Algèbre commutative – Introduction à la géométrie algébrique

Marc SAGE (notes étendues d'un mini-cours d'Yves Laszlo)

2007

Table des matières

1 Introduction

Tous les anneaux seront considérés commutatifs et unitaires.
On pourra noter abusivement 0 l'anneau nul $\{0\}$ ou l'idéal nul $(0) = \{0\}$.

À l'instar des anneaux de polynômes ou de fonctions régulières, nous proposons de voir les systématiquement les éléments d'un anneau comme des *fonctions* continues agissant sur les *points* d'un espace topologique (le spectre de l'anneau), les lieux d'annulation de ces fonctions formant une base des fermés d'une topologie (celle de ZARISKI). Cela mettra en correspondance les anneaux et les espaces topologiques *via* le foncteur « spectre ». Nous nous attacherons à voir comment les propriétés algébriques et topologiques s'entremêlent. En tout fin de chapitre, nous proposons un humble aperçu de la théorie des schémas.

1.1 Guide intuitif : anneau des fonctions réelles continues sur un quasi-compact

Par propriété *géométrique*, on entendra les propriétés topologiques d'un espace dont la topologie est définie de façon algébrique (polynomiale). On s'intéressera selon cette acception au *sens géométrique* des liens entre topologie et algèbre[1].

Intuition géométrique.

1. un *espace topologique* : un compact X de $\mathbf{R}^n$ (eg sa boule unité $\mathbf{B}$, le segment $[0,1]$)
2. un *objet algébrique* : l'anneau $\mathcal{C}(X)$ des fonctions réelles continues sur X.

Idéaux maximaux : pour $x \in X$, l'éval en x a pour noyau $\mathfrak{m}_x$ et le quotient est le corps $\mathbf{R}$, donc les $\mathfrak{m}_x$ sont maximaux. Réciproque ? OK. D'où la prop *les idéaux max de* $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ *sont les* $\mathfrak{m}_x$ *pour* x *décrivant* X. Interprétation :

on a une bijection entre les *points* de l'espace X et le spectre maximal de $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$

Le nullstellensatz est en effet équivalent à ce que tout idéal *strict* de $k[X_1,...,X_n]$ possède un zéro commun à tous ses éléments.

Cet énoncé a un lien avec un problème apparemment sans rapport : *déterminer si une famille de fonctions possède un zéro commun*. Un énoncé répondant à une telle question portant sur des lieux d'annulation s'appelle un *nullstellsatz*[2]. Pour voir le rapport, on remarquera qu'un point annule une famille de fonction ssi il annule son idéal engendré : alors ou bien cet idéal est total, donc contient la fonction 1 (la quête d'un zéro commun est alors perdue d'avance), ou bien il est strict, donc est inclus un idéal maximal, mettons un $\mathfrak{m}_x$, ce qui montre que x est un zéro commun. (Réciproquement, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal, alors ses éléments ont un zéro x en commun, d'où $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_x$ et l'égalité par maximalité). On peut donc reformuler le **nullstellensatz** :

tout idéal *strict* de $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ possède un zéro commun à tous ses éléments.

Revenons la première interprétation : elle nous dit que la donnée de l'anneau $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ nous donne ensemblistement accès à l'espace X (prendre Sp_m). Peut-on également récupérer sa topologie ? OUI car un fermé F de X donnent un fonctions continue $d(F,\cdot)$ et réciproquement toute fonction $f \in \mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ donne lieu à un fermé

$$V(f) := \{x \in X \; ; f(x) = 0\},$$

d'où une bijection entre $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ et la topologie de X. **Conclusion**[3] :

connaître l'anneau $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ revient à connaître l'espace topologique X :
les points de X constituent (*via* la bijection $x \leftrightarrow \mathfrak{m}_x$) le spectre maximal de A
les fermés de X sont (engendré par) les lieux $V(a)$ d'annulation des fonctions a continues sur X

Variétés. Observons tout d'abord le comportement des variétés $V(a)$. Psons $V(I) := \bigcap_{i\in I} V(i)$ pour $I \subset A$. Alors

[1] Il serait tentant de parler de *topologie algébrique* mais l'usage veut que cette dernière étudie plutôt des objets algébriques associés "naturellement" aux espace topologiques, à l'instar de leur homologie.

[2] *null-stellen-satz* : littéralement « énoncé portant sur les lieux d'annulation ». À l'origine le nom donné au **théorème des zéros** de HILBERT

[3] Formellement : deux espaces quasi-compacts X et Y sont homéomorphes ssi les anneaux $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ et $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ sont isomorphes.

1. **(décroissance)** *si un point annule une famille, il en annule toute sous famille* : $I \subset J \Longrightarrow V(J) \subset V(I)$
2. **(variété vide)** *aucun point n'annule toutes les fonctions* (à cause de la fonction 1) : $V(A) = \emptyset$
   une fonction ne s'annule pas ssi elle est inversible : $V(a) = \emptyset \Longleftrightarrow a \in A^\times \Longleftrightarrow 1 \in (a)$
3. **(les variétés ne voient que les idéaux)** *un point annule une fonction ssi il annule tout produit par elle* : $V(P) = V((P))$
4. **(les variétés ne voient pas les puissances)** *un point annule une fonction ssi il annule toutes ses puissances* : $V(a^n) = V(a)$
5. **(les variétés ne voient que les idéaux radicaux)** *un point annule une fonction ssi il annule une racine de cette fonction* $V(I) = V\left(\sqrt{I}\right)$
6. **(intégrité de l'esapce d'arrivée)** *un point annule un produit fini de fonctions ssi il annule l'une d'entre elles* : $V(ab) = V(a) \cup F(b)$
7. **(stabilité par intersection)** *un point annule plusieurs fonctions à la fois ssi il en annule toute combinaison linéaire* : $\bigcap_i V(a_i) = V\left(\sum_i (a_i)\right)$

Dualité. Etant donné un fermé F, comment décrire un idéal J tel que $F = V(J)$? Un réponse naïve serait l'ensemble

$$I(F) := \left\{f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})\ ;\ f_{|F} = 0\right\}$$

des fontions nulles sur tout F (il est clair que $F \subset V(I(F))$). Montrons cela pour les métriques. Soit $x \in V(I(F))$. Alors $d(\cdot, F)$ est nulle sur F, donc annule x, d'où $x \in \operatorname{Adh} F = F$. Question naturelle (unicité) : a-t-on $I(V(J)) = J$ pour tout idéal J ? On a clairement l'inclusion $\supset$. Rq un tel J doit être radical. Essysons dans l'autre sens. Soit J radical, def $J' := I(V(J))$ (rq $V(J) = V(J')$) et mq $J' \subset J$. Soit $a \in J'$ alors $J \subset J + (a) \subset J'$, d'où (par décroissance) $V(J) \supset V(J + (a)) \supset V(J') = V(J)$ et l'égalité $V(J) = V(J + (a)) = V(J) \cap V(a)$, d'où $V(J) \subset V(a)$. On veut en déduire $a \in J$. Regardons le cas où J est monogène $J = (j)$. Cherchons à écrire $a = bj$. Nécessairmeent, b vaut $\frac{a}{j}$ en dehors de $V(j)$ et pourrait valoir n'improte quoi : mais pour coller sur $V(a) \backslash V(J)$ il est bien de prendre 0 pour ce n'importe quoi. Synthèse : on définit b par 0 sur $V(a)$ et $\frac{a}{j}$ sur ${}^cV(j)$ (recollement de deux aplication continues qui coincident à l'intersection) Alors a et bj coindeint sur ${}^cV(j)$ et sur $V(a)$, donc sont égales, cqfd. Généraleisons : $J = (j_k)$. CHerchons à écrire $a = \sum b_k j_k$. Pour tout k on définit b_k par 0 sur $V(a)$ et $\frac{a}{j_x}$ sur ${}^cV(j_x) \backslash \cup_{j \neq x} {}^cV(j_y)$ (deux à deux disjoints quand x varie). Alors a et $\sum b_k j_k$ coincident, donc sont égales, donc (si J DTF) $a \in \sum A j_k = J$. **COnclusion** :

$$\begin{aligned} \text{on a } V(I(F)) &= F \text{ pour tout fermé} \\ \text{on a } I(V(\mathfrak{r})) &= \mathfrak{r} \text{ pour tout idéal radical } \mathfrak{r} \textbf{ de type fini.} \end{aligned}$$

L'égalité $I(V(\mathfrak{r})) = \mathfrak{r}$ est en fait *équivalente* aux **nullstellensatz** précédents : si $V(J) = \emptyset$, alors $J \subset \sqrt{J} = I(V(J)) = I(\emptyset) = A$.

Du guide analytique au guide algébrique. Nous avons vu que les fermés de $[0, 1]$ sont les lieux d'annulation des fonctions continues sur $[0, 1]$, Les polynômes de $\mathbf{R}[t]$ font partie de ces dernières et ont l'avantage de s'exprimer de façon purement *algébrique* : que dire alors de la topologie faible qu'ils induisent, çed celle dont les fermés sont (engendrés par) les variétés $V(P) := \{x \in t\ ; P(x) = 0\}$ lorsque P décrit $\mathbf{R}[t]$? Comme ci-dessis, $\bigcap V(P_k)$ ne dépend que de l'idéai (P_k), qui est monogène car $\mathbf{R}[t]$ est princal, donc les variétés sont bien stables par intersecton et définissent les fermés d'une topologie "algébrique", plus grossière que la topo "analytique"de $[0, 1]$ et attribuée à Oscar Zariski. Ses fermés strcits sont les parties *finies* (pour P non nul on a $V(P) = \{\text{racines de } P\}$) et l'on a par ailleurs $I(\{x_1, ..., x_k\}) = \left(\prod (t - x_i)\right)$, d'où l'on déduit $I(V(P)) = \left(\prod_{P(x)=0} (t - x)\right)$ et l'égalité $I(V(P)) = (P)$ si P est simplement scindé.

Regardons à présent la topologie de Zariski pour elle même :

1. les polynômes de $\mathbf{R}[t]$ constituent un **anneau de fonctions continues sur l'espace** $[0, 1]$ vers $\mathbf{R}$ (tout polynôme de dergé d n'atteignet un réel fié qu'au plus d fois, la préimge d'une partie de card c est de cardinal au plus cd)
2. Elle **conserve la quasi-compacité de l'espace** $[0, 1]$ (la vacuité d'une intersection de fermés $\bigcap V(I_k) = \emptyset$ se réécrit $V\left(\sum I_k\right) = \emptyset$ et donc équivaut à $1 \in \sum I_k$; par définition de la somme de parties, l'intersection est vide ssi une sous-intersection *finie* est vide, *CQFD*)
3. Elle **conserve la séparation**[4] T_1 **de l'espace** $[0, 1]$ (ie tout singleton fermé) ($\{x\} = V(t - x)$) On perd cependant le caractère T_2 puisque deux ouverts non vides se rencontrent toujours (sinon l'union des fermés associés serat infinie).

[4]La lettre T, initiale du mot allemand *Trennungsaxiom* (« axiome de séparation »), a été introduite par Pavel Aleksandrov et Heinz Hopf dans leur traité *Topologie* de 1935 (p. 58 et suivantes), où ils présentaient une liste de tels axiomes.

Augementons la dimension en regardant la tologie de ZARISKI sur $[0,1]^n$, ie la topologie faible induite par $\mathbf{R}[t_1,...,t_n] \hookrightarrow C^0([0,1]^n, \mathbf{R})$, ie dont les fermé sont engendré par les $V(I)$ pour I décrivant $\mathbf{R}[t]$. Signalons deux différences avec $n=1$: les $V(P)$ ne suffisent plus pour les fermés(on n'a plus la principalité) et les fermés strcits ne sont plus nécesairemnt finis ($V(t_1-t_2)$ est infini). Toutefois, on peut montrer que la topo de ZARISI sur $\mathbf{R}^n$ permet de retrouver celle forte[5] et que les trois propriétés précédentes sont conservées (1 par def, 2 idem, 3 quasi idem (un point x' annulant (t_i-x_i) annule chaque t_i-x_i, forçaant $x'_i=x_i$))

Généralisaont encore et remplaçons $\mathbf{R}$ par n'importe quel corps k et l'espace $[0,1]^n$ par une partie X de k^n. Alors les fonctios polynomaile $\in k[t_1,...,t_n]$ ne constituent plus un sous'anneau de $C^0(X,\mathbf{R})$ (quel rapport k et $\mathbf{R}$ auraient ?) mais de $\mathcal{F}(X,k)=k^X$: il se trouve que ses éléments agissent continuement sur l'espace X (pour les topo de ZARISI : la préimage par un $\pi \in k[t_1,...,t_n]$ d'un fermé $V(P)$ de k est le fermé $V(P\circ\pi)$) , ce qui permet de voir encore une fois les polynômes comme un **anneau de fonctions continues sur l'espace** X. Les point 2 et 3 sont encore vérifiés (rien de change de $\mathbf{R}$ à k). En définissant pareil $I(X)=\left\{P\in k\left[\overrightarrow{t}\right] \ ; \ P_{|X}=0\right\}$. idéal radical, on dispose des **nullstellsatz** :

on a une bijection entre les *points* de l'espace k^n et le spectre maximal de $\mathbf{R}[t_1,...,t_n]$
tout idéal *strict* de $\mathbf{R}[t_1,...,t_n]$ possède un zéro commun à tous ses éléments.
on a $V(I(F))=F$ pour tout fermé
on a $I(V(\mathfrak{r}))=\mathfrak{r}$ pour tout idéal radical $\mathfrak{r}$ **si** k **est algébriquement clos**

RQ : topo de Zariski sur $\operatorname{Sp} C(X)$ est celle de X.

