients réels (au lieu des matrices hermitiennes) est relié aux cartes sur des surfaces non orientées.

Revenons un instant sur le pourquoi général des méthodes exposées dans cet article, à savoir que la contribution d'un Wick-couplage donné est  $N^L$  où  $L$  est le nombre d'indices libres induit par ce Wick-couplage. Pourquoi cela marche-t-il ? En grande partie grâce à la formule de Wick permettant d'intégrer des produits de fonctions par rapport à une mesure gaussienne, qui a pu être établie grâce au caractère polynomial quadratique du logarithme de la fonction caractéristique d'une mesure gaussienne. Plus précisément, c'est le fait de ne pas avoir trop de termes  $s_\beta$  dans le

logarithme qui permet de simplifier  $m_\alpha =$

$$\sum_{i=1}^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!}$$

Que se passe-t-il alors lorsque l'on prend des mesures non gaussiennes ? Peut-on espérer avoir un analogue de la formule de Wick ? Il faudrait déjà pour cela que le logarithme de la fonction caractéristique de la mesure considérée ne soit pas trop gros ; par exemple, qu'il soit polynomial. Or le théorème de Marcinkiewicz exclut d'office toutes les mesures autres que gaussiennes, car il affirme que si le logarithme de la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité (mesure positive normalisée, et donc à valeurs dans  $[0, 1]$ ), est polynomial, alors ce polynôme est nécessairement quadratique et la mesure gaussienne. Donc pour toutes les distributions autres que gaussiennes, il faudra faire avec des séries infinies.

On pourrait alors, pour pallier ce problème, intégrer par rapport à une fonction quelconque qui ne soit pas la densité d'une distribution de probabilité, et qui serait l'inverse pour la transformée de Fourier de l'exponentielle d'un polynôme. La recherche et l'utilisation de telles fonctions pourraient se révéler intéressantes et donner lieu à de nouveaux problèmes sur les cartes.



# Annexe

## Densités des mesures gaussiennes

On commencera par le lemme :  $\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{itx - \frac{1}{2}\lambda x^2} dx = e^{-\frac{1}{2\lambda}t^2}$  pour  $\lambda > 0$ .

Démonstration : posons pour cela  $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{itx - \frac{1}{2}\lambda x^2} dx$ , clairement dérivable

sous le signe intégral par domination, d'où  $\varphi'(t)$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} ix \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{itx - \frac{1}{2}\lambda x^2} dx \\
 &= i \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left( \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{itx - \frac{1}{2}\lambda x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + i \frac{t}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \frac{1}{2}\lambda x^2} dx \right) \begin{cases} \text{en dérivant } e^{itx} \text{ et} \\ \text{en intégrant } x e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \end{cases} \\
 &= -\frac{t}{\lambda} \varphi(t), \text{ d'où } \varphi(t) \\
 &= \varphi(0) e^{-\frac{1}{2\lambda}t^2} \\
 &= \left( \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} dx \right) e^{-\frac{1}{2\lambda}t^2} \\
 &= \left( \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) e^{-\frac{1}{2\lambda}t^2} \\
 &= e^{-\frac{1}{2\lambda}t^2}.
 \end{aligned}$$

On montre ensuite que si B symétrique à coefficients réels à valeurs propres

toutes  $> 0$ , on a  $\int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2}[Bx|x]} e^{i[t|x]} dx = e^{-\frac{1}{2}[C\hat{e}|\hat{e}]}$  où  $B = C^{-1}$ . On en

déduira la densité d'une mesure gaussienne de matrice de covariance C inversible.

Démonstration : on diagonalise  $B = P D^{-1} P^*$  où P orthogonale, d'où :



(54)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2}[B x | x]} e^{i[t | x]} dx \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i[P P^* x | t] - \frac{1}{2}[P D^{-1} P^* x | P P^* x]} dx \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i[P y | t] - \frac{1}{2}[D^{-1} y | y]} |\det P| dy \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en posant } y = P^* x \\ \text{et car } P \text{ orthogonale} \end{array} \right. \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left( i \sum_j \left( \sum_k p_{j,k} y_k \right) t_j - \frac{1}{2} [D^{-1} y | y] \right) dy \quad \text{car } \det(P) = \pm 1 \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left( i \sum_k \left( \sum_j p_{j,k} t_j \right) y_k - \frac{1}{2} \sum_k d_k^{-1} y_k^2 \right) dy \\
&= \sqrt{\frac{d_1^{-1} \dots d_N^{-1}}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left( i \sum_k [{}^t P t]_k y_k - \frac{1}{2} \sum_k d_k^{-1} y_k^2 \right) dy \\
&= \prod_k \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{d_k^{-1}}{2\pi}} e^{i [P^* t]_k y_k - \frac{1}{2} d_k^{-1} y_k^2} dy_k \\
&= \prod_k e^{-\frac{1}{2} d_k [P^* t]_k^2} \quad \text{d'après le lemme} \\
&= e^{-\frac{1}{2} d_1 [P^* t]_1^2 - \dots - \frac{1}{2} d_N [P^* t]_N^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2} [D (P^* t) | (P^* t)]} \\
&= e^{-\frac{1}{2} [P D P^* t | t]} \\
&= e^{-\frac{1}{2} [C t | t]} \quad \text{CFQD.}
\end{aligned}$$

On peut ensuite calculer les moyennes du premier ordre :  $\langle x_i \rangle = 0$ .

