Inversions, complexes et applications

Marc SAGE

7 octobre 2005

Table des matières

Résumé

On étudie ici de manière sommaire une transformation oubliée de nos jours : l'inversion. On s'intéresse ensuite, grâce aux nombres complexes, à deux inégalités géométriques que l'on peut en déduire (dont la célèbre inégalité de Ptolémée).

1 Inversion

1.1 Définition

Soit O un point du plan euclidien et k un réel non nul.

On définit l'*inversion* de *pôle* O et de *rapport* k comme la transformation du plan privé de O qui à M associe l'unique point M' défini par

$$\left\{ \begin{array}{c} M' \in (OM) \\ \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \end{array} \right. .$$

1.2 Notation complexe

En notation complexe, cela s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} z' \in k\mathbb{R}^+ z \\ |z|\,|z'| = |k| \end{array} \right. \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{c} z' = k\lambda z \\ |z|\,|k|\,\lambda\,|z| = |k| \end{array} \right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{c} z' = k\lambda z \\ \lambda = \frac{1}{|z|^2} \end{array} \right. \iff z' = k\frac{z}{|z|^2} \iff z' = \frac{k}{\overline{z}}.$$

Sous cette forme, il apparaît qu'une inversion est involutive :

$$z'' = \frac{k}{\overline{z'}} = \frac{k}{\overline{\left(\frac{k}{\overline{z}}\right)}} = \frac{k}{\overline{k}}\overline{\overline{z}} = z.$$

De plus, la composée de deux inversions de même pôle et de rapport k puis k' nous donne une homothétie de rapport $\frac{k}{k'}$:

$$z'' = \frac{k}{\overline{z'}} = \frac{k}{\overline{\left(\frac{k'}{\overline{z}}\right)}} = \frac{k}{\overline{k'}}\overline{\overline{z}} = \frac{k}{k'}z.$$

1.3 Action sur les droites et cercles

Regardons maitenant l'action d'une inversion i de pôle O sur les droites et les cercles.

Tout d'abord, si Δ est une droite passant O, alors il est clair que $\Delta \setminus O$ est envoyée sur elle même.

Soit maintenant Δ une droite ne passant pas par O et H le projeté de O sur Δ. On remarque par des dessins grossiers que l'image semble être un cercle de diamètre $[Oi\,(H)]$. Montrons cela par les complexes.

Quitte à conjuger i par une similitude de centre O adéquate, ce qui n'a aucun effet car

$$\mathrm{Sim}_{O,\theta,\lambda} \circ i \circ \mathrm{Sim}_{O,\theta,\lambda}^{-1}(z) = \lambda e^{i\theta} \frac{1}{\overline{\frac{e^{-i\theta}}{\lambda} z}} = \frac{1}{\overline{z}} = i\,(z)\,,$$

on peut toujours supposée Δ paramétrisée par

$$\Delta : \mathrm{Re}\, z = 1 > 0.$$

Soit $z = 1 + it$ sur cette droite. On a

$$i\,(z) = \frac{k}{\overline{1+it}} = \frac{k\,(1+it)}{1+t^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} i\,(z) - \frac{i\,(H)}{2} &= \left| \frac{k}{\overline{1+it}} - \frac{i\,(1)}{2} \right| = \left| \frac{k\,(1+it)}{1+t^2} - \frac{k}{2} \right| = |k| \left| \frac{2 + 2it - \left(1+t^2\right)}{2\,(1+t^2)} \right| \\ &= \frac{|k|}{2} \frac{1}{(1+t^2)} \left|1 - t^2 + 2it\right| = \frac{|k|}{2} \frac{1}{|1+it|^2} \left|(1+it)^2\right| = \frac{|k|}{2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que i envoie Δ dans le cercle de diamètre $[Oi\,(H)]$. Pour voir que l'image décrit bien tout le cercle (privé de 0), on remarque que la partie réelle $\frac{k}{1+t^2}$ de $i\,(z)$ décrit $\pm\,]0, |k|]$.

Réciproquement, puisque i est involutive, i envoie les cercles passant par O sur des droites.

2 Applications

2.1 Ptolémée

Soit P, Q, R, S quatre points distincts du plan complexe. On veut montrer que

$$PQ \cdot RS + PS \cdot QR \geq PR \cdot QS$$

avec égalité ssi les quatre points P, Q, R, S sont cocycliques dans cet ordre.