DAns les deux cas : le foncteur $X\mapsto \mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ (ou $k^n\mapsto k[t_1,...,t_n]\subset C^0(k^n,k)$) est "essentiellement injectif" : la connaissance de l'anneau des fonctions continues détermine entièrement l'espace, ensemblistement et topologiquement.

MOTIVATION : Qu'en est-il de sa surjetivité ? Si l'on part d'un anneau quelconque A, peut-on trouver unespace X dont il soit un espace de *fonctions continues* dessus dont les fermés sont engendré par les $V(a)$? Un premier candidat serait le specmax muni de la topologie de Zariski mais on en voit déjà les limites : dans les deux cas, hypothèse *bancales* au nullstellsatz :

1. type fini pour $\mathcal{C}$ (indispensable car $I(V(o_x))=I(\{x\})=\mathfrak{m}_x\neq o_x$)
2. alg clos pour k^n (indipenable car $V_{\mathbf{R}}\left(X^2+1\right)=\emptyset$).

Il va falloir rajouter d'autre points à X pour que tout cela fonctionne bien joliement : remplcare le specmax par TOUT le spectre

Signalons en exercice. un premier lien alg-topo : un fermé est dit irrédcitble s'il n'est pas union de deux fermés (analoguq algq : les élments irrec). Montrons que la factorialité entriane que *tour femré est réunion (finie) de fermé irréd.* .En généla, $\mathbf{R}\left[\overrightarrow{t}\right]$ est factoriel, donc $V(P)=V\left(\prod P_i^{\omega_i}\right)=V\left(\prod P_i\right)=\bigcup \underbrace{V(P_i)}_{\text{fermé irrédutible}}$

or $\mathbf{R}\left[\overrightarrow{t}\right]$ noethérien donc $V(I)=V\left(\sum(P_k)\right)=\bigcap V(P_k)=\bigcap\bigcup V(P_k)=\bigcup\bigcap V(p_i)=\bigcup V\left(\sum(p_i)\right)$; or deux les (p_i) sont maximaux, donc deux à deux étranfers, donc leur somme fait tout A ou ne bouge pas, cqfd

1.2 Quelques rappels sur le vocabulaire des idéaux et les nullstellensatz

Un anneau est ***réduit*** s'il n'a pas de nilpotent non nul. Par exemple, si A est un anneau et $\sqrt{0}$ l'idéal de ses nilpotents, l'***anneau réduit*** de A défini par $A_{red} := {}^{A}\diagup_{\sqrt{0}}$ est réduit.

Un idéal d'un anneau est ***réduit***, resp. ***premier***, resp. ***maximal***, si le quotient par cet idéal est réduit, resp. intègre, resp. un corps. Un idéal maximal est premier (et strict), un idéal premier est réduit. Les réciproques sont fausses[6].

Les idéaux (resp. idéaux réduits, resp. idéaux premiers, idéaux maximaux) d'un anneau quotient ${}^{A}\diagup_{I}$ sont les ${}^{J}\diagup_{I}$ où J est un idéal (resp. idéal réduit, resp. idéal premier, resp. idéal maximal) contenant I. En notant $a\mapsto\overline{a}$ la projection *modulo* un idéal I d'un anneau A, on a pour tout $a\in A$ et tout idéal J contenant I l'équivalence[7] $\overline{a}\in\overline{J} \iff a\in J$.

[5] les fermés stricts maximaux sont les $V(P)$ pour P irréd, donc (en prenant le générateur unitaire de $I(V(P))\supset(P)$) on récupère au moins les irréd, d'où tous les polynômes par produit, d'où les fonctions continues par densité et les fermés comme ci-dessus

[6] Dans l'anneau $k[x,y]$, on a une suite strictement croissante d'idéaux $I\subsetneq \mathsf{r}\subsetneq \mathsf{p}\subsetneq \mathsf{m}$ avec $I:=(x^2y^2)$ non réduit, $\mathsf{r}:=(xy)$ réduit mais non premier, $\mathsf{p}:=(x)$ premier mais non maximal et $\mathsf{m}:=(x,y)$ maximal.

[7] Si $\overline{a}\in\overline{J}$, il y a un $j\in J$ tel que $\overline{a}=\overline{j}$, d'où $a\in\overline{j}=jI\subset J$ puisque J est un idéal. La réciproque est triviale.

Le ***spectre*** (resp. ***spectre maximal***) est l'ensemble des idéaux premiers (resp. maximaux). On le note Spec ou Sp (resp Spec Max ou Sp Max ou Spm ou Sp_m).

Un anneau est nul ssi son spectre est vide.

Un anneau est intègre ssi l'idéal nul est premier (ou réduit).

Un anneau est un corps ssi il possède exactement deux idéaux (ceux-ci sont alors les idéaux nul et total), ou encore ssi tous ses idéaux (stricts) sont premiers, ou encore ssi l'idéal nul est maximal.

Dans un anneau, les idéaux sont tous radicaux ssi tout élément est multiple de son carré.

(**théorème de Krull**) Tout idéal strict est inclus dans un idéal maximal.

La réunion des idéaux maximaux est formée des non inversibles. C'est aussi la réunion des idéaux premiers (ou radicaux).

Une ***racine*** d'une partie est un élément dont une puissance ≥ 1 appartient à cette partie. L'ensemble des racines d'une partie est la ***racine*** (ou le ***radical***) de cette partie. On notera $\sqrt{P}$ la racine d'une partie P.

La racine d'un idéal est un idéal : c'est le plus petit idéal stable par racine le contenant.

La racine d'une intersection finie d'idéaux est l'intersection des racines de ces idéaux.

Un idéal ***radical*** (ou ***radiciel***) est un idéal stable par racines, autrement dit égal à sa racine. Un idéal est radical ssi il est réduit (on dit aussi ***semi-premier***), ou encore ssi il est stable par racine carrée.

La racine d'un idéal est le minimum des idéaux radicaux le contenant, ou encore l'infimum des idéaux premiers (minimaux) le contenant.

L'intersection des idéaux premiers (ou réduits) est formée des nilpotents ; c'est le ***nilradical*** $\sqrt{0}$ ou ***radical nilpotent***. On pourra le noter NilRad. On a l'identité $\mathrm{NilRad}\left({}^{A}\!/_{\mathrm{NilRad}\,A}\right) = 0$.

L'intersection des idéaux maximaux est formée des éléments j tels que $1 + (j)$ est inclus dans les inversibles : c'est aussi le plus grand idéal J tel que $1 + J \subset A^{\times}$, appelé ***radical de Jacobson***, qui est un idéal radical contenant le nilradical. On pourra le noter Rad ou Jac. On a l'identité $\mathrm{Jac}\left({}^{A}\!/_{\mathrm{Jac}\,A}\right) = 0$.

(lemme de Nakayama) Si M est un A-module de type fini et J une partie de $\mathrm{Jac}\,A$ telle que[8] $M = JM$, alors le module M est nul[9].

Le spectre d'un anneau factoriel est formé d'une part de l'idéal nul, d'autre part des idéaux principaux (p) pour p décrivant les irréductibles.

(de la terminologie « spectre ») Le spectre de l'anneau engendré par un endomorphisme admettant un polynôme minimal sur un corps algébriquement clos est en bijection avec le spectre de cet endomorphisme.

(**nullstellensatz analytique**[10]) Pour X espace quasi-compact, le spectre maximal de $C^0(X, \mathbf{R})$ est en bijection avec X : envoyer un point $x \in K$ sur le noyau $\mathfrak{m}_x$ de l'évaluation en x.

(**nullstellensatz algébrique**) Pour k algébriquement clos, le spectre maximal de $k[X_1, ..., X_n]$ est en bijection avec k^n : envoyer un point $\overrightarrow{a} \in k^n$ sur l'idéal engendré par les $X_i - a_i$.

(**nullstellensatz corporel) (ou lemme de Zariski**) Si A est une k-algèbre intègre de type fini, alors A est un corps ssi l'extension $k \hookrightarrow A$ est finie. Par conséquent, si $k \hookrightarrow K$ est une extension de corps, l'algèbre K est finie ssi elle est de type fini.

(topologie de Zariski) Lorsque $\mathcal{P}$ décrit les parties de $k[X_1, ..., X_n]$, les ***variétés algébriques***

$$V(\mathcal{P}) := \{x \in k^n \ ; \ \forall P \in \mathcal{P}, \ P(x) = 0\}$$

définissent les fermés d'une topologie sur k^n – dite ***de*** Zariski. Ces fermés sont exactement les variétés algébriques $V(\mathfrak{r})$ associées aux idéaux radicaux de $k[X_1, ..., X_n]$.

(localité) Un anneau ***local***[11] est un anneau possédant un unique idéal maximal, le quotient par cet idéal est son ***corps résiduel***. Un anneau est local ssi les non-inversibles forment un idéal, autrement dit s'ils

[8] Vu l'égalité $M \otimes_A {}^{A}\!/_{J} = {}^{M}\!/_{JM}$, le lemme de Nakayama nous dit que le module M est nul dès que son tensorisé par ${}^{A}\!/_{J}$ l'est :

$$M = 0 \Longleftarrow \left\{ \begin{array}{c} M \otimes {}^{A}\!/_{J} = 0 \\ J \subset \mathrm{Jac}\,A \end{array} \right. .$$

[9] Soit par l'absurde $m_0, ..., m_n$ une famille génératrice minimale non vide. Alors m_0 se décompose dans $M = IM = \sum J m_k$, mettons $m_0 = \sum_1^n j_k m_k$, d'om $(1 - j_0)\, m_0 \in \sum_1^n A m_k$. Or $1 - j_0$ est inversible par hypothèse, donc m_0 est engendré par les autres m_k, ce qui contredit la minimalité.

[10] Factoriser l'évaluation en x montre que le quotient ${}^{A}\!/_{\mathfrak{m}_x}$ s'identifie au corps $\mathbf{R}$, d'où la maximalité des $\mathfrak{m}_x$. Considérons ensuite $\mathfrak{m}$ un idéal maximal inclus dans aucun des $\mathfrak{m}_x$. On a alors pour tout $x \in X$ une fonction $f_x \in A$ ne s'annulant pas en x, donc restant non nulle dans un voisinage V_x de x. Par quasi-compacité de X, on peut recouvrir ce dernier par un nombre fini de V_x, mais alors la somme des carrés des f_x pour ces x en nombre fini est d'une part inversible (car ne s'annule jamais) d'autre part appartient à $\mathfrak{m}$ (par idéalité), d'où la contradiction.

[11] la section 3.1 motivera la nature topologique de cette terminologie

sont stables par addition (si l'anneau est non nul). Par exemple, $k[[X]]$ est local d'idéal maximal (X) et de corps résiduel k, l'anneau nul n'est pas local.

(lemme chinois) Deux idéaux sont dits ***copremiers***[12] lorsque leur somme fait tout l'anneau. Étant donnés des idéaux en nombre fini deux à deux copremiers, la flèche produit des surjections canoniques est surjective de noyau l'intersection de ces idéaux[13].

Les lettres gothiques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ désigneront systématiquement des idéaux **p**remiers, $\mathfrak{m}$ un idéal **m**aximal, $\mathfrak{r}$ un idéal **r**adical.

? ? ?EG
$\mathbf{Z}$ (ou $k[t]$ ou $k[t_1,...,t_n]$ ou tout anneau factoriel).
idéaux : les (n) pour $n \in \mathbf{N}^*$ et l'idéal nul
idéaux radicaux : les (n) pour $n \in \mathbf{N}^*$ quadrafrei et l'idéal nul
idéaux premiers : les (p) pour p premier et l'idéal nul
idéaux maximaux : les (p) pour p premier
intègre => nilrad = 0 = jac
Deux idéaux (a) et (b) sont copremiers ssi les entiers a et b sont copremiers. Le lemme chinois donne alors un isomorphisme

$$\mathbf{Z}/_{ab} \cong \mathbf{Z}/_a \times \mathbf{Z}/_b.$$

$C^0([0,1],\mathbf{R})$
idéaux : exemple $o_x :=$ {f nulle au voisinage de x} $\subset \mathfrak{m}_x := \{f \text{ nulle en } x\}$.
idéaux premiers : cf exos
idéaux maximaux : les $\mathfrak{m}_x$ pour x décrivant $[0,1]$
nilrad= 0 ; jac=$\cap\mathfrak{m} = 0$

1.3 Motivations

Nous avons vu un nullstellensatz algébrique décrivant les idéaux maximaux de l'anneau A des polynômes en n indéterminées avec les points de k^n (lorsque k est algébriquement clos) et réalisant ainsi A comme un anneau de fonctions (polynomiales) sur son spectre maximal. La connaissance de l'anneau fonctionnel A détermine par ailleurs les points de l'espace $\mathrm{Sp}_m A \cong k^n$.

Nous disposons de même d'un nullstellensatz analytique affirmant que, pour A l'anneau des fonctions réelles continues sur un compact X, les idéaux maximaux de A sont les noyau $\mathfrak{m}_x$ des évaluations en x pour x décrivant X. Ainsi, l'anneau fonctionnel A agit sur son spectre maximal et détermine les points de l'espace $X \cong \mathrm{Sp}_m A$.

Quant à la topologie de X, on peut aussi la récupérer *via* les fermés de X à l'aide de la bijection

$$\left\{\begin{array}{ccc} A = C^0(X,\mathbf{R}) & \widetilde{\longrightarrow} & \{\text{fermés de } X\} \\ f & \longmapsto & V(f) = \{x \in X \ ; \ f(x) = 0\} \\ d(\cdot, F) & \longleftarrow & F \end{array}\right. .$$

Les fermés de X sont donc exactement les lieux d'annulation des fonctions de A. C'est cette propriété que l'on va garder pour définir (une base de) la topologie de Zariski dans le cas général, de façon analogue au cas polynomial.