Démonstration : avec  $C = P D P^*$ , on a :  $\langle x_i \rangle$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} x_i \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2}[B x | x]} dx$$



(55)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} (P y)_i e^{-\frac{1}{2} [D^{-1} y | y]} dy \quad \text{en posant } y = P^* x \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \sum_{j=1}^N p_{i,j} y_j \right) e^{-\frac{1}{2} (d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \sum_{j=1}^N p_{i,j} \int_{\mathbb{R}^N} y_j e^{-\frac{1}{2} (d_j^{-1} y_j^2)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k \neq j} d_k^{-1} y_k^2\right) dy \\
&= 0 \quad \text{car le } y_j e^{-\frac{1}{2} (d_j^{-1} y_j^2)} \text{ est impair}
\end{aligned}$$

Restent les moyennes quadratiques :  $\langle x_i x_j \rangle = c_{i,j}$ . On utilisera pour cela un

autre lemme :  $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{2} \lambda x^2} dx$ , qui résulte d'une simple intégration

par parties.

Démonstration :  $\langle x_i x_j \rangle$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N} x_i x_j \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2} [B x | x]} dx \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} (P y)_i (P y)_j e^{-\frac{1}{2} [D^{-1} y | y]} dy \quad \text{en posant } y = P^* x \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \sum_{k, k'=1}^N p_{i,k} p_{j,k'} y_k y_{k'} \right) e^{-\frac{1}{2} (d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \sum_{k=1}^N p_{i,k} p_{j,k} y_k^2 \right) e^{-\frac{1}{2} (d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } y_k y_{k'} \text{ impair} \\ \text{pour } k \neq k' \end{array} \right. \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \sum_{k=1}^N p_{i,k} p_{j,k} \int_{\mathbb{R}^N} y_k^2 e^{-\frac{1}{2} (d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy \\
&= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \sum_{k=1}^N p_{i,k} p_{j,k} \int_{\mathbb{R}} y_k^2 e^{-\frac{1}{2} (d_k^{-1} y_k^2)} dy_k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l \neq k} d_l^{-1} y_l^2\right) \frac{dy}{dy_k}
\end{aligned}$$



56

$$= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \sum_{k=1}^N p_{i,k} p_{j,k} d_k \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(d_k^{-1} y_k^2)} dy_k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l \neq k} d_l^{-1} y_l^2\right) \frac{dy}{dy_k} \quad (\text{lemme})$$

$$= \sum_{k=1}^N p_{i,k} p_{j,k} d_k \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2}(d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy$$

$$= \left( \sum_{k=1}^N p_{i,k} d_{k,k} p_{k,j}^* \right) \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2} [B x | x]} dx$$

$$= \left( \sum_{k,k'=1}^N p_{i,k} d_{k,k'} p_{k',j}^* \right) * 1$$

$$= (P D P^*)_{i,j}$$

$$= c_{i,j} \quad \text{CFQD.}$$



57

### Moyenne des monômes impairs

On montre ici que  $\boxed{|\alpha| \text{ impair} \Rightarrow \langle x^\alpha \rangle = 0}$ , en utilisant les notations multi-indices introduites dans la démonstration de la formule de Wick.

Démonstration :  $\langle x^\alpha \rangle$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^N} x^\alpha \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} e^{-\frac{1}{2}[B x | x]} dx \\
 &= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} (P y)^\alpha e^{-\frac{1}{2}[D^{-1} y | y]} dy \quad \text{en posant } y = P^* x \\
 &= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \sum_{i_1=1}^N p_{1, i_1} y_{i_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \sum_{i_N=1}^N p_{N, i_N} y_{i_N} \right)^{\alpha_N} e^{-\frac{1}{2}(d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy \\
 &= \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \sum_{\substack{i_{1,1} \dots i_{1,\alpha_1} \\ \dots \\ i_{N,1} \dots i_{N,\alpha_N}}} a(i_{j,k}) y^{\beta(i_{j,k})} \right) e^{-\frac{1}{2}(d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy
 \end{aligned}$$

[ les  $a(i_{j,k})$  étant des coefficients réels et les  $\beta(i_{j,k})$  des multi-indices dont la longueur  $|\beta(i_{j,k})| = |\alpha|$  est impaire ]