Solution proposée.
On se place dans le plan complexe d'origine prise abitrairement en S, avec les affixes

$$\begin{cases} z_P = p \\ z_Q = q \\ z_R = r \\ z_S = 0 \end{cases}.$$

L'égalité à montrer est donc équivalente à

$$|p-q|\,|r| + |p|\,|q-r| \overset{?}{\geq} |p-r|\,|q| \iff \left|\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right| \overset{?}{\geq} \left|\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right|,$$

ce qui n'est autre que l'inégalité triangulaire.
Pour avoir le cas d'égalité, introduisons les points A, B, C d'affixes

$$\begin{cases} z_A = \frac{1}{\overline{p}} \\ z_B = \frac{1}{\overline{q}} \\ z_C = \frac{1}{\overline{r}} \end{cases}$$

(il fallait bien faire apparaître les inversions quelque part...). Le cas d'égalité s'écrit alors

$$\left|\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{\overline{p}}\right| + \left|\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{\overline{q}}\right| = \left|\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{\overline{p}}\right| \iff AB + BC = AC \iff B \in [AC].$$

En passant à l'inversion de pôle $O = S$ et en notant $\mathcal{C}$ le cercle image de (AC) (qui passe par S), l'appartenance ci-dessus se réécrit

$$B \in [AC] \iff i(B) \in \operatorname{arc}_{\mathcal{C}}(i(A)\,i(C)) \iff Q \in \operatorname{arc}_{\mathcal{C}}(PR) \iff P, Q, R, S \text{ cocycliques dans cet ordre.}$$

2.2 Une autre inégalité

Soit P, Q, R, S quatre points distincts cocycliques du plan complexe. Montrer que

$$|PQ - RS| + |PS - QR| \geq 2\,|PR - QS|.$$

Solution proposée.
On raisonne comme pour Ptolémée, en passant en complexes avec les affixes

$$\begin{cases} z_P = p \\ z_Q = q \\ z_R = r \\ z_S = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} z_A = \frac{1}{\overline{p}} \\ z_B = \frac{1}{\overline{q}} \\ z_C = \frac{1}{\overline{r}} \end{cases},$$

de sorte que les points A, B, C sont alignés par cocyclicité de P, Q, R, S. On pose également

$$O = R$$

origine du plan complexe.
L'inégalité à montrer s'écrit maitenant

$$\begin{array}{rl} & ||p-q|-|r|| + ||p|-|q-r|| \geq 2\,||p-r|-|q|| \\ \iff & \left|\left|\frac{1}{r}\right|\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|-\left|\frac{1}{pq}\right|\right| + \left|\left|\frac{1}{p}\right|\left|\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right|-\left|\frac{1}{qr}\right|\right| \geq 2\left|\left|\frac{1}{q}\right|\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right|-\left|\frac{1}{pr}\right|\right| \\ \iff & |OC\cdot BA - OB\cdot OA| + |OA\cdot BC - OB\cdot OC| \geq 2\,|OB\cdot AC - OA\cdot OC| \\ \iff & \left|\frac{OC\cdot BA}{OB\cdot AC}-\frac{OA}{AC}\right| + \left|\frac{OA\cdot BC}{OB\cdot AC}-\frac{OC}{AC}\right| \geq 2\left|1-\frac{OA\cdot OC}{OB\cdot AC}\right|. \end{array}$$

Utilisons la trigonométrie du triangle OAC muni de la cévienne $[OB]$ avec $B\in[AC]$. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=\widehat{AOB} \\ \gamma=\widehat{COB} \\ \widehat{O}=\alpha+\gamma \end{array}\right. .$$

Remarquer dès maintenant la symétrie $\left\{\begin{array}{l} \alpha\longleftrightarrow\gamma \\ A\longleftrightarrow C \end{array}\right.$ qui simplifiera nos calculs.

Regardons les deux termes de gauche :

$$\frac{OC\cdot BA}{OB\cdot AC}-\frac{OA}{AC}=\frac{OC}{AC}\frac{AB}{OB}-\frac{AO}{AC}=\frac{\sin A}{\sin\widehat{O}}\frac{\sin\alpha}{\sin A}-\frac{\sin C}{\sin\widehat{O}}=\frac{\sin\alpha-\sin C}{\sin\widehat{O}}$$

et on obtient de même

$$\frac{OA\cdot BC}{OB\cdot AC}-\frac{OC}{AC}=\frac{\sin\gamma-\sin A}{\sin\widehat{O}}.$$