Nous allons réaliser de façon générale tout anneau comme un anneau de fonctions sur son spectre, dont les éléments $\mathfrak{p}$ seront vus comme des points[14], et mettre un topologie dont une base de fermés sera les lieux d'annulation de ces fonctions. Le paragraphe 6.5 explique en quoi il n'y a en fait qu'*une seule* façon naturelle de procéder.

[12] Deux entiers a et b sont ***copremiers*** (ou ***étrangers*** ou ***premiers entre eux***) lorsque leur pgcd vaut 1, autrement dit lorsque la somme des idéaux $(a)+(b)$ vaut l'idéal engendré par 1, à savoir l'anneau tout entier.
[13] Remarquer que le lemme chinois devient trivial pour *un seul* idéal.
[14] Noter ici l'heureuse coïncidence des notations : « $\mathsf{p}$remier » et « $\mathsf{p}$oint » commencent tous deux par la même lettre p.

1.4 Exercices

réciproque chinois

Réciproquement, cette surjectivité implique que les idéaux considérés soient deux à deux étrangers. Par corestriction au produit des deux idéaux considérés, il suffit de traiter le cas de deux idéaux. Soient donc I et J deux idéaux tels que $A \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{I} \times {}^{A}\!/_{J}$: le couple $(0,1)$ est atteint par un $i \in A$, ce qui s'écrit $i \in I$ et $i = 1 + j$ pour un $j \in J$, donc $I + J$ contient $i + (1 - i) = 1$.

ceg Nakayama dtf :

Pour un contre-exemple, prendre $M := \mathbf{Q}$ sur l'anneau $\mathbf{Z}_{(p)}$ des fractions de dénominateurs non divisible par p (premier). Alors l'anneau localisé $\mathbf{Z}_{(p)}$ est local d'idéal maximal $J := (p)\,\mathbf{Z}_{(p)}$ (fractions de numérateur multiple de p) et il est clair que $M = JM$.

ceg Nakayma $J \subset Jac$

Cette hypothèses est indispensable si l'on veut le résultat *pour tout module de type fini*. Soit en effet $j \notin \operatorname{Jac} A$: il y a un $a \in A$ tel que $1 + ja$ est non inversible, d'où $1 + ja \in \mathfrak{m}$ pour un certain idéal maximal $\mathfrak{m}$. Alors j est inversible dans $M := {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$ (d'inverse a), ce qui montre que $M = jM$; or M est non nul car $\mathfrak{m}$ est strict.

espaces complètement réguliers. Que dire d'un espace topologique dont les fermés sont engendrés par les lieux d'annulation des fonctions *réelles* continues sur cet espace ? Montrons que cela équivaut à vérifié l'axiome $T_{\frac{3}{2}}$ de séparation X est complètement régulier $(T_{\frac{3}{2}})$

1. ssi $\forall F,\ \forall x \notin F,\ \exists f \in C(X)$ nulle sur X et non nulle en x
2. ssi les $V(f)$ forment une base de fermés

=> Soit F fermé et a hors de F. Alors F est intersection des ensembles $Z_f := f^{-1}(\{0\})$; puisque a n'est pas dans F, il y a un tel f tel que $F \subset Z_f$ et $f(a) \neq 0$, CQFD.

<= Soit F fermé : en notant pour tout point a hors de F une fonction f_a comme dans l'énoncé, on voit que F est l'intersection des $Z(f_a)$.

TH : le quotient X_{cr} de X par "même image par toute $f \in C(X)$" est complètement régulier et on a un iso $C(X_{cr}) \xrightarrow{\sim} C(X)$.

DEux compacts X et Y sont homéomorphes ssi $C(X)$ et $C(Y)$ sont isomorphes.

Les métrique sont complèteemen régulier : par exemple $\frac{d(x,\cdot)}{d(x,\cdot)+d(F,\cdot)}$

variation sur nullstellesatz S*oit k pas forcément alg clos et $\mathfrak{m}$ idéal max de $k[X_1, ..., X_n]$. Alors :*

1. $\exists x \in \overline{k}^n,\ \mathfrak{m} = \{P \in k[X_1, ..., X_n]\ ;\ P(x) = 0\}$.
2. *on a l'implication* $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y \iff \exists \sigma \in \operatorname{Aut}_k \overline{k},\ \forall i,\ y_i = \sigma(x_i)$.
3. *l'extension* $k \hookrightarrow {}^{k[X_1,...,X_n]}\!/_{\mathfrak{m}_x}$ *s'identifie au sous corps de* $\overline{k}$ *engendré par les* x_i *et est de dim finie.*

DEM Suposons $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y$. On a alors des k-isomorphsmes $\begin{array}{ccccccc} \overline{k} & \overset{\mathrm{eval}_y}{\cong} & {}^{\overline{k}[X_1,...,X_n]}\!/_{\mathfrak{m}_y} & = & {}^{\overline{k}[X_1,...,X_n]}\!/_{\mathfrak{m}_x} & \overset{\mathrm{eval}_x}{\cong} & \overline{k} \\ y_i & \leftrightarrow & \overline{X_i} & \leftrightarrow & \overline{X_i} & \leftrightarrow & x_i \end{array}$.

Notons x_i l'image de X_i par la projection modulo $\mathfrak{m}$. Ntons K le corps engendré par $\overline{k}$ et les x_i dans une extension commune adéquate ? ? ?. Alors $\mathrm{eval}_x : \overline{k}[X_1, ..., X_n] \twoheadrightarrow K$ est surjectif et (nullstellensatz) de noyau un $\mathfrak{m}_y$; puisque $K \overset{\mathrm{eval}_x}{\cong} {}^{\overline{k}[X_1,...,X_n]}\!/_{\mathfrak{m}_y} \overset{\mathrm{eval}_y}{\cong} \overline{k}$, le $\overline{k}$-ev K est de dim 1, donc tous les x_i sont dans $\overline{k}$. Ainsi les x_i sont algèbrique, donc $k[x_1, ..., x_n]$ est de dim finie sur k.

réciproque nullstellensatz algébrique :

La réciproque est facile : s'il y a un $n \geq 1$ tel que les idéaux maximaux de $k[X_1, ..., X_n]$ soient de la forme annoncée, alors, étant donné un polynôme $P \in k[X]$ non constant, l'idéal (P) de $k[X] \hookrightarrow k[X_1, ..., X_n]$ est strict, donc contenu dans un idéal maximal $(X_i - \lambda_i)$, d'où $P(\lambda_1) = 0$.

réciproque nullstellensatz analytique : On montre plus généralement pour tout espace X complètement régulier l'équivalence

$$(X \text{ est quasi-compact}) \iff \operatorname{Sp}_m \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) = \{\mathfrak{m}_x\ ;\ x \in X\}.$$

La réciproque est vraie pour les métriques (et la démonstration qui suit facilement adaptable pour les espaces complètement réguliers). Considérons X un métrique non compact et $(F_i)_{i \in I}$ une intersection vide de fermés de

X dont toute sous-intersection finie est non vide. Pour J partie finie de I, on note f_J une fonction s'annulant exactement sur $\bigcap_{j\in J} F_j$ (qui est non vide), par exemple la distance à ce fermé. Alors l'idéal engendré par les f_J n'est pas total (tout élément $\sum_k a_k f_{J_k}$ s'annule sur le fermé non vide $\bigcap_k \bigcap_{j\in J_k} F_j$ puisque la partie $\bigcup_k J_k$ est finie), donc est inclus dans un idéal maximal. Si ce dernier était un $\mathfrak{m}_x$, le point x serait dans un ouvert ${}^cF_i$, donc hors du lieu d'annulation de $f_{\{i\}}$, contredisant la définition de $\mathfrak{m}_x$.

Il y a une bonne raison de restreindre la réciproque aux espaces complètement réguliers : *tout espace topologique X admet une projection sur un espace complètement régulier X^{cr}, mettons $\pi : X \twoheadrightarrow X^{cr}$, laquelle induit un isomorphisme d'anneaux* $\left\{ \begin{array}{ccc} C^0(X^{cr},\mathbf{R}) & \widetilde{\longrightarrow} & C^0(X,\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f\circ\pi \end{array} \right.$. C'est le théorème 3.9 (page 41) de *Ring of continuous functions* de Gillman & Jerison.

Exos sur $C(K)$ où K compact. (cf *Ring of continuous functions* de Gillman & Jerison.)

Appelons *bon idéal* un I tq $[\exists i\in I, V(f)=V(i)] \Longrightarrow [f\in I]$.

- *Mq on peut remplacer $=$ par $\supset$*

  $\Longleftarrow$clair. Mq $\Longrightarrow$. Soit f,i tq $V(f)\supset V(i)$. Alors $V(f)=V(i)\cup V(f)=V\left(\underbrace{if}_{\in I}\right)$, donc $f\in I$.

- *(*idéaux premiers) : *mq un bon idéal I est premier ssi $\forall f\in A,\ \exists i\in I,\ sgn(f)$ cst sur $V(i)$*

  => soit $f\in A$. Alors $\max\{0,f\}\min\{f,0\}=0\in I$, donc (mettons) $\max\{0,f\}\in I$; alrso $x\in V(\max\{0,f\}) \Longleftrightarrow \max\{f(x),0\}=0 \Longleftrightarrow f(x)\leq 0$.

  <= supposons $gh\in I$. Alors $|g|-|h|$ est de signe constant sur un $V(i)$, mettons $|g|\geq|h|$ sur $V(i)$. Alors, sur $V(i)$ on aura $V(g)\subset V(h)$, ie $V(g)\cap V(i)\subset V(h)\cap V(i)$, ie $V(g+i)\subset V(h+i)$, ie $V(h+i)=V(g+i)\cup V(h+i)=V(gh+i?)$, d'où $V(h)\supset V(\in I)$, donc (car I bon idéal) $h\in I$
- *cor : un bon idéal est premier ssi il contient un premier*
- idéaux radicaux : ? ? ? ?
- *Mq l'implication $I=I(V(I))\Longrightarrow I$bon idéal. <= ?*

  Soit f,i tq $V(f)\supset V(i)$. Alors $V(f)\supset V(I)$, donc $I(\underset{f\in}{V(f)})\subset I(\underset{=I}{V(I)})$. On va voir que o_x est bon mais $I(V(o_x))=\mathfrak{m}_x$.

  (pages 63-65)
- *Mq l'égalité $V(o_x)=\{x\}=V(\mathfrak{m}_x)$.*

  $\supset$ claire. Soit $y\neq x$. Soit V voisingage de x ne contennat pas y, soit f nulle sur V et non nulle en y : alors $f\in o_x$ et $y\notin V(f)$, donc $y\notin V(o_x)$. On en déduit $\{x\}\subset V(\mathfrak{m}_x)\overset{o_x\subset\mathfrak{m}_x}{\subset} V(o_x)=\{x\}$
- *Mq l'implciation $o_x\subset m_y\Longrightarrow y=x$.*

  Supp abs $y\neq x$. On construtui comme ci-dessus une fonction nulle sur un voisinage de x et non nulle en y, ie un élt de $o_x\backslash\mathfrak{m}_y=\emptyset$, abs.
- *Mq o_x et $\mathfrak{m}_x$ sont des bons idéaux.*

  Soit f,o tq $V(f)=V(o)$: puisque $V(o)$ contient un voisinagede x, c'est un voisinage de x, donc f s'annule sur un vois de x, ie $f\in o_x$. Soit f,m tq $V(f)=V(m)$: puisque $V(m)$ contient x, so does $V(f)$, ie $f\in\mathfrak{m}_x$
- *Soit $\mathfrak{p}$: mq $\exists!x,\ o_x\subset\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}_x$*

  $\mathfrak{p}$ est un inclus dans un maximal, metton $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}_x$. Mq $o_x\subset\mathfrak{p}$. Soit f nulle sur un voisin ouverte$U$ de x. Soit δ nulle sur ${}^cU$ et non nulle en x. Alors $\delta f=0$ partout, donc $\delta f\in\mathfrak{p}$; or $\delta\notin\mathfrak{p}$ car $\delta\notin\mathfrak{m}_x$, ce qui force $f\in\mathfrak{p}$, cqfd. Si $o_y\subset\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}_y$, alors un exo précédent mq $x=y$.
- *cor : $\mathfrak{p}$ est contenu dans un unique maximal*

  clair (interprétaion arbolaire sur le spectre ? ? ?)

- *mq les idéaux fermés (pour norme uniforme) sont les intersection de maximaux ? ? ?*

(pages 207-208)

Soit I bon idéal $\supset o_x$. Alors I est premier ssi $C(X)/I$ est bézoutien ou ssi $C(X)/I$ de valuation

Tout o_x est premier $\Longleftrightarrow$tout f est localement de signe constant$\Longleftrightarrow$les premiers contenus dan sun maximal sont totalemtn ordonné (ie pas de bifrucation dans l'arbre spectral quand on part d'une feuille) $\Longleftrightarrow C(X)$ bézoutien $\Longleftrightarrow \forall f,\ f\mid|f| \Longleftrightarrow \forall f,|f|\mid f \Longleftrightarrow \forall f,\ (f,|f|)$principal$\Longleftrightarrow$???*tout idéal principal est radical*$\Longleftrightarrow$???*tout idéal dtf est radical*

(pages 211)
tout o_x *est maximal*$\Longleftrightarrow$*tout* $\mathfrak{p}$ *est maximal*$\Longleftrightarrow$ *tout idéal est bon*$\Longleftrightarrow$*tout idéal est radical*

Les inclusions $o_x \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_x$ deviennenet des égalité, d'où la première $\Longleftrightarrow$.