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{i_{1,1} \dots i_{1,\alpha_1} \\ \dots \\ i_{N,1} \dots i_{N,\alpha_N}}} a(i_{j,k}) \int y^{\beta(i_{j,k})} e^{-\frac{1}{2}(d_1^{-1} y_1^2 + \dots + d_N^{-1} y_N^2)} dy \\
 &= \sum_{\substack{i_{1,1} \dots i_{1,\alpha_1} \\ \dots \\ i_{N,1} \dots i_{N,\alpha_N}}} a(i_{j,k}) * 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car quand on regroupe les différentes} \\ \text{coordonnées de } y, \text{ au moins une est impaire} \end{array} \right. \\
 &= 0 \quad \text{CQFD.}
 \end{aligned}$$



## Analyticité : quelques notions

On dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}$  est **analytique** en un point  $t_0$  si  $f$  peut s'écrire sous forme d'une série entière autour de  $t_0$  :  $f(t) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{m_\alpha}{\alpha!} (t-t_0)^\alpha$  avec les notations multi-indices de la démonstration de la formule de Wick. On prendra par la

suite  $t_0 = 0$ , et donc pour  $\|t\|_\infty$  assez petit, on a  $f(t) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha$ .

Dans le cas  $n = 1$ , on rappelle alors que la famille  $\left(\frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha\right)_{\alpha \geq 0}$  est sommable dans tout disque fermé du voisinage de définition, que  $f$  est  $C^\infty$  sur ce voisinage, et que les  $m_\alpha$  sont déterminés par  $m_\alpha = \left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}\right](t=0)$  (d'où le nom de **série de Taylor** parfois donné au développement de  $f$ )

On étend aisément cela pour  $n$  quelconque dans  $\mathbb{N}^*$  : on a  $\left(\frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha\right)_{|\alpha| \geq 0}$  sommable dans toute boule fermée du voisinage de définition (démonstration identique au cas  $n = 1$ ), et on obtient par une récurrence assez simple que  $m_\alpha = \left[\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t^\alpha}\right](t=0)$  (considérer  $f(t)$  comme une fonction de  $t_1$  seul).

On rappelle également que si  $f$  et  $g$  sont analytiques en 0 alors  $fg$  l'est aussi, d'où un résultat analogue pour un produit fini.

Montrons maintenant que si  $f$  analytique en 0 et  $f(0) = 1$ , alors  $\ln f$  est aussi analytique en 0. On écrit  $f(t) = 1 + \sum_{|\alpha| > 0} \frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha$ , d'où  $\ln f(t)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i > 0} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \left( \sum_{|\alpha| > 0} \frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha \right)^i \\
 &= \sum_{i > 0} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \left( \sum_{|\alpha| > 0} M_{\alpha, i} t^\alpha \right) \quad (\text{produit fini de fonctions analytiques}) \\
 &= \sum_{|\alpha| > 0} \left( \sum_{i > 0} \frac{(-1)^{i+1}}{i} M_{\alpha, i} \right) t^\alpha \quad \text{sous réserve de la sommabilité de } \left( \frac{1}{i} M_{\alpha, i} t^\alpha \right)_{|\alpha|, i > 0}
 \end{aligned}$$



Or, en remarquant que  $M_{\alpha, i} = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_i = \alpha \\ \forall j, |\alpha_j| > 0}} \frac{m_{\alpha_1} \dots m_{\alpha_i}}{\alpha_1! \dots \alpha_i!}$ , on a  $|M_{\alpha, i}|$

$$\leq \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_i = \alpha \\ \forall j, |\alpha_j| > 0}} \frac{|m_{\alpha_1}| \dots |m_{\alpha_i}|}{\alpha_1! \dots \alpha_i!}, \text{ d'où } \sum_{i > 0} \sum_{|\alpha| > 0} \left\| \frac{1}{i} M_{\alpha, i} t^\alpha \right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{i > 0} \frac{1}{i} \sum_{|\alpha| > 0} \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_i = \alpha \\ \forall j, |\alpha_j| > 0}} \frac{|m_{\alpha_1}| \dots |m_{\alpha_i}|}{\alpha_1! \dots \alpha_i!} \|t\|_\infty^{|\alpha|}$$

$$= \sum_{i > 0} \frac{1}{i} \left( \sum_{|\alpha| > 0} \frac{|m_\alpha|}{\alpha!} \|t\|_\infty^{|\alpha|} \right)^i$$

$= -\ln \left( 1 - \sum_{|\alpha| > 0} \frac{|m_\alpha|}{\alpha!} \|t\|_\infty^{|\alpha|} \right)$  qui est bien définie pour  $\|t\|_\infty$  assez petit, car la famille

$\left( \frac{m_\alpha}{\alpha!} t^\alpha \right)_{|\alpha| > 0}$  est sommable pour  $t$  dans une boule fermée où  $f$  est définie, et puisque la

série entière  $S(t) = \sum_{|\alpha| > 0} \frac{|m_\alpha|}{\alpha!} t^\alpha$  peut être rendue aussi petite que voulue pour  $t$  assez petit

(remarquer que  $S(0) = 0$  et  $S$  continue) ; donc  $\left( \frac{1}{i} M_{\alpha, i} t^\alpha \right)_{|\alpha|, i > 0}$  sommable *CQFD*.