Reste le terme de droite. On a d'une part

$$OA\cdot OC=\frac{\mathcal{A}(AOC)}{\frac{1}{2}\sin\widehat{O}}$$

et d'autre part

$$OA\cdot OC=\frac{\mathcal{A}(AOC)}{\frac{\mathcal{A}(AOC)}{\frac{1}{2}\sin\widehat{OBA}}}$$

en comparant la hauteur issue de O à la cévienne OB, d'où

$$\frac{OA\cdot OC}{OB\cdot AC}=\frac{\frac{\mathcal{A}(AOC)}{\frac{1}{2}\sin\widehat{O}}}{\frac{\mathcal{A}(AOC)}{\frac{1}{2}\sin\widehat{OBA}}}=\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin\widehat{O}}.$$

On veut donc

$$\left|\frac{\sin\alpha-\sin C}{\sin\widehat{O}}\right|+\left|\frac{\sin\gamma-\sin A}{\sin\widehat{O}}\right|\overset{?}{\geq}2\left|1-\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin\widehat{O}}\right|\iff|\sin\alpha-\sin C|+|\sin\gamma-\sin A|\overset{?}{\geq}2\left|\sin\widehat{O}-\sin(A+\alpha)\right|.$$

Il ne reste plus qu'à factoriser selon la formule bien connue (n'est-ce pas ?)

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

On a ainsi

$$\begin{array}{rcl} \sin\widehat{O}-\sin(A+\alpha) & = & 2\sin\frac{(\alpha+\gamma)-(A+\alpha)}{2}\cos\frac{(\alpha+\gamma)+(A+\alpha)}{2} \\ & = & 2\sin\frac{\gamma-A}{2}\cos\frac{\pi-C+\alpha}{2}=2\sin\frac{\gamma-A}{2}\sin\frac{C-\alpha}{2}, \end{array}$$

puis

$$\sin\alpha-\sin C=2\sin\frac{\alpha-C}{2}\cos\frac{\alpha+C}{2}=2\sin\frac{\alpha-C}{2}\cos\frac{\pi-\gamma-A}{2}=2\sin\frac{\alpha-C}{2}\sin\frac{A+\gamma}{2}$$

et de même

$$\sin\gamma-\sin A=2\sin\frac{\gamma-A}{2}\sin\frac{C+\alpha}{2}.$$

On veut finalement démontrer

$$\begin{array}{rl} & \left|2\sin\frac{\alpha-C}{2}\sin\frac{A+\gamma}{2}\right|+\left|2\sin\frac{\gamma-A}{2}\sin\frac{C+\alpha}{2}\right|\overset{?}{\geq}2\left|2\sin\frac{\gamma-A}{2}\sin\frac{C-\alpha}{2}\right| \\ \iff & \sin\frac{|C-\alpha|}{2}\sin\frac{A+\gamma}{2}+\sin\frac{|A-\gamma|}{2}\sin\frac{C+\alpha}{2}\overset{?}{\geq}2\sin\frac{|A-\gamma|}{2}\sin\frac{|C-\alpha|}{2} \\ \iff & \sin\frac{|C-\alpha|}{2}\left(\sin\frac{A+\gamma}{2}-\sin\frac{|A-\gamma|}{2}\right)+\sin\frac{|A-\gamma|}{2}\left(\sin\frac{C+\alpha}{2}-\sin\frac{|C-\alpha|}{2}\right)\overset{?}{\geq}0 \end{array}$$

évident à présent car tous les demi-angles sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ où sin est croissante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{|A-\gamma|}{2} \leq \frac{A+\gamma}{2} = \frac{\pi - C - a}{2} \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{|C-\alpha|}{2} \leq \frac{C+\alpha}{2} = \frac{\pi - A - \alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. .$$

Si l'on veut étudier le cas d'églité, on remarquera que les termes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{A+\gamma}{2} - \sin \frac{|A-\gamma|}{2} \\ \sin \frac{A+\gamma}{2} - \sin \frac{|A-\gamma|}{2} \end{array} \right.$$

ne sont jamais nul, sinon par exemple $\gamma = 0$, $B = C$ et $Q = R$, *absurde* car les points de départ sont supposés distincts.

Ainsi, on a égalité ssi

$$\begin{array}{ll} & \sin \dfrac{|C-\alpha|}{2} = 0 = \dfrac{|A-\gamma|}{2} \\ \Longleftrightarrow & \alpha = C \text{ et } \gamma = A \\ \Longrightarrow & \widehat{OBA} = \pi - \alpha - A = \pi - C - \gamma = \widehat{OBC} \\ \Longrightarrow & B = m\,[AC]\,, \end{array}$$

ce qui ne semble pas évident à caractériser en fonction des points P, Q, R, S cocycliques de départ.