2 Préliminaires

On rappelle l'isomorphisme suivant, valable pour des modules $M' \hookrightarrow M$ et $N' \hookrightarrow N$, qui permet de calculer des produits tensoriels de quotients :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} {}^{M}\!/_{M'} \otimes {}^{N}\!/_{N'} & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & {}^{M\otimes N}\!/_{M'\otimes N+M\otimes N'} \\ \overline{m} \otimes \overline{n} & \longmapsto & \overline{m \otimes n} \end{array} \right. .$$

On rappelle également qu'un module est ***plat***[15] si la tensorisation par ce module préserve les injections.

Par ailleurs, il nous arrivera couramment de parler abusivement des *points* d'un espace topologique pour parler de ses singletons.

2.1 Noethérianité (ordres, modules, anneaux et espaces topologiques)

Cherchons à casser une structure en briques élémentaires, ces dernières étant par définition celle qu'on ne peut plus casser. L'algorithme naïf est le suivant : si notre structure est déjà élémentaire, on s'arrête, sinon, on peut la casser en bouts plus petits auquel on réapplique cet algorithme. La noethérianité est la condition qui garantit la terminaison d'un tel algorithme.

Principe d'induction noethérienne.
Un ensemble ordonné E sera dit ***noethérien*** *si tout partie non vide possède un élément minimal,* i. e. *si toute suite décroissante stationne.*

Pour qu'une propriété P portant sur les éléments d'un ensemble ordonné E *noethérien* soit toujours vraie, il suffit qu'elle vérifie pour tout $a \in E$ l'implication

$$[\forall x < a,\ P(x)] \implies P(a).$$

En effet, soit F l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $P(x)$ est fausse ; si F était non vide, il aurait un élément minimal a ; par minimalité, $P(x)$ est vraie pour tout $x < a$, donc par hypothèse $P(a)$ serait aussi vraie, ce qui est contradictoire.

Par exemple, l'ensemble $\mathbf{N}$ est noethérien pour la divisibilité car il l'est pour l'ordre usuel. Notons $P(n)$ pour « n se factorise en produit de premiers » et supposons $\forall n < N,\ P(n)$ pour un entier $N \in \mathbf{N}^*$. Alors : ou bien N est premier, d'où $P(N)$; ou bien il se factorise en $N = ab$ avec a et b strictement plus petits, d'où $P(a)$ et $P(b)$, desquelles on déduit aisément $P(N)$.

Définition – Propriété.
Un module est ***noethérien*** *s'il vérifie l'un des trois conditions équivalentes suivantes :*

1. *l'ensemble de ses sous-modules est noethérien pour* $\supset$ *;*
2. *toute suite croissante de sous-modules stationne ;*
3. *tout sous-module est de type fini.*

Démonstration.
L'équivalence entre 1. et 2. est une définition.

2. $\implies$ 3. L'ensemble des sous-modules de type fini d'un sous-module M est non vide, donc admet un élément maximal M' qui vaut nécessairement M (sinon on peut trouver un $m \in M$ tel que $M' \subsetneq M' + Am \subset M$).

3. $\implies$ 2. Si (M_n) est une suite croissante de sous-modules, la réunion des M_n est un sous-module, donc est par hypothèse engendrée par des m_i en nombre fini, chacun dans un M_{n_i}, donc tous inclus dans $M_{\max n_i}$, de sorte que (M_n) stationne à $M_{\max n_i}$.

[15] Sur un anneau principal, la platitude équivaut à l'absence de torsion, ce qui éclaire la terminologie (due à J.-P. Serre).

Par exemple, *un espace vectoriel est noethérien ssi il est de dimension finie.*

Le troisième point permet de montrer aisément que la noethérianité (des modules) passe au sous-module, au quotient et à la somme directe :

1. *si M' est un sous-module de M, alors*[16] *M est noethérien ssi M' et ${}^{M}\!/_{M'}$ le sont ;*
2. *si $M_1, ..., M_n$ sont des modules, alors $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ est noethérien ssi chaque M_i l'est.*

Démonstration.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Les sous-modules de M' sont des sous-modules du module noethérien M, donc sont de type fini. Notons π la projection *modulo* M'. Si I est un sous-module de $\pi(M)$, alors $\pi^{-1}(I)$ est un sous-module de M, donc est de type fini, disons $\pi^{-1}(I) = \sum A m_k$, d'où par surjectivité de π le type fini de $I = \pi\left(\pi^{-1}(I)\right) = \sum A\pi(m_k)$.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit I un sous-module de M. La projection $\pi(I)$ est un sous-module du module noethérien ${}^{M}\!/_{M'}$, donc est de type fini, mettons $\overline{I} = \sum A\overline{m_k}$. Alors tout $i \in I$ est combinaison linéaire des m_k *modulo* M', donc est engendré par les m_k union une famille génératrice de M' (que l'on peut prendre finie par noethérianité de ce dernier), de sorte que I est de type fini, *CQFD.*
2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Un sous-module de M_i est un sous-module de $\bigoplus M_j$, donc est de type fini.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Les sous-modules de $\bigoplus M_i$ sont les $\bigoplus M_i'$ où M_i' est un sous-module de M_i (qui est noethérien) pour tout i, donc sont des sommes directes finies de modules de type fini, donc de type fini.

Ainsi, si V est un sev d'un ev E, alors le point 2 qui précède affirme que E est de dimension finie ssi V et ${}^{E}\!/_{V}$ le sont. Par une récurrence immédiate, si l'on dispose d'une suite finie de sev $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = E$, alors E est de dimension finie ssi tous les quotients ${}^{V_{i+1}}\!/_{V_i}$ le sont. Nous aurons besoin de ce résultat au paragraphe 5.5.

On verra que la noethérianité passe également à la localisation (*cf.* paragraphe 2.4).

Question. On a vu qu'un module noethérien est nécessairement de type fini. Qu'en est-il de la réciproque ?

Puisqu'un anneau est toujours de type fini sur lui-même (engendré par 1), il suffit pour infirmer la réciproque d'exhiber des anneaux non noethériens sur eux-mêmes. On verra que ces derniers constituent l'unique famille de contre-exemples.

Définition. *Un anneau est* **noethérien** *s'il est noethérien en tant que module sur lui-même,* i. e. *si tout ensemble non vide d'idéaux admet un élément maximal.*

Remarque. Dans un anneau noethérien, toute suite d'éléments décroissante pour la divisibilité stationne (c'est l'équivalence $a \mid b \iff (b) \subset (a)$), la réciproque tenant pour les anneaux principaux.

Remarque. Dans un anneau noethérien, le théorème de Krull est immédiat et ne nécessite pas l'axiome du choix (considérer l'ensemble des idéaux stricts contenant un idéal strict donné).

Par exemple, *les corps sont noethériens.*

Pour un contre-exemple, considérer l'anneau des polynômes $k[a, b, c, ...]$ à une infinité d'indéterminées dans lequel la suite d'idéaux $(a) \subset (ab) \subset (abc) \subset \cdots$ croît strictement.

De même, l'anneau des fonctions réelles continues sur un voisinage de 1 n'est pas noethérien puisqu'on a la suite strictement décroissante de divisibilités[17] $\cdots \mid \sqrt[n]{x} \mid \cdots \mid \sqrt[3]{x} \mid \sqrt{x} \mid x$.

On a vu que la noethérianité (des anneaux) passait à l'idéal, au quotient et à la somme directe. Il passe également à l'algèbre des polynômes à une indéterminée (c'est un **théorème de** Hilbert). Par conséquent,

toute algèbre de type fini sur un anneau noethérien est noethérienne.

En revanche, la noethérianité ne passe pas au sous-anneau : considérer un anneau intègre non noethérien vu comme sous-anneau de son corps des fractions (en termes de modules, on change d'anneau de base).

[16] En d'autres termes, si on a une suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow R \longrightarrow 0$, alors le module du milieu est noethérien ssi les deux autres modules le sont.

[17] avec l'abus de notation $\sqrt[k]{x}$ pour la fonction $x \mapsto \sqrt[k]{x}$

Par ailleurs, sur un anneau noethérien, un module de type fini est le quotient d'une somme directe finie de l'anneau de base (donc noethérienne), donc est noethérien. En d'autres termes, on dispose de la réciproque :

sur un anneau ***noethérien****, un module est noethérien ssi il est de type fini.*

On en déduit que l'équivalence [M noethérien $\iff$ M de type fini] est valide pour tout A-module M ssi A est un anneau noethérien, ce qui répond à la question ci-dessus.

Concluons en appliquant l'induction noethérienne à la décomposition en produit d'irréductibles (qui généralise la factorisation des entiers en produit de premiers).

On rappelle que, si a est un élément non nul d'un anneau *intègre*, alors[18] la primalité de l'idéal (a) implique l'irréductibilité de a. La réciproque est vraie pour les anneaux factoriels et fausse en général[19].

Pour a élément d'un anneau A noethérien intègre ordonné par la divisibilité, on note $P(a)$ la proposition « a est produit d'irréductibles par un inversible ». Supposons $P(x)$ pour tout x divisant strictement[20] un élément a. Alors : ou bien a est irréductible, d'où $P(a)$, ou bien il se factorise en $a = bc$ avec b et c le divisant strictement, d'où $P(b)$ et $P(c)$, desquelles on déduit aisément $P(a)$.

On appliquera également l'induction noethérienne pour décomposer un espace topologique en fermés irréductibles (*cf.* paragraphe 2.3). On aura besoin pour cela de la définition suivante.

Un espace topologique est ***noethérien*** *si l'ensemble de ses fermés est noethérien pour l'inclusion,* i. e. *si toute suite croissante d'ouverts stationne.*

Un espace noethérien est quasi-compact[21]. On montre plus généralement[22] :

un espace est noethérien ssi tout ouvert est quasi-compact.

2.2 Intégralité

La notion d'***intégralité*** (le fait d'être ***entier***) est l'analogue en théorie des anneaux de l'algébricité en théorie des corps.

Un élément x d'une A-algèbre est dit ***entier*** (sur A) s'il est annulé par un polynôme unitaire[23] à coefficients dans A, *i. e.* ssi l'homothétie de rapport x l'est. Une extension $A \longrightarrow B$ est dite ***entière*** si tous ses éléments sont entiers. Par exemple, les entiers de l'extension $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Q}$ sont les entiers relatifs – d'où la terminologie. De même, la projection *modulo* n'importe quel idéal est entière (tout $\overline{a}$ est annulé par $X - a$). Enfin, le théorème de Cayley-Hamilton nous dit précisément que l'extension $A \hookrightarrow M_n(A)$ est entière pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Une composée d'extensions entières reste entière. Un élément b d'une A-algèbre B est entier ssi il y a une sous-algèbre finie[24] de B contenant b. Par conséquent, les entiers d'une extension $A \longrightarrow B$ forment une sous-algèbre[25] de B, sa ***clôture intégrale***, souvent notée[26] $\overline{A} \hookrightarrow B$ (noter l'égalité $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$). Autre conséquence : *une algèbre est finie*[27] *ssi elle est de type fini et entière.*

[18] Déjà, a n'est pas inversible car l'idéal premier (a) est strict. Ensuite, si $a = bc$, alors le produit bc est dans l'idéal premier (a), donc b ou c est dedans, mettons $b = \lambda a$, d'où $a = \lambda ac$ et $1 = \lambda c$ par intégrité, ce qui montre que c est inversible.

[19] Supposons la réciproque. Le polynôme $X^2 - Y^3$ étant irréductible dans l'anneau factoriel $\mathbb{R}[X,Y]$, l'idéal qu'il engendre est premier, donc le quotient $A := {}^{\mathbb{R}[X,Y]}\!\big/_{X^2-Y^3}$ est intègre. Dans ce quotient, l'idéal (X) est premier mais le quotient ${}^{A}\!\big/_{(X)} \cong {}^{\mathbb{R}[Y]}\!\big/_{Y^3}$ n'est pas intègre car non réduit (Y est nilpotent).

[20] *i. e.* divisant et non associé à

[21] La quasi-compacité et la noethérianité étant toutes deux des propriétés de *finitude* concernant les ouverts, il n'est pas surprenant qu'elles soient reliées.

[22] Soit (O_i) recouvrement d'un ouvert O d'un noethérien X. Alors la famille des unions finies de O_i admet un élément maximal, lequel donne un sous-recouvrement fini (sinon on pourrait rajouter un autre O_i). Réciproquement, une suite croissante d'ouverts donne un recouvrement de sa réunion (qui est ouverte), donc stationne dès que cette réunion est quasi-compacte.

[23] L'on prendra garde à l'*unitarité* d'un éventuel polynôme annulateur. En effet, sans cette condition, toute fraction $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est entière sur $\mathbb{Z}$ car annulée par le polynôme $bX - a$, ce dernier étant (si $a \wedge b = 1$) précisément unitaire ssi la fraction $\frac{a}{b}$ est un entier.

[24] Soit A' une sous-algèbre finie contenant b. On plonge ce dernier dans $\operatorname{End} A'$. La finitude de A' nous donne une surjection linéaire $A^n \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A'$. On construit une matrice $\beta \in \operatorname{End} A^n \cong M_n(A)$ telle que $b\pi = \pi\beta$ en prenant des antécédents par π des images par $b\pi$ d'une base de A^n. En remarquant que $\beta^k \pi = \pi \beta^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, appliquer le polynôme caractéristique de β donne $\chi_\beta(b) \circ \pi = \pi \circ \chi_\beta(\beta) = 0$, d'où $\chi_\beta(b) = 0$ par surjectivité de π, ce qui conclut.