On écrit alors la série de Talyor de  $\ln f(t) = \sum_{|\beta| > 0} \frac{s_\beta}{\beta!} t^\beta$ , et on justifie ensuite la

sommabilité de la famille  $\left( \frac{1}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} t^\alpha \right)_{|\alpha|, i > 0}$  dont on a besoin dans le

lemme 2 de la démonstration de la formule de Wick.

En effet, dans la preuve de ce lemme 2, on part de  $\exp ( \ln f(t) ) = \exp \left( \sum_{|\beta| > 0} \frac{s_\beta}{\beta!} t^\beta \right)$  pour arriver à la ligne nécessitant l'interversion ; mais en majorant le



6a

module de  $\frac{1}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} t^\alpha$  par  $\frac{1}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{|s_{\beta_1}| \dots |s_{\beta_i}|}{\beta_1! \dots \beta_i!} \|t\|_\infty^{|\alpha|}$ , en sommant le

tout sur les  $|\alpha|$  et  $i > 0$ , puis en remontant le calcul, on arrive à majorer la somme de la famille des modules des coefficients de la famille  $\left( \frac{1}{i!} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_i = \alpha \\ \forall j, |\beta_j| > 0}} \frac{s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}}{\beta_1! \dots \beta_i!} t^\alpha \right)_{|\alpha|, i > 0}$  par

$\exp \left( \sum_{|\beta| > 0} \frac{|s_\beta|}{\beta!} \|t\|_\infty^{|\beta|} \right)$ , qui est bien définie pour  $t$  dans une boule où  $\ln f(t)$  est bien défini,

d'où la sommabilité cherchée.



(61)

## Analyticité d'une fonction caractéristique

Soit  $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}[C t | t]}$  où  $t$  vecteur de  $\mathbb{R}^N$  et  $C$  une matrice de covariance, réelle, diagonalisable en  $C = P D P^*$  avec  $P^* = {}^t P$  ( $P$  orthogonale). On a  $\varphi(P t)$

$$= e^{-\frac{1}{2}[P D P^* P t | P t]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}[D t | t]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \sum d_i t_i^2}$$

$$= \prod e^{-\frac{1}{2} d_i t_i^2}$$

analytique en 0 comme produit fini de fonctions l'étant (ici :  $t \rightarrow e^{-\frac{1}{2} d_i t_i^2}$ ). Pour passer à  $\varphi$ , il suffit de montrer que si  $f$  est analytique en 0 ainsi que  $|f|$  (la série entière obtenue en remplaçant les coefficients  $c_\alpha$  du développement de  $f$  par leurs valeurs absolues) et  $A$  linéaire, alors  $f \circ A$  est aussi analytique en 0 : prendre en effet  $f = \varphi \circ P$  et  $A = P^*$  ; remarquer que  $|\varphi \circ P|$  est bien analytique en 0 car ses coefficients sont majorés par ceux

de  $\prod e^{+\frac{1}{2} d_i t_i^2}$  qui est analytique en 0.

Montrons cela. Dans de telles hypothèses, et puisque  $A$  continue en 0, on a pour  $t$  assez petit  $f(A t)$

$$= \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (A t)^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \prod_i (A_i t)^{\alpha_i} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où les } A_i \text{ sont les applications coordonnées} \\ \text{de } A, \text{ qui sont également linéaires} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \sum_{|\gamma| \geq 0} \beta_{\alpha, \gamma} t^\gamma \quad \text{car } \prod_i (A_i t)^{\alpha_i} \text{ est un polynôme en les } t_i$$

$$= \sum_{|\gamma| \geq 0} \left( \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \beta_{\alpha, \gamma} \right) t^\gamma, \text{ d'où l'analyticité de } f \circ A \text{ en 0 si l'on justifie l'interversion, i.e. si}$$

l'on montre que la famille  $(c_\alpha \beta_{\alpha, \gamma} t^\gamma)_{\alpha, \gamma}$  est sommable. Or, en notant,  $|A_i|$  l'application  $A_i$  où l'on a remplacé les coefficients par leurs valeurs absolues,  $|t|$  le vecteur  $t$  où l'on a remplacé les coordonnées par leurs valeurs absolues, et  $\beta'_{\alpha, \gamma}$  les coefficients (positifs !)

du polynôme  $\prod_i (|A_i| t)^{\alpha_i}$  en les  $t_i$  (remarquer que  $|\beta_{\alpha, \gamma}| \leq \beta'_{\alpha, \gamma}$ ), on a pour  $t$  assez

petit (puisque  $|A|$  continue en 0) :  $|f(|A| |t|)$

$$= \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| (|A| |t|)^\alpha$$



62

$= \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| \sum_{|\gamma| \geq 0} \beta'_{\alpha, \gamma} |t|^\gamma$ , d'où  $(c_\alpha \beta'_{\alpha, \gamma} t^\gamma)_{\alpha, \gamma}$  sommable car tout est positif, d'où la sommabilité de la famille  $(c_\alpha \beta_{\alpha, \gamma} t^\gamma)_{\alpha, \gamma}$  puisque  $|\beta_{\alpha, \gamma}| \leq \beta'_{\alpha, \gamma}$  *CQFD*.