[25] si b et b' sont entiers, alors la sous-algèbre $A[b, b'] = A[b][b']$ est finie comme composée d'extension finies et contient $b + b'$ et bb'

[26] On prendra alors garde à ce que l'extension $A \longrightarrow \overline{A}$ n'est pas toujours *injective* : par exemple, si A est infini et B fini (en cardinal), alors $A \longrightarrow \overline{A} \hookrightarrow B$ n'est jamais injective. Ce sera le cas dans $\mathbf{Z}$ des réductions *modulo* tout entier $n \in \mathbf{N}^*$.

[27] $\boxed{\Longrightarrow}$ Tout $b \in B$ est dans la sous-algèbre finie B, donc est entier. De plus, toute base linéaire de B en fournit une base algébrique. $\boxed{\Longleftarrow}$ L'algèbre $B = A[b_1, ..., b_k]$ est linéairement engendrée par les $\prod b_i^{n_i}$ où $n_i \leq \deg b_i$.

Les rappels précédents peuvent être réécrit *mutadis mutandis* en remplaçant *anneau*, *entier* et *clôture intégrale* par *corps*, *algébrique* et *fermeture algébrique*. En revanche, pour les anneaux (disons intègres), le fait d'être "algébriquement clos" (*i. e.* que tout polynôme se scinde), le passage au corps des fractions fait intervenir une notion nouvelle (*cf.* exercices).

Un anneau (intègre) dont la clôture intégrale dans son corps des fractions est lui-même est dit ***intégralement clos*** (ou ***normal***). Par exemple, les anneaux factoriels sont[28] intégralement clos. En revanche, l'anneau $\mathbf{Z}\left[i\sqrt{3}\right]$ n'est pas normal car l'élément $j := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ de $\mathbf{Q}\left[i\sqrt{3}\right] = \operatorname{Frac}\mathbf{Z}\left[i\sqrt{3}\right]$ est racine de $X^3 - 1$ (donc est entier) mais n'est pas dans $\mathbf{Z}\left[i\sqrt{3}\right]$. De même, l'anneau intègre[29] $\mathbf{R}[X,Y] / a^2 - b^3$ n'est pas normal car la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas dedans et est annulée par le polynôme unitaire $X^3 - a$.

On a l'équivalence (bien souvent utile !)

$$\textit{si } A \longrightarrow B \textit{ est } \text{entière}\textit{, alors } (A \textit{ est un corps}) \iff (B \textit{ est un corps})$$

(et, dans ce cas, l'extension $A \hookrightarrow B$ est algébrique).

Pour la culture, citons un **lemme de** Kronecker sur les entier du plan complexe : *un complexe non nul, entier sur* $\mathbf{Z}$ *et dont les conjugués sont tous de module* ≤ 1 *est une racine de l'unité.*

Démonstration.

Il revient au même de montrer que les racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont dans le disque unité privé de 0 sont des racines de l'unité.

Introduisons pour cela l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes considérés par l'énoncé. Les coefficients sont des entiers, bornés en tant que fonctions symétriques des racines (lesquelles sont bornées par 1), donc $\mathcal{P}$ est fini.

Fixons à présent un élément $P = \prod (X - \lambda_i)$ dans $\mathcal{P}$. Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme $P_n := \prod (X - \lambda_i^n)$ a pour coefficients des fonctions symétriques en les λ_i, donc des polynômes entiers en les fonctions symétriques élémentaires des λ_i (lesquelles sont les coefficients de P), donc des entiers. Il en résulte que tous les P_n sont dans $\mathcal{P}$.

Par finitude de $\mathcal{P}$, il y a deux entiers $0 < a < b$ tels que $P_a = P_b$, d'où (en identifiant les racines) une permutation σ telle que $\lambda_i^b = \lambda_{\sigma(i)}^a$ pour tout i. En itérant Id^b et σ, on obtient pour tout i l'égalité $\lambda_i^{b^{\ell_i}} = \lambda_i^{a^{\ell_i}}$ où ℓ_i est la longueur du cycle de σ contenant i. Cela permet de conclure.

2.3 Irréductibilité

Un espace topologique X est *connexe* s'il ne peut être partitionné en deux fermés stricts, *i. e.* si pour tous fermés F et F' on a l'implication

$$X = F \amalg F' \implies X = F \text{ ou } X = F'.$$

Lorsque l'on remplace l'union disjointe $\amalg$ par une union tout court $\cup$, on obtient une notion bien plus forte.

Un espace topologique X est dit ***irréductible*** *s'il est non vide*[30] *et s'il n'est jamais réunion de deux fermés stricts,* i. e. *si pour tous fermés F et F' on a l'implication*

$$X = F \cup F' \implies X = F \text{ ou } X = F'.$$

Un espace irréductible est non vide et connexe. Un espace est irréductible ssi deux ouverts non vides ont une intersection non vide, ou encore ssi tout ouvert non vide est dense, ou encore ssi toute partie est dense ou d'intérieur vide[31]. Ainsi, un espace irréductible n'est jamais séparé (sauf s'il n'est constitué que d'un point).

L'image continue d'un espace irréductible est irréductible.

De manière moins évidente,

une partie d'un espace est irréductible ssi son adhérence l'est.

Démonstration. Notons X la partie et A son adhérence.

[28] se souvenir que le dénominateur d'une fraction annulée par un polynôme divise le coefficient dominant de ce polynôme

[29] *cf.* une note précédente justifiant son intégralité

[30] comme pour les irréductibles d'un anneau, on n'a pas envie que les objets "triviaux" soient irréductibles (les inversibles pour un anneau, l'espace vide pour la topologie)

[31] Si X est irréductible, pour toute partie $P \subset X$ on peut écrire $X = \mathring{P} \sqcup {}^c\mathring{P} \subset \overline{P} \cup {}^c\mathring{P}$, d'où $\overline{P} = X$ (*i. e.* P dense) ou ${}^c\mathring{P} = X$ (*i. e.* $\mathring{P}$ vide). Réciproquement, un ouvert non vide n'est pas d'intérieur vide, donc est dense.

Supposons X irréductible. Soient U et V deux ouverts non vides de A. Prenant la trace sur X, les ouverts $U \cap X$ et $V \cap X$ sont non vides car X est dense dans A, donc se rencontrent par irréductibilité de X. *A fortiori*, les ouverts U et V se rencontrent.

Supposons A irréductible. Soient $U \cap X$ et $V \cap X$ deux ouverts non vides de X. Cela impose U et V non vides, donc se rencontrant (puisque A est irréductible), donc l'ouvert non vide $U \cap V$ rencontre la partie dense X, de sorte que les ouverts $U \cap X$ et $V \cap X$ se rencontrent.

Ainsi, puisque les points sont irréductibles, *les adhérences de points sont irréductibles.*

Plus généralement, *un point d'un espace irréductible X est dit* ***générique*** *lorsque son adhérence vaut tout l'espace*. Un point générique appartient à tous les ouverts (non vides). Sous une hypothèse supplémentaire de séparation (l'axiome T_0 de Kolmogorov), on montrera qu'un espace irréductible ne peut avoir plus d'un point générique.

Les usages actuels[32] veulent désigner un point générique par la lettre η. Lorsque l'espace est le spectre d'un anneau (*cf.* section 5), nous utiliserons également le η gothique lorsque le point générique est un idéal premier.

La proposition précédente explique pourquoi, si l'on s'intéresse au caractère irréductible des parties d'un espace, on préférera regarder les parties *fermées*.

On peut se demander si l'on peut casser tout espace en fermés irréductibles comme l'on casserait un nombre entier en facteurs premiers. L'hypothèse naturelle pour permettre cela est la noethérianité.

Proposition – Définition (composantes irréductibles).

Un espace noethérien admet un nombre fini de fermés irréductibles maximaux, dont il est alors la réunion : ce sont ses ***composantes irréductibles****.*

En d'autres termes, tout espace noethérien s'écrit comme une réunion finie de fermés irréductibles F_i, avec unicité sous la condition $i \neq j \implies F_i \not\subset F_j$.

Démonstration.

Par induction noethérienne. Pour F fermé, on noté $P(F)$ l'énoncé « F est une réunion finie de fermés irréductibles ». Supposons $P(F)$ pour tout fermé F strictement inclus dans un fermé F_0. Si F_0 est irréductible, on a $P(F_0)$ et c'est terminé. Dans le cas contraire, on écrit $F_0 = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 des fermés stricts de F_0. Les F_i sont de la forme $F_0 \cap F_i'$ où F_i' fermé de X, donc sont des fermés de X. Étant par ailleurs des parties strictes de F_0, les fermés F_i s'écrivent tous deux (en vertu des $P(F_i)$) comme réunion finie de fermés irréductibles, donc leur réunion F aussi.

On en déduit que X se décompose comme souhaité en $X = \bigcup_{\text{finie}} F_i$ avec F_i fermés irréductibles. La réunion étant finie, on peut élaguer les F_i inclus dans un autre. Montrons que les F_i restant sont les fermés irréductibles maximaux de X. Remarquons qu'un fermé irréductible F s'écrit $F = F \cap X = \bigcup_{\text{finie}} (F_i \cap F)$, donc par irréductibilité l'un des $F_i \cap F$ vaut F, donc F est inclus dans l'un des F_i. Ainsi, si un F_k n'est pas maximal, il est inclus strictement dans un fermé irréductible F, d'où $F_k \subsetneq F \subset F_i$, ce que l'on a exclu.

Puisqu'un irréductible séparé est un singleton, ce qui précède montre qu'*un espace noethérien séparé est fini.* La réciproque est fausse : il existe des espaces finis (donc noethériens) non séparés, par exemple toute paire $\{a, b\}$ muni des ouverts $\emptyset$,$\{a\}$,$\{a, b\}$.

2.4 Modules et algèbres des fractions

Lorsque l'on construit le corps des fractions d'un anneau intègre A, on inverse formellement tous les éléments non nuls en identifiant deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ représentées par les couples $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de $A \times A^\times$ ssi $ad = bc$.

On peut en fait inverser uniquement les éléments de n'importe partie de l'anneau (dont les éléments seront les dénominateurs de nos fractions) stable par multiplication (on a envie de pouvoir écrire $\frac{a}{s}\frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$). Afin de généraliser aux anneaux non intègres, il va falloir modifier un peu notre relation d'équivalence[33] (identifier $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ s'il y a un élément s tel que $\frac{sa}{sb} = \frac{sc}{sd}$). On se permettra enfin de remplacer l'ensemble des numérateurs par un module.

[32] bien que Grothendieck ne semble pas employer de désignation particulière dans *S. G. A. 2*

[33] Plus précisément, montrons que S ne contient pas de diviseurs de zéro ssi cette relation est transitive (on pourra spécialiser ensuite $S \leftarrow A^\times$). Il n'y a qu'un sens à voir. Soit $s \in S$ et $a \neq 0$ tel que as. On a alors les égalités $\frac{a}{1} = \frac{0}{s} = \frac{0}{s} = \frac{s}{s}$, d'où $s1 = as = 0$.

Pour la suite, une partie d'un anneau sera dite ***multiplicative*** si elle est stable par produit fini (et donc contient 1, le produit vide). En d'autres termes, une partie multiplicative est un sous-monoïde multiplicatif. Par exemple, forment des parties multiplicatives : les itérés d'un même élément $\{a^n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$, le complémentaire d'un idéal premier ${}^c\mathfrak{p}$. On notera également que l'ensemble des parties multiplicatives est stable par translation par n'importe quel idéal (ainsi $1+I$ est une partie multiplicative pour tout idéal I).

Définition – Proposition.
Soient M un A-module et S une partie de A multiplicative.
*Le **module des fractions de** M **selon** S est le quotient de $M \times S$ par la relation d'équivalence par*

$$\binom{m}{s} \sim \binom{m'}{s'} \overset{\text{déf}}{\iff} \exists \sigma \in S, \ \sigma s m' = \sigma s' m.$$

La classe d'un couple $\binom{m}{s}$ est notée $\frac{m}{s}$ ou ${}^m\!/_s$ ou m/s.
Le quotient se note $S^{-1}M$ ou $M\left[S^{-1}\right]$. Il est muni d'une addition et d'actions de A et $S^{-1}A$ définies par

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{m}{s'} &:= \frac{s' \cdot m + s \cdot m'}{ss'} \\ a \cdot \frac{m}{s} &:= \frac{a \cdot m}{s} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} &:= \frac{a \cdot m}{ss'} \end{aligned}$$

lui conférant une structure de A-module d'une part et de $S^{-1}A$-module d'autre part.

Démonstration.
La réflexivité est claire (prendre $\sigma = 1$), la symétrie aussi, la transitivité un peu moins (c'est là qu'intervient le « bricolage technique »). Supposant $\binom{m}{s} \sim \binom{m'}{s'}$ et $\binom{m'}{s'} \sim \binom{m''}{s''}$, on peut écrire $\begin{cases} \sigma s m' = \sigma s' m \\ \tau s' m'' = \tau s'' m' \end{cases}$ pour $\sigma, \tau \in S$. Multiplier la seconde ligne par σs donne

$$\begin{aligned} (\sigma s \tau) s' m'' &= (\sigma s \tau) s'' m' = \tau s'' (\sigma s m') = \tau s'' (\sigma s' m), \ i.\ e. \\ (\sigma \tau s') s m'' &= (\sigma \tau s') s'' m, \text{ d'où } \binom{m}{s} \sim \binom{m''}{s''}. \end{aligned}$$

Les structures de modules seront établies aux bons soins du lecteur.

Remarques & exemples.
Lorsque $M = A$ est intègre et $S = A^\times$, on retrouve le corps des fractions $\operatorname{Frac} A = A\left[\frac{1}{A^\times}\right]$.
Lorsque $S \subset A$ n'est pas une partie multiplicative, on définit quand même $S^{-1}M$ en remplaçant S par le monoïde multiplicatif qu'il engendre.