## Résidus et séries formelles

Considérons le corps  $\mathbb{C}((X))$  des séries de Laurent, dont les éléments sont de la forme  $S = S(X) = \sum_{n \geq k(S)} a_n(S) X^n$  où  $k(S)$  entier relatif et les  $a_n(S)$  complexes, muni de la

dérivation formelle qui vérifie les propriétés usuelles, ainsi que de la composition. On

définit la valuation de  $S$  par  $\text{Val } S = \min\{n \in \mathbb{Z} / a_n(S) \neq 0\}$ , ainsi que le résidu de  $S$  en

0 par  $\text{Res}_0 S = \text{Res}_{X=0} S(X) = \text{Coef de } \frac{1}{X} \text{ dans } S = a_{-1}(S)$ . On se propose de montrer que

$\text{Res}_{t=0} [S(\Phi(t)) \Phi'(t)] = \text{Val } \Phi * \text{Res}_{X=0} S(X)$ , ce qui permettra d'opérer des

changement de variables pour calculer des résidus, à l'instar des changement de variables utilisés en intégration. L'application qui figure dans cet article est celle où

$$\begin{cases} \Phi(t) = \text{th}(t/2) \\ \text{Val } \Phi = 1 \end{cases}$$

Démonstration : on commence par remarquer que si  $f \in \mathbb{C}((X))$ , alors  $\text{Res}_0 f' = 0$  car  $f'$

ne peut pas comporter de terme en  $\frac{1}{X}$ . On a d'autre part  $\text{Res}_0 \frac{f'}{f} = \text{Val } f$ ; en effet, en

écrivant  $f(X) = X^{\text{Val } f} g(X)$  où  $\text{Val } g = 0$ , on a  $\frac{f'}{f} = \frac{(\text{Val } f) * X^{(\text{Val } f)-1} * g + X^{\text{Val } f} * g'}{X^{\text{Val } f} g}$

$$= \frac{\text{Val } f}{X} + \frac{g'}{g} \text{ avec } \text{Val } \frac{g'}{g} \geq 0.$$

Soit alors  $S$  et  $\Phi$  dans  $\mathbb{C}((X))$ , avec  $S = \sum_n a_n X^n$ . On a  $\text{Res}_{u=0} [S(\Phi(u)) \Phi'(u)]$

$$= \text{Res}_{u=0} \left[ \sum_n a_n \Phi(u)^n \Phi'(u) \right]$$

$$= \text{Res}_{u=0} \left[ \left( \sum_{n \neq -1} a_n \frac{\Phi(u)^{n+1}}{n+1} \right)' + a_{-1} \frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} \right]$$

$$= 0 + a_{-1} \text{Val } \Phi$$

$$= \text{Val } \Phi * \text{Res}_0 S \quad \text{CFQD.}$$



Séries génératrices classiques

On montre ici la proposition basique :  $\frac{1}{(1-X)^k} = \sum_{j \geq 0} \binom{j+k-1}{j} X^j$ .

Démonstration : on aura besoin du lemme suivant :  $\sum_{i=0}^n \binom{i+k}{i} = \binom{n+k+1}{n}$ . Clair pour

$$n = 0, \text{ puis si vrai au rang } n-1, \text{ alors } \sum_{i=0}^n \binom{i+k}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+k}{i} + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{n-1} + \binom{n+k}{n} \\ = \binom{n+k+1}{n} \text{ ok.}$$

Notre proposition est triviale pour  $k = 1$ . Ensuite, si vraie au rang  $k$ , on a  $\frac{1}{(1-X)^{k+1}}$

$$= \frac{1}{1-X} \sum_{j \geq 0} \binom{j+k-1}{j} X^j \\ = \sum_{i \geq 0} X^i \sum_{j \geq 0} \binom{j+k-1}{j} X^j \\ = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ i \geq 0}} \binom{j+k-1}{j} X^{i+j} \\ = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{i+j=n \\ j \geq 0 \\ i \geq 0}} \binom{j+k-1}{j} X^{i+j} \\ = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^n \binom{j+k-1}{j} \right) X^n \\ = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n} X^n \quad \text{CFQD.}$$



65

## Formule d'inversion utilisant des $C_n^k$

Soit  $n \geq 0$ ,  $(a_0, \dots, a_n)$  et  $(b_0, \dots, b_n)$  des complexes reliés par les  $n+1$  relations