Lorsqu'un élément $s \in A$ est inversible dans A, on a un isomorphisme canonique $\left\{ \begin{array}{ccc} A\left[\frac{1}{s}\right] & \cong & A \\ \frac{a}{s^n} & \longleftrightarrow & \frac{a}{s^n} \end{array} \right.$; en d'autres termes, *inverser un élément déjà inversible ne change rien*, ce qui est cohérent.
En notant $\mathcal{D}S := \{d \in A \ ; \ \exists d' \in A, \ dd' \in S\}$ l'ensemble des diviseurs de S, on dispose d'un isomorphisme canonique $\left\{ \begin{array}{ccc} A\left[\frac{1}{S}\right] & \cong & A\left[\frac{1}{\mathcal{D}S}\right] \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{a}{s} \\ (\text{si } dd' \in S) \ \frac{ad'}{dd'} & \longleftarrow & \frac{a}{d} \end{array} \right.$ (les vérifications sont aisées). En d'autres termes, *inverser un élément inverse automatiquement ses diviseurs*, ce qui est cohérent.
Si S et S' sont deux parties de A, alors prendre le module des fractions en S puis en S' revient à prendre celui en SS' (et de même dans l'autre sens), au sens des isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} S^{-1}\left(S'^{-1}M\right) & \cong & \left(SS'\right)^{-1}M & \cong & S'^{-1}\left(S^{-1}M\right) \\ \frac{m/s'}{s} & \longleftrightarrow & \frac{m}{ss'} & \longleftrightarrow & \frac{m/s}{s'} \end{array}.$$

Lorsque S contient 0, tous les couples (s,m) sont équivalents (prendre $\sigma := 0$ dans la définition), donc le module des fractions est nul. En d'autres termes, *si* 0 *devient inversible, le module devient nul*, ce qui est cohérent.

Lorsque $M = A$ (ou[34] un idéal de A), le module $S^{-1}A$ devient une algèbre pour la multiplication

$$\frac{a}{s}\frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}.$$

La notation $A\left[S^{-1}\right]$ ou $A\left[\frac{1}{S}\right]$ prend alors tout son sens : il s'agit de l'***algèbre des fractions*** (selon S) constituée des polynômes à coefficients dans A évalués en les inversés de S. On vérifiera que, lorsque tous les éléments de S sont inversibles dans une extension $A \longrightarrow E$, l'algèbre engendrée dans E par les inverses des éléments de S coïncide avec $A\left[\frac{1}{S}\right]$ à un isomorphisme canonique près. Par exemple, l'algèbre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ est l'ensemble des nombres *décimaux* – les rationnels ayant un développement décimal fini.

Lorsque l'algèbre $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est nulle, l'égalité $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$ donne un $\sigma \in S$ tel que $\sigma 11 = \sigma 01$, donc S contient 0. On en déduit l'équivalence

$$A\left[\frac{1}{S}\right] = 0 \iff 0 \in S.$$

En particulier, pour S formée des puissances d'un même $a \in A$, on obtient

$$A\left[\frac{1}{a}\right] = 0 \iff a \text{ nilpotent.}$$

La flèche de localisation.
Pour des raisons topologiques que nous verrons bien plus loin[35], le module des fractions selon S est également appelé ***module localisé en S***.

On dispose d'un ***morphisme de localisation*** $\left\{\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ m & \longmapsto & \frac{m}{1}\end{array}\right.$. Au vu de l'équivalence $\frac{m}{1} = \frac{0}{1} \iff \exists s \in S,\ sm = 0$, *la flèche de localisation est injective ssi toutes les homothéties* $\sigma \operatorname{Id}$ *(pour σ décrivant S) sont injectives*, autrement dit *ssi S ne contient pas de diviseurs*[36] *de* $\overrightarrow{0}$ (sous l'hypothèse[37] $0 \notin S$).

Lorsque $M = A$, le morphisme de localisation $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A\left[\frac{1}{S}\right] \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1}\end{array}\right.$ est un morphisme de A-algèbres et (lorsque $0 \notin S$) est injectif ssi S ne contient pas de diviseurs de 0 (ce qui est toujours le cas quand A est intègre).

On remarquera que la flèche $M \longrightarrow S^{-1}M$ est bien sûr A-linéaire mais également $\left(A \longrightarrow S^{-1}A\right)$-linéaire (vu que $\frac{a \cdot m}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{1}$).

Localisé d'un idéal. Pour I idéal, localisons le module I selon la partie S. Un élément de $I\left[\frac{1}{S}\right]$ est un somme finie de $\frac{i_s}{s}$ pour des $(i_s, s) \in I \times S$, donc (après réduction au même dénominateur et par multiplicativité de S) de la forme $\frac{i}{s}$ où $(i, s) \in I \times S$, ce qui s'écrit encore $\frac{i}{s} = \frac{i}{1}\frac{1}{s} \in \lambda(I)\frac{1}{S}$ où $\lambda : I \longrightarrow I\left[\frac{1}{S}\right]$ est la flèche de localisation selon S. Pour les mêmes raisons, la description de $S^{-1}\lambda(I)$ est identique. On en déduit

$$I\left[\frac{1}{S}\right] = S^{-1}\lambda(I) = \lambda(I)\frac{1}{S} = \left\{\frac{i}{s}\right\}_{s\in S}^{i\in I}.$$

Passage de la noethérianité au localisé. Montrons que *le localisé d'un module noethérien est noethérien (sur l'anneau de base comme sur son localisé).*

Soit $\mathcal{M}$ un sous-A-module de $S^{-1}M$. Considérons des générateurs $\frac{m_i}{s_i}$ de M (en nombre peut-être infini) : on a $\mathcal{M} = \sum A\frac{m_i}{s_i}$. Or le sous-$A$-module $\sum Am_i$ est par hypothèse de type fini, donc tous les m_i sont engendré par un nombre fini d'entre eux, mettons m_k ; alors la famille finie $\left(\frac{m_k}{s_k}\right)$ engendre $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-$S^{-1}A$-module de $S^{-1}M$. Écrivons de même $\mathcal{M} = \sum\left(S^{-1}M\right)\frac{m_i}{s_i} = \sum\left(S^{-1}M\right)\frac{m_i}{1}$. Or $\sum Am_i$ est finiment engendré par des m_k et alors $\left(\frac{m_k}{1}\right)$ engendre $\mathcal{M}$.

Des quotients et des fractions. Lorsque l'on considère le *quotient* d'un anneau par un idéal, on *tue* les éléments de cet idéal ; lorsque l'on considère l'algèbre des *fractions* d'une partie (multiplicative), on *inverse* les éléments de cette partie. Il nous fallait signaler ce hiatus de vocabulaire donnant des rôles très différents à deux mots proches – quotient et fraction.

Fonctorialité de la localisation.

[34] ou si M est muni d'une multiplication A-linéaire

[35] *cf.* tout dernier point (**De la localité des localisés**) du paragraphe 5.1

[36] Un scalaire a *divise* $\overrightarrow{0}$ s'il est non nul et s'il tue un élément de M non nul.

[37] dans le cas $0 \in S$, l'injectivité revient à la nullité du module M

1. *Soit S une partie multiplicative d'un anneau A. Alors toute flèche $f : M \longrightarrow N$ entre A-modules induit une flèche A-linéaire et $S^{-1}A$-linéaire entre les localisés*

$$S^{-1}f : \begin{cases} S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}N \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{f(m)}{s} \end{cases}.$$

Plus généralement, la donnée d'un morphisme d'anneaux $\rho : \begin{cases} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & {}^{\rho}a \end{cases}$, d'une flèche ρ-linéaire entre A- et B-modules $f : M \longrightarrow N$ et d'une partie multiplicative $S \subset A$ induit une flèche ρ-linéaire et $S^{-1}\rho$-linéaire entre les localisés

$$S_{\rho}^{-1}f : \begin{cases} S^{-1}M & \longrightarrow & \left[{}^{\rho}S\right]^{-1}N \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{f(m)}{{}^{\rho}s} \end{cases}.$$

2. *La localisation (en S) est un foncteur covariant et exact*[38]*. Plus généralement, étant données des flèches $\begin{cases} A & \xrightarrow{\rho} & B & \xrightarrow{\sigma} & C \\ M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & R \end{cases}$ entre des anneaux A, B, C et entre des A-, B- et C-modules M, N, R, on a l'identité et l'implication suivantes :*

$$\begin{aligned} S_{\sigma\circ\rho}^{-1}(g \circ f) &= \left[\left({}^{\rho}S\right)_{\sigma}^{-1}g\right] \circ \left[S_{\rho}^{-1}f\right]; \\ \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f &\implies \operatorname{Ker}\left[\left({}^{\rho}S\right)_{\sigma}^{-1}g\right] = \operatorname{Im}\left[S_{\rho}^{-1}f\right]. \end{aligned}$$

Démonstration.

1. Le premier point est un corollaire du second avec $\rho = \mathrm{Id}_A$. Une fois explicitée $S^{-1}\rho : \begin{cases} A\left[\frac{1}{S}\right] & \longrightarrow & B\left[\frac{1}{{}^{\rho}S}\right] \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{{}^{\rho}a}{{}^{\rho}s} \end{cases}$, le fait que $S_{\rho}^{-1}f$ soit bien définie et $S^{-1}\rho$-linéaire (donc A-linéaire) est aisé à vérifier et découle de la ρ-linéarité de f.
2. L'identité affirmée s'obtient en regardant l'action de la composée

$$\begin{cases} S^{-1}M & \xrightarrow{S_{\rho}^{-1}f} & \left[{}^{\rho}S\right]^{-1}N & \xrightarrow{\left({}^{\rho}S\right)_{\sigma}^{-1}g} & \left[{}^{\sigma\rho}S\right]^{-1}R \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{f(m)}{{}^{\rho}s} & \longmapsto & \frac{g(f(m))}{{}^{\sigma}({}^{\rho}s)} = \frac{[g\circ f](m)}{{}^{[\sigma\circ\rho]}s} \end{cases}.$$

Soit maintenant $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ une suite exacte. L'inclusion $\operatorname{Im} S_{\rho}^{-1}f \subset \operatorname{Ker}\left({}^{\rho}S\right)_{\sigma}^{-1}g$ vient en appliquant le foncteur $S_{\sigma\circ\rho}^{-1}$ à la composée $0 = g \circ f$. Considérons par ailleurs un élément $\frac{n}{{}^{\rho}s}$ de $\operatorname{Ker}\left({}^{\rho}S\right)_{\sigma}^{-1}g$. L'égalité $\frac{g(n)}{{}^{\sigma\rho}s} = \frac{0}{1}$ dans $\left[{}^{\sigma\rho}S\right]^{-1}R$ nous donne un $\Sigma \in S$ tel que $0 = {}^{\sigma\rho}\Sigma\ g(n) = g\left({}^{\rho}\Sigma\ n\right)$, *i. e.* ${}^{\rho}\Sigma\ n \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, d'où un $m \in M$ tel que ${}^{\rho}\Sigma\ n = f(m)$, ce qui permet d'écrire $\frac{n}{{}^{\rho}s} = \left[S_{\rho}^{-1}f\right]\left(\frac{m}{\Sigma s}\right)$, d'où l'inclusion réciproque.

Corollaire (localisé d'un quotient). *Soit N un sous-module de M. On a alors un isomorphisme*

$$\begin{cases} S^{-1}\left(M/N\right) & \longrightarrow & S^{-1}M/S^{-1}N \\ \frac{\overline{m}}{s} & \longleftrightarrow & \frac{\widetilde{m}}{s} \end{cases}.$$

Démonstration. On a une suite exacte $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$, d'où une suite exacte $\underbrace{S^{-1}0}_{\simeq 0} \longrightarrow S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\pi} S^{-1}\left(M/N\right) \longrightarrow \underbrace{S^{-1}0}_{\simeq 0}$, ce qui montre que $S^{-1}\pi$ induit un isomorphisme $\begin{cases} S^{-1}M/S^{-1}N & \longrightarrow & S^{-1}\left(M/N\right) \\ \frac{\widetilde{m}}{s} & \longmapsto & \left[S^{-1}\pi\right]\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\overline{m}}{s} \end{cases}$, *CQFD.*

[38] Un foncteur est dit *exact* lorsqu'il préserve les suite exactes. En particulier, puisque des injection $M \overset{i}{\hookrightarrow} N$ et surjection $M \overset{s}{\twoheadrightarrow} N$ peuvent être vues comme des suites exactes $0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{i} N$ et $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{0} 0$, un foncteur exact préserve les caractères injectif et surjectif.