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, a_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} b_i. \quad \text{On veut inverser ces formules sous la forme}$$

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, b_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a_i.$$

Démonstration : une idée consiste à introduire les matrices  $P = \left( \binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$  et  $P' =$

$$\left( (-1)^{j-i} \binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}. \quad \text{En considérant les bases } C = (1, X, \dots, X^n) \text{ et } C' = (1, 1+X, \dots,$$

$$(1+X)^n) \text{ de } \mathbb{C}_n[X], \text{ on a les relations } \forall k \in \{0, \dots, n\}, C'_{k,1} = (1+X)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i =$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^n P_{k,i} C_{i,1} = [P C]_{k,1}, \text{ d'où } \underline{C' = P C} : P \text{ est donc la matrice de passage de}$$

$$C \text{ à } C'. \text{ Or, on a } \forall k \in \{0, \dots, n\}, C_{k,1} = X^k = (1+X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (1+X)^i =$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (1+X)^i = \sum_{i=0}^n P'_{k,i} C'_{i,1} = [P' C']_{k,1}, \text{ d'où } \underline{C = P' C'} : P' \text{ est donc la}$$

matrice de passage de  $C'$  à  $C$ . Par conséquent,  $\boxed{P^{-1} = P'}$ . Reste à remarquer que les relations sur les  $a_i$  et les  $b_i$  se traduisent matriciellement de manière analogue à celles sur  $C$  et  $C'$ , à savoir  $A = P B$  ; d'où le résultat en inversant  $P$ .



## Invariants de conjugaison du groupe symétrique

Etant donné une permutation  $\sigma$  dans  $\mathcal{S}_N$ , on appelle **classe de conjugaison** de  $\sigma$  l'ensemble des  $\varphi^{-1} \sigma \varphi$  pour  $\varphi$  décrivant  $\mathcal{S}_N$ . On va montrer que les nombres  $\theta_i(\sigma)$  comptant le nombre d'orbites de longueur  $i$  dans la décomposition de  $\sigma$  en cycles disjoints sont des **invariants de conjugaison**, i.e.  $\theta_i(\varphi^{-1} \sigma \varphi) = \theta_i(\sigma)$ .

*Démonstration* : si  $\sigma$  se décompose sous la forme  $\gamma_1 \dots \gamma_s$ , remarquons déjà que  $\varphi^{-1} \sigma \varphi = (\varphi^{-1} \gamma_1 \varphi) \dots (\varphi^{-1} \gamma_s \varphi)$ . Regardons donc l'effet de la conjugaison sur un cycle  $\gamma = (a_1, \dots, a_p)$  : si  $n \notin \varphi^{-1}(\{a_1, \dots, a_p\})$ , alors  $\varphi(n) \notin \{a_1, \dots, a_p\}$  et est donc laissé invariant par  $\gamma$ , d'où  $[\varphi^{-1} \gamma \varphi](n) = \varphi^{-1}(\gamma(\varphi(n))) = \varphi^{-1}(\varphi(n)) = n$  ; si  $n$  s'écrit  $\varphi^{-1}(a_i)$ , alors  $[\varphi^{-1} \gamma \varphi](n) = [\varphi^{-1} \gamma](\varphi(\varphi^{-1}(a_i))) = [\varphi^{-1} \gamma](a_i) = \varphi^{-1}(a_{i+1})$ . Par conséquent,  $\varphi^{-1}(a_1, \dots, a_p) \varphi = (\varphi^{-1}(a_1), \dots, \varphi^{-1}(a_p))$  : le conjugué d'un cycle est un cycle de même longueur. Mais on a mieux : en reprenant la décomposition de  $\sigma$ , on voit que les cycles  $(\varphi^{-1} \gamma_i \varphi)$ , de même longueur que  $\gamma_i$ , sont à supports disjoints puisque  $\varphi$  bijective. D'où le résultat.



67

## Une égalité sur les coef de 2 séries formelles

On va montrer que  $\boxed{\text{Coef de } X^{k-1} \text{ dans } \left[ \frac{(1+X)^n}{(1-X)^{n+2}} \right] = \text{Coef de } t^{n+1} \text{ dans } \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^k \right]}$ .

En effet, évaluons le coef de  $X^{k-1} t^{n+1}$  dans  $\frac{1+t}{1-X-t-Xt}$ . On a d'une part :

$$\begin{aligned} & \frac{1+t}{1-X-t-Xt} \\ &= \frac{\frac{1+t}{1-t}}{1-X \frac{1+t}{1-t}} \\ &= \frac{1+t}{1-t} \sum_{i \geq 0} X^i \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^i \\ &= \sum_{i \geq 0} X^i \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{i+1}, \text{ d'où une première égalité :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Coef de } X^{k-1} t^{n+1} \text{ dans } \left[ \frac{1+t}{1-X-t-Xt} \right] = \text{Coef de } t^{n+1} \text{ dans } \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^k}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1+t}{1-X-t-Xt} \\ &= \frac{1+t}{1-X} \frac{1}{1-t \frac{1+X}{1-X}} \\ &= \frac{1+t}{1-X} \sum_{i \geq 0} t^i \left( \frac{1+X}{1-X} \right)^i \\ &= \sum_{i \geq 0} t^i \frac{(1+X)^i}{(1-X)^{i+1}} + \sum_{i \geq 0} t^{i+1} \frac{(1+X)^i}{(1-X)^{i+1}} \\ &= \sum_{i \geq 0} t^i \frac{(1+X)^i}{(1-X)^{i+1}} + \sum_{i \geq 1} t^i \frac{(1+X)^{i-1}}{(1-X)^i} \\ &= \frac{1}{1-X} + \sum_{i \geq 1} t^i \left( \frac{(1+X)^i}{(1-X)^{i+1}} + \frac{(1+X)^{i-1}}{(1-X)^i} \right) \end{aligned}$$



68

$$= \frac{1}{1-X} + \sum_{i \geq 1} t^i (1+X)^{i-1} \frac{(1+X)+(1-X)}{(1-X)^{i+1}}$$

$$= \frac{1}{1-X} + \sum_{i \geq 1} t^i 2 \frac{(1+X)^{i-1}}{(1-X)^{i+1}}, \text{ d'où la seconde égalité :}$$

$$\boxed{\text{Coef de } X^{k-1} t^{n+1} \text{ dans } \left[ \frac{1+t}{1-X-tXt} \right] = \text{Coef de } X^{k-1} \text{ dans } \left[ 2 \frac{(1+X)^n}{(1-X)^{n+2}} \right].}$$

La proposition en découle alors.



## Séries génératrices exponentielles et connexité

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $\Omega_n^1$  un ensemble fini d'objets connexes (le 1 signifiant « une » composante connexe), numérotés chacun à l'aide de  $n$  numéros (« 1 », « 2 », ..., «  $n$  ») ; considérer par exemple un ensemble fini de graphes connexes chacun à  $n$  sommets  $S_1, S_2, \dots, S_n$  numérotés canoniquement. On muni  $\Omega_n^1$  d'une fonction poids, notée  $\mu$  ; par exemple le nombre d'arêtes.

On crée ensuite de nouveaux objets, non connexes, en « réunissant » sans ordre défini des objets pris parmi  $\Omega_1^1, \Omega_2^1, \Omega_3^1 \dots$  ; on obtient ainsi un ensemble  $\Omega$  d'objets à plusieurs composantes connexes, chacune numérotée à l'aide de  $k$  numéros ( $k$  variant bien sûr avec la dite composante connexe). On peut ainsi, pour prendre un exemple, engendrer l'ensemble des graphes à partir de celui des graphes connexes numérotés.

On prolonge  $\mu$  sur  $\Omega$  en posant  $\mu(\omega) = \prod_{\substack{\omega_c \text{ composante} \\ \text{connexe de } \omega}} \mu(\omega_c)$ . Par exemple, toujours sur

les graphes,  $\mu(\text{graphe}) = 2^{\text{nombre d'arêtes}}$  fonctionne puisque le nombre d'arêtes est connexement additif.

Considérons  $\Omega_n$  l'ensemble des  $\omega$  de  $\Omega$  ayant  $n$  numéros, i.e. qui s'écrivent sous la forme  $\omega_1 \cup \dots \cup \omega_k$ , avec  $\omega_j$  dans  $\Omega_{i_j}^1$  pour tout  $j$ , et  $i_1 + \dots + i_k = n$ . On veut montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\left( \sum_{\Omega_n^1} \mu(\omega) \right)}{n!} x^n = \ln \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\left( \sum_{\Omega_n} \mu(\omega) \right)}{n!} x^n \right). \text{ En application, on prendra pour}$$

$\Omega_n$  l'ensemble des diagrammes à  $n$  sommets, et  $\mu(\omega) = N^{\chi(\omega)}$ , qui est bien connexement multiplicative car la constante d'Euler est connexement additive.

Démonstration : notons  $a_n = \sum_{\Omega_n^1} \mu(\omega)$ , et  $a(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} x^n$ . On veut  $e^{a(x)} = 1 +$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\left( \sum_{\Omega_n} \mu(\omega) \right)}{n!} x^n. \text{ Regardons pour cela les } \frac{a(x)^k}{k!}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 \geq 1 \\ \dots \\ i_k \geq 1}} \frac{a_{i_1} \dots a_{i_k}}{i_1! \dots i_k!} x^{i_1 + \dots + i_k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n \geq 1} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1! \dots i_k!} \sum_{\Omega_{i_1}^1 \times \dots \times \Omega_{i_k}^1} \mu(\omega_1) \dots \mu(\omega_k) x^n \\
&= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \frac{1}{k!} \sum_{\Omega_{i_1}^1 \times \dots \times \Omega_{i_k}^1} \mu(\omega_1 \cup \dots \cup \omega_k) \right) \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On remarque alors que l'opérateur  $\sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \frac{1}{k!} \sum_{\Omega_{i_1}^1 \times \dots \times \Omega_{i_k}^1}$  correspond à