Localisation et somme directe. *Le foncteur S^{-1} commute à la somme directe*, au sens où, pour tous A-modules M et M', on a un isomorphisme

$$\left\{\begin{array}{ccc} S^{-1}(M\oplus M') & \widetilde{\longrightarrow} & S^{-1}M\oplus S^{-1}M' \\ \frac{m+m'}{s} & \longmapsto & \frac{m}{s}+\frac{m'}{s} \\ \frac{s'm+sm'}{ss'} & \longleftarrow & \frac{m}{s}+\frac{m'}{s'} \end{array}\right. .$$

Application : calcul de $\mathbf{Z}/_n\left[\frac{1}{S}\right]$. Le lemme chinois nous permet de nous ramener au cas où n est la puissance d'un premier, mettons $n=p^v$. Si S contient un multiple de p, il contiendra un multiple de n, donc 0, d'où la nullité du localisé. Dans le cas contraire, tous les éléments de S sont inversibles *modulo* p, *a fortiori modulo* n, donc ont un ordre *modulo* n, mettons $s^\omega=1$, de sorte que tout élément $\frac{a}{s}=\frac{s^{\omega-1}a}{s^\omega}$ de $\mathbf{Z}/_n\left[\frac{1}{S}\right]$ s'écrit d'une unique[39] manière $\frac{x}{1}$ avec x dans $\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, d'où un isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/_n\left[\frac{1}{S}\right] & \cong & \mathbf{Z}/_n \\ \frac{x}{1} & \longleftrightarrow & x \end{array}\right.$. Finalement, si l'on écrit $n=\prod p^{v_p}$, on obtient

$$\mathbf{Z}/_n\left[\frac{1}{S}\right]\cong\left(\bigoplus \mathbf{Z}/_{p^{v_p}}\right)\left[\frac{1}{S}\right]\cong\bigoplus\left(\mathbf{Z}/_{p^{v_p}}\left[\frac{1}{S}\right]\right)\cong\bigoplus_{(p)\cap S=\emptyset}\mathbf{Z}/_{p^{v_p}}\cong\mathbf{Z}/_{n'}$$

où l'on a posé $n':=\prod_{(p)\cap S=\emptyset}p^{v_p}$. On retiendra que

localiser en S revient à éliminer les facteurs premiers des éléments de S.

Localisation et produit tensoriel. Il peut être utile d'observer l'isomorphisme canonique

$$\left\{\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \cong & A\left[\frac{1}{S}\right]\otimes_A M \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{1}{s}\otimes m \\ \frac{am}{s} & \longleftarrow & \frac{a}{s}\otimes m \end{array}\right. .$$

Ainsi, l'exactitude de la localisation se reformule en affirmant que la tensorisation par $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est exacte, autrement dit que *le module $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est plat sur A.*

En particulier, lorsque A est intègre, son corps des fractions $A\left[\frac{1}{A^*}\right]$ est plat sur lui. Cette remarque est utilisée dans un exercice, qui montre en quoi la finitude d'une extension entière passe au corps des fractions.

2.5 Le foncteur spectre

Proposition.
La préimage d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux est un idéal premier.

Démonstration.
Soit $\varphi:A\longrightarrow B$ notre morphisme et $\mathfrak{q}$ idéal premier de B. Ce dernier étant le noyau de la flèche canonique $B\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}B/_{\mathfrak{q}}$, la composée $A\overset{\varphi}{\longrightarrow}B\twoheadrightarrow B/_{\mathfrak{q}}$ a pour noyau $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. L'injection $A/_{\operatorname{Ker}\pi\circ\varphi}\hookrightarrow\operatorname{Im}\pi\circ\varphi$ s'écrit ainsi $A/_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}\hookrightarrow B/_{\mathfrak{q}}$, réalisant $A/_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}$ comme sous-anneau de l'anneau intègre $B/_{\mathfrak{q}}$, d'où l'intégrité recherchée.

Il n'est pas vrai en général que la préimage d'un maximal soit un idéal maximal. Si c'était le cas, puisque l'idéal nul est maximal ssi l'anneau est un corps, en regardant un sous-anneau $A\hookrightarrow k$ d'un corps, l'idéal nul de A serait maximal en tant que préimage de celui de k, donc A serait un corps ; or les contre-exemples abondent : $\mathbf{Z}\hookrightarrow\mathbf{Q}$, $k[x]\hookrightarrow k(x)$...

Nous verront plus bas une obstruction à ces contre-exemples : l'*intégralité* de la flèche $A\longrightarrow B$.

Fonctorialité du spectre à valeurs dans la catégorie des ensembles.
À tout morphisme d'anneaux $\varphi:A\longrightarrow B$ on peut associer une application

$$\operatorname{Sp}\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Sp}B & \longrightarrow & \operatorname{Sp}A \\ \mathfrak{q} & \longmapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}\right.$$

[39] Si $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}$, alors il y a un $s\in S$ tel que $sx=sy$ dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, d'où $x=y$ en simplifiant par s.

de sorte que $\mathrm{Sp}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Sp}\,\varphi \circ \mathrm{Sp}\,\psi$ *pour tout autre morphisme d'anneaux* ψ.

Remarque. Lorsque $\varphi : A \longrightarrow B$ est une application ensembliste, on sait que l'application $\varphi^* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(B) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(A) \\ Y & \longmapsto & \varphi^{-1}(Y) \end{array} \right.$ est injective (resp. surjective) ssi φ est surjective (resp. injective). La première équivalence (φ surjective) $\iff$ ($\mathrm{Sp}\,\varphi$ injective) est bien sûr conservée, mais la seconde tombe en défaut car les idéaux antécédents par $\mathrm{Sp}\,\varphi = \varphi^*$ des idéaux premiers de B ne sont pas nécessairement premiers.

Plus concrètement, si $A \hookrightarrow \mathrm{Frac}\,A$ désigne l'injection d'un anneau intègre dans son corps des fractions, le spectre de ce dernier est réduit à un point (c'est le spectre d'un corps), mais $\mathrm{Sp}\,A$ ne contiendra un seul point ssi A est déjà un corps, ce que l'on peut éviter.

On verra plus tard que $\mathrm{Sp}\,\varphi$ est surjectif dès que φ est injectif et *entier*.

Spectre de la réduction *modulo* un idéal. En prenant pour morphisme φ la réduction $A \twoheadrightarrow B =: {}^{A}\!/_{I}$ *modulo* un idéal I, la composée $\pi \circ \varphi$ (où π est la réduction *modulo* un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B) est surjective $A \twoheadrightarrow {}^{B}\!/_{\mathfrak{q}}$ et de noyau $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. En se souvenant que les idéaux premiers de ${}^{A}\!/_{I}$ sont les ${}^{\mathfrak{p}}\!/_{I}$ pour $\mathfrak{p}$ contenant I, on retrouve l'isomorphisme canonique

$$ {}^{A}\!/_{\mathfrak{p}} \overset{\sim}{\longrightarrow} {}^{\left({}^{A}\!/_{I}\right)}\!/_{\left({}^{\mathfrak{p}}\!/_{I}\right)}. $$

Spectre de la localisation.

Le spectre de la flèche de localisation $A \xrightarrow{\lambda} A\left[\frac{1}{S}\right]$ *identifie les idéaux premiers de* $A\left[\frac{1}{S}\right]$ *aux idéaux premiers de* A *disjoint de* S *de la manière suivante :*

$$ \mathrm{Sp}\,\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}\,A\left[\frac{1}{S}\right] & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Sp}\,A\}_{\mathfrak{p}\cap S=\emptyset} \\ \mathfrak{q} & \longmapsto & \lambda^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right] & \longleftarrow & \mathfrak{p} \end{array} \right. . $$

Démonstration.

Un idéal $\mathfrak{q}$ premier de $S^{-1}A$ étant strict, il ne peut contenir aucun inversible, donc aucun élément de la forme $\frac{s}{1} = \lambda(s)$, ce qui montre que $\lambda^{-1}(\mathfrak{q})$ est disjoint de S.

Ensuite, pour $\mathfrak{p}$ ne rencontrant pas S, montrons que l'idéal $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$ de $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est premier. Supposant $\frac{a}{s}\frac{a'}{s'}$ dans $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$, *i. e.* de la forme $\frac{p}{s''}$ où $(p, s'') \in \mathfrak{p} \times S$, on a un $\sigma \in S$ tel que $\sigma aa's'' = \sigma ss'p \in \mathfrak{p}$, d'où l'un des quatre facteurs σ, a, a', s'' dans $\mathfrak{p}$; mais cela ne peut être aucun des $\sigma, s'' \in S$ d'après l'hypothèse $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Il en résulte que $\frac{a}{s}$ ou $\frac{a}{s'}$ appartient bien à $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$, *CQFD*.

Il reste à montrer que les deux flèches $\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right] \\ \mathfrak{q} \mapsto \lambda^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array} \right.$ sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Sp}\,A$ disjoint de S. Vu les inclusions $\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{p} \subset \lambda^{-1}(\lambda(\mathfrak{p})) \\ \lambda(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right] \end{array} \right.$, on obtient $\mathfrak{p} \subset \lambda^{-1}\left(\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]\right)$. Réciproquement, la relation $\lambda(a) \in \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$ implique une égalité $\frac{a}{1} = \frac{p}{s}$ pour un $(p, s) \in \mathfrak{p} \times S$, d'où un $\sigma \in S$ tel que $\sigma as = \sigma p \in \mathfrak{p}$, d'où $a \in \mathfrak{p}$ puisque $\sigma, s \in S$ ne peuvent appartenir à $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{q}$ dans $\mathrm{Sp}\,A\left[\frac{1}{S}\right]$. Notons $\mathfrak{p} := \lambda^{-1}(\mathfrak{q})$. Un élément de $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$ s'écrit $\lambda(p)\frac{1}{s}$ pour un $(p, s) \in \mathfrak{p} \times S$, avec $\lambda(p) \in \mathfrak{q}$, donc tombe dans $\mathfrak{q}$ par idéalité de ce dernier. Soit maintenant $\frac{a}{s} = \lambda(a)\frac{1}{s}$ dans $\mathfrak{q}$. Par primalité de $\mathfrak{q}$, ce dernier contient $\lambda(a)$ (il ne peut contenir l'inversible $\frac{1}{s}$), donc $a \in \mathfrak{p}$, d'où $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$, *CQFD*.

Remarque fonctionnelle. Nous allons voir l'anneau A comme un espace de fonctions sur son spectre. Avec cette vision, inverser S, c'est inverser des fonctions. Pour ce faire, ces dernières ne doivent jamais s'annuler. Le spectre de $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est la plus grande partie de $\mathrm{Sp}\,A$ réalisant cela[40].

Cas des flèches entières, le foncteur spectre maximal. Considérons une algèbre $A \xrightarrow{\varphi} B$ *entière* et regardons le morphisme $f := \mathrm{Sp}\,\varphi$.

Fixons un point $\mathfrak{q} \in \mathrm{Sp}\,B$ dont on note $\mathfrak{p}$ l'image par f. Puisque $a \in \mathfrak{p}$ ssi $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$, la flèche entière ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow {}^{B}\!/_{\mathfrak{q}}$ induite par φ est bien définie (et injective). Les anneaux quotients étant intègres par primalité de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, l'un est un corps ssi l'autre en est un. On en déduit l'équivalence

un idéal $\mathfrak{q} \in \mathrm{Sp}\,B$ *est maximal ssi son image* $f(\mathfrak{q})$ *l'est.*

[40] On précisera tout cela à la section 4.

En termes fonctoriels, la correspondance $A \mapsto \mathrm{Sp}_m A$ est un foncteur entre flèches *entières*.

Spectre d'un produit fini. On décrit ici le spectre d'un produit fini puis nous en déduisons une description des anneaux de spectre fini ne contenant que des idéaux maximaux[41].

Proposition.

1. *Le spectre d'un produit fini d'anneaux s'identifie à l'union disjointe des spectres* :
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}\,(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n) & \cong & \mathrm{Sp}\,A_1 \amalg \mathrm{Sp}\,A_2 \amalg \cdots \amalg \mathrm{Sp}\,A_n \\ A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times \mathfrak{p}_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n & \longleftrightarrow & \mathfrak{p}_i \end{array}.$$
2. *Un anneau a un spectre fini égalant son spectre maximal ssi son réduit est un produit (fini) de corps :*
$$[\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}_m A \text{ fini}] \iff A_{red} \cong \prod\nolimits_{\text{fini}} \text{corps}.$$

Démonstration.

1. Il suffit de traiter le cas $n = 2$, pour lequel on renomme $(A, B) := (A_1, A_2)$. Le résultat suit alors des quatre points suivants.
   (a) *Les idéaux de $A \times B$ sont exactement les produits d'un idéal de A par un idéal de B.* Il est clair que de tels produits sont des idéaux. Réciproquement, notons I_A et I_B les projections d'un idéal I de $A \times B$ sur A et B respectivement (ce sont des idéaux en vertu de la surjectivité de ces projections). Alors l'injection canonique $I \hookrightarrow I_A \times I_B$ (produit de ces projections) est surjective : pour $(a, b) \in I_A \times I_B$, il y a un $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tel que (a, β) et (α, b) sont dans I, donc leur produit par $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont aussi dans I, à savoir $(a, 0)$ et $(0, b)$, donc leur somme (a, b) également, *CQFD*[42].
   (b) *Un produit d'anneaux $A \times B$ est intègre ssi l'un est intègre et l'autre nul.* Si le produit est intègre, vue la nullité du produit $(1, 0)\,(0, 1)$, l'un des deux facteurs doit être nul. Alors le facteur restant, disons A, est isomorphe au produit $A \times 0 \cong A \times B$ qui est intègre. La réciproque est claire : l'intégrité de A équivaut à (donc implique) celle de $A \times 0$.
   (c) *Le quotient d'un produit est le produit des quotients.* Pour $I \times J$ idéal de $A \times B$, le produit des réductions *modulo* I et J est une surjection $A \times B \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{I} \times {}^{B}\!/_{J}$ de noyau $I \times J$.
   (d) Il reste à dérouler les équivalences : $I \times J$ premier $\iff$ ${}^{A\times B}\!/_{I\times J}$ intègre $\iff$ ${}^{A}\!/_{I} \times {}^{B}\!/_{J}$ intègre $\iff$ ${}^{A}\!/_{I}$ intègre et ${}^{B}\!/_{J} = 0$ (ou l'inverse) $\iff$ I premier et $J = B$ (ou l'inverse).
2. Par ce qui précède, les points du spectre d'un produit (fini) de corps $k_1 \times \cdots \times k_n$ sont les idéaux de la forme $k_1 \times \cdots \times k_{i-1} \times 0 \times k_{i+1} \times \cdots \times k_n$, lesquels sont maximaux et en nombre finis. Réciproquement, deux idéaux maximaux distincts étant copremiers, le lemme chinois donne (par finitude de Sp_m) une surjection $A \twoheadrightarrow \prod {}^{A}\!/_{\mathfrak{m}}$ vers un produit (fini) de corps ; tout premier étant par ailleurs maximal, son noyau $\bigcap \mathfrak{m}$ vaut le nilradical $\bigcap \mathfrak{p}$, ce qui conclut.