sommer sur l'ensemble  $\Omega_n^k$  des  $\omega$  de  $\Omega_n$  qui ont exactement  $k$  composantes connexes. En effet, choisir un objet de  $\Omega_n^k$ , c'est d'abord sélectionner les  $k$  composantes connexes  $(\omega_1, \dots, \omega_k)$  dans  $\Omega_{i_1}^1 \times \dots \times \Omega_{i_k}^1$  (d'où le deuxième signe somme), qui n'ont cependant aucune raison d'être ordonnées (d'où le  $1/k!$ ), puis il faut choisir les  $i_1$  numéros de la première composante parmi  $n$ , puis les  $i_2$  numéros de la seconde parmi  $n - i_1$ , etc..., ce qui se fait en  $\binom{n}{i_1} \binom{n-i_1}{i_2} \dots \binom{n-i_1-\dots-i_{k-1}}{i_k} = \frac{n!}{i_1! (n-i_1)!} \frac{(n-i_1)!}{i_2! (n-i_1-i_2)!} \dots \frac{(n-i_1-\dots-i_{k-1})!}{i_k! (n-i_1-\dots-i_k)!} =$

$$\frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \text{ choix. On en déduit : } \boxed{\frac{a(x)^k}{k!} = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\Omega_n^k} \mu(\omega) \right) \frac{x^n}{n!}}.$$

On peut alors calculer :  $e^{a(x)}$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{a(x)^k}{k!} \\
&= 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\Omega_n^k} \mu(\omega) \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$



$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k \geq 1} \sum_{\Omega_n^k} \mu(\omega) \right) \frac{x^n}{n!}$$
$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\Omega_n} \mu(\omega) \right) \frac{x^n}{n!} \quad CFQD.$$



## Bibliographie

- [1] **Zvonkin A.** Matrix integrals and map enumeration : an accessible introduction – *Math. Comput. Modelling*, vol. 26 (1997), 281-304.
- [2] **Harer J., Zagier D.** The Euler characteristic of the moduli space of curve – *Invent. Math.*, 1986, vol. 85, 457-485.
- [3] **Zagier D.** On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups – *Nieuw. Arch. Wiskd., Sen IV*, 1995, vol. 13, no. 3, 489-495.
- [4] **Niven I.** Formal power series – *Amer. Math. Monthly*, vol. 76, no. 8 (Oct. 1969), 871-889.
- [5] **Lukacs E.** Characteristic functions – Griffin, London, 1969.
- [6] **White T. A.** Graphs, groups and surfaces – North Holland, Amsterdam, 1984 (2<sup>d</sup> edition).
- [7] **Fréchet M., Fan K.** Introduction à la topologie combinatoire – Vuibert, Paris (1946).



73

# Sommaire

## Introduction

### I/ cartes – graphes plongés

① graphes

② g-tores

③ cartes

- a) définitions - exemples
- b) théorème d'Euler
- c) ordre cyclique
- d) cartes engendrées par des faces

### II/ mesures gaussiennes – intégrales de polynômes

① quelques notions sur les mesures

- a) définition - exemples
- b) intégrale
- c) mesure image
- d) densité
- e) moyenne
- f) fonction caractéristique

② mesures gaussiennes

- a) définition
- b) propriétés

③ intégration de polynômes - formule de Wick

- a) lemme 1
- b) lemme 2
- c) formule de Wick

### III/ l'espace $\mathcal{H}_N$ des matrices hermitiennes

① définitions

② une mesure gaussienne sur  $\mathcal{H}_N$

③ exemple de polynôme :  $\text{tr}(H^{2n})$



## IV/ cartes et mesures gaussiennes : un lien très fort

### ① retour au problème des $\varepsilon_g(n)$

- a) interprétation géométrique des Wick-couplages
- b) coloriage du  $2n$ -gone
- c) calcul de  $\langle \text{tr}(H^{2n}) \rangle$
- d) calcul des  $\varepsilon_g(n)$
- e) le groupe symétrique à la rescousse

### ② intégration de fonctions non polynomiales

- a) position du problème
- b) utilisation des cartes

### ③ d'autres exemples d'intégrales

## Annexe

Densités des mesures gaussiennes

Moyenne des monômes impairs

Analyticité : quelques notions

Analyticité d'une fonction caractéristique

Résidus et séries formelles

Séries génératrices classiques

Formule d'inversion utilisant des  $C_n^k$

Invariants de conjugaison du groupe symétrique

Une égalité sur les coef de 2 séries formelles

Séries génératrices exponentielles et connexité

## Bibliographie

## Sommaire