2.6 Exercices

Quelques liens entre irréductibilité et connexité. Terminons par deux exercices, le premier généralisant la connexité d'un irréductible, le second décrivant (en partie) les composantes connexes d'un noethérien :

1. *un espace (non vide) est irréductible ssi tout ouvert est connexe ;*
2. *dans un espace noethérien, les composantes connexes sont fermés et ouvertes.*

Démonstration.

[41] Une classe d'anneaux réalisant ces conditions sont les anneaux ***artiniens***, *i. e.* où toute suite décroissante d'idéaux stationne. On peut montrer qu'un anneau artinien est noethérien (**théorème d'Akizuki**) et que réciproquement un anneau noethérien où tout premier est maximal est artinien.

[42] On prendra garde que le résultat n'est pas vrai pour un produit infini. Ce qui précède montre qu'un tel idéal est compris entre la somme directe de ses projections et leur produit, mais les deux inclusions peuvent être strictes. Considérer par exemple, dans un anneau $\prod_{i\in I} A_i$, des idéaux I_i de chaque A_i et, pour toute partie $J \subset I$ infinie, l'idéal $\bigoplus_{j\in J} I_j \times \prod_{i\notin J} I_i$.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit O ouvert non vide partitionné en deux ouverts relatifs $O \cap O_i$. L'intersection de ces derniers est vide, ce qui s'écrit $O \cap (O_1 \cap O_2) = \emptyset$, d'où par densité de O la vacuité de $O_1 \cap O_2$, donc celle d'un des O_i (sinon ces ouverts non vides se rencontreraient).

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Considérons une décomposition de $X = F \cup F'$ en deux fermés. On en déduit une partition de l'ouvert ${}^c(F \cap F') = {}^cF \amalg {}^cF'$ en deux ouverts disjoints, donc (par connexité de ce dernier) l'un des deux est vide, d'où $X = F$ ou $X = F'$

2. Notons F_i les composantes irréductibles de X. Soit C une composante connexe. Si C contient un $f \in F_i$, alors F_i est un connexe contenant f, donc contient sa composante connexe C. Ainsi, C est la réunion des F_i l'intersectant, lesquels sont en nombre fini, donc est ouverte. Par ailleurs, les autres F_i sont disjoints de C, donc ${}^cC$ est leur réunion, laquelle est fermée, d'où le caractère ouvert de C.

? ? ? **intgt clos n'est pas l'analogue de algbt clos**. C'est ce qui manque à (Frac alg clos) pour redescendre à (tout polynôme de A est scindé), au sens suvant :

$$\text{si } A \text{ intègre, tout polynôme de } A[X] \text{ est scindé} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{tout polynôme de } \operatorname{Frac} A[X] \text{ est scindé} \\ A \text{ est intégralement clos} \end{array}.$$

Rappelons qu'un corps k est *algébriquement clos*, si pour toute extension $k \hookrightarrow K$, la clôture algébrique de k dans K vaut k. Disons qu'un anneau A est IC si, pour toute extension $A \longrightarrow B$, la clôture intégrale de A dans B vaut A (vu dans B). Vu l'exemple $A \hookrightarrow M_2(A)$ qui force $A = M_2(A)$, le seul anneau IC est l'anneau nul. Disons plutôt qu'un anneau A est IC si, pour toute extension $A \longrightarrow K$ vesr un *corps*, la clôture intégrale de A dans K vaut A (vu dans K). On montre alors

■qu'un anneau *intègre* IC est int clos (prendre $K = FracA$),

■que tout polynôme unitaire de $A[X]$ admet une racine dans A (soit $P \in A[X]$ unitare, soit K un corps de décomposition de P vu dans $(\operatorname{Frac} A)[X]$, alors P admet une racine $\lambda \in K$, donc λ est entier, donc $\lambda \in A$) et

■que Frac A est algèbriquement clos (soit $P \in (\operatorname{Frac} A)[X]$ unitaire, disons $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{b_i} X^i$. Notons μ un dénom commun, alors $\mu^n P = (\mu X)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{\mu^{n-i}}{b_i} (\mu X)^i = Q(\mu x)$ où Q unitaire (donc admet une racine $a \in A$), d'où $\frac{a}{\mu}$ racine de P).

Réciproquemnt, si tout polynôme unitaire de $A[X]$ se scinde, alors A est IC (soit $A \longrightarrow K \ni \lambda$ entier, disons $P(\lambda) = 0$, alors $P = \prod (X - a_i)$, donc $0 = \prod (\lambda - a_i)$, donc $\exists i, \ = a_i)$. ? ? ? ?

Finitude des clôtures intégrales.

Plus précisément, cherchons des conditions pour qu'une clôture intégrale soit *finie* – comme module sur l'anneau de base.

Lorsque l'extension dans laquelle on prend la clôture intégrale est *finie* (sur l'anneau de base), cette dernière sera toujours finie sur un anneau *noethérien*, vu qu'un sous-module d'un module de type fini est alors de type fini.

En particulier, sur un anneau noethérien *intègre*, la clôture intégrale dans une extension du corps des fractions finie (sur l'anneau de base) est finie :

$$\begin{tikzcd} A^{\text{intègre}}_{\text{noeth.}} \arrow[r, "\text{finie ? oui !}"] \arrow[d] \arrow[drr, "\text{finie}"] & & \overline{A} \arrow[d] \\ \operatorname{Frac} A \arrow[rr, hook] & & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^{\text{intègre}}_{\text{noeth.}} \arrow[r, "\text{finie ?}"] \arrow[d] & \overline{A} \arrow[d] \\ \operatorname{Frac} A \arrow[r, hook, "\text{finie}"] & K \end{tikzcd}$$

Que se passe-t-il si l'on suppose seulement l'extension Frac $A \hookrightarrow K$ finie ? Le théorème qui suit montre que la finitude de $A \hookrightarrow \overline{A}$ tient encore sous deux hypothèses supplémentaires.

Soit $k \hookrightarrow K$ une extension du corps des fractions k d'un anneau A *normal*. On note $\overline{A}$ la clôture intégrale de A dans K :

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \overline{A} \\ {\scriptstyle \text{int}} \downarrow {\scriptstyle \text{clos}} & & {\scriptstyle \text{int.}} \downarrow {\scriptstyle \text{clos}} \\ k & \hookrightarrow & K \end{array}.$$

Lemme. *Un élément de $\overline{k}$ est entier sur A ssi son polynôme minimal*[43] *est à coefficients dans A.*

[43] Tout élément de la clôture algébrique $\overline{k}$ est algébrique sur k, donc admet un polynôme minimal dans $k[X]$.

Théorème. *Supposons A noethérien et l'extension $k \hookrightarrow K$ séparable. Alors la finitude de l'extension $k \hookrightarrow K$ implique celle de l'algèbre entière $A \hookrightarrow \overline{A}$.*

Démonstrations.
(du lemme) Le sens réciproque est trivial. Soit maintenant $x \in \overline{k}$ entier sur A. On scinde son polynôme minimal μ_x dans $\overline{k}$, mettons $\mu_x = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$. La théorie de Galois nous donne un automorphisme[44] σ_i de $\overline{k}$ fixant k et envoyant x sur x_i. Puisque σ_i respecte les opérations algébriques, $\sigma_i(x)$ est annulé par tout polynôme annulant x, donc x_i est entier sur A, et ceci pour tout i. Par conséquent, les coefficients de μ_x aussi (ce sont des polynômes en les racines x_i) ; puisqu'ils sont dans k et que A est intégralement clos, ces coefficients sont dans A, *CQFD.*

(du théorème) Dans le k-ev K de dimension finie, le polynôme minimal μ_x d'un $x \in K$ vaut celui de l'homothétie de rapport x dans le k-ev K. Puisque μ_x est séparable, il se scinde simplement dans toute clôture algébrique $\overline{K}$ de K, ce qui revient à la diagonalisabilité (dans $\overline{K}$) de l'homothétie concernée avec toutes les valeurs propres simples, donc la trace $\operatorname{tr} x$ de cette dernière est la somme des racines[45] de μ_x, à savoir le coefficient sous-dominant de μ_x. Ce dernier étant à coefficient dans A d'après la proposition précédente, le scalaire $\operatorname{tr} x \in K$ tombe dans A.

L'extension $k \hookrightarrow K$ étant finie, on peut écrire $K = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$ pour n éléments e_i de K. En considérant $d \in A$ un dénominateur commun aux coefficients des polynômes minimaux des e_i, multiplier par une puissance de d montre que que les de_i sont entiers sur A. Quitte à remplacer les e_i par de_i, on peut donc supposer les e_i dans $\overline{A}$.

En décomposant $x = \sum \lambda_i e_i$, on trouve $\operatorname{tr}(xe_j) = \sum \lambda_i \operatorname{tr}(e_i e_j)$ pour tout j. On obtient un système en les λ_i dont le déterminant $\Delta := \det \operatorname{tr}(e_i e_j)$ est non nul puisque l'extension est séparable[46], d'où $\lambda_j = \frac{\operatorname{tr}(xe_j)}{\Delta} \in \frac{1}{\Delta} A$. On a ainsi une application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \overline{A} & \hookrightarrow & \frac{1}{\Delta} A^n \\ x & \longmapsto & \overrightarrow{\lambda} \end{array} \right.$, ce qui montre que $\overline{A}$ est sous-module d'un module de type fini sur un anneau noethérien, donc est de type fini, *CQFD.*

Remarque. La réciproque du théorème est fausse : la finitude de $A \hookrightarrow \overline{A}$ n'implique pas celle de $\operatorname{Frac} A \hookrightarrow K$. En effet, si $A = k$ est un corps (donc un anneau noethérien) et K est le corps $k(x)$ (de sorte que l'extension $k \hookrightarrow K$ est infinie), alors les fractions rationnelles entières sur k sont les constantes, donc la clôture intégrale $A \hookrightarrow \overline{A}$ vaut $k \hookrightarrow k$ et est finie :

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\text{finie}}{\hookrightarrow} & \overline{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Frac} A & \underset{\text{non !}}{\overset{\text{finie ?}}{\hookrightarrow}} & K \end{array}.$$

En revanche, si K est le corps des fractions de $\overline{A}$ (clôture intégrale dans une certaine extension de k), alors la réciproque est vraie. On l'établira une fois construit le modules des fractions.

Proposition (passage de la finitude d'une extension entière au corps des fractions).
On note $\overline{A}$ la clôture intégrale d'un anneau intègre A dans une extension de son corps des fraction. Alors la finitude de $A \hookrightarrow \overline{A}$ entraîne celle de $\operatorname{Frac} A \hookrightarrow \operatorname{Frac} \overline{A}$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{\text{finie}}{\hookrightarrow} & \overline{A} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \operatorname{Frac} A & \underset{\text{oui !}}{\overset{\text{finie ?}}{\hookrightarrow}} & \operatorname{Frac} \overline{A} & \hookrightarrow & ? \end{array}.$$

---

[44] Les évaluations en x et en x_i sont de noyau $(\mu_x) = (\mu_{x_i})$, d'où des isomorphismes

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} k(x) & \cong & {}^{k[X]}\!/\!{}_{\mu_x} & \cong & k(x_i) \\ x & \longleftrightarrow & X & \longleftrightarrow & x_i \end{array} \right. .$$

[45] avec ou sans multiplicité : c'est pareil vu qu'elles sont toutes simples

[46] Rappelons pourquoi la forme quadratique $x \mapsto \operatorname{tr} x^2$ définie sur une extension $k \hookrightarrow K$ finie séparable est non dégénérée. La séparabilité et le théorème de l'élément primitif nous autorisent à écrire $K = k[a]$ pour un certain $a \in K$ dont le polynôme minimal μ_a est séparable. En notant a_i ses racines dans $\overline{K}$, le discriminant de $x \mapsto \operatorname{tr} x^2$ dans la base $(1, a, a^2, \ldots)$ est le déterminant des

$$\operatorname{tr}(a^i a^j) = \operatorname{tr} a^{i+j} = \sum_k a_k^{i+j} = \left[{}^t V V\right]_{i,j}$$

avec V la matrice Vandermonde des a_i, donc est non nul puisque les a_i sont distincts (par séparabilité).

Démonstration.
Nous allons montrer un fait plus général : le corps K des fractions de $\overline{A}$ s'obtient en tensorisant $\overline{A}$ par celui k de A :

$$\underbrace{\operatorname{Frac}\overline{A}}_{K:=} = \overline{A} \otimes_A \underbrace{\operatorname{Frac} A}_{k:=} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \overline{A} & \hookrightarrow & K \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{A} \otimes A \cong \overline{A} & \overset{?}{\hookrightarrow} & \overline{A} \otimes k & \hookrightarrow & K \cong K \otimes k \\ \uparrow {\scriptstyle \text{finie}} & & \uparrow {\scriptstyle \text{finie}} & & \\ A & \hookrightarrow & k & & \end{array} .$$

La sous-algèbre $\overline{A} \hookrightarrow K$ reste injective après tensorisation par k (qui est plat sur A), donc $\overline{A} \otimes k$ est une sous-algèbre de $K \otimes_A k \cong K$, en particulier est intègre ; puisque $\overline{A}$ est finie sur A, l'algèbre $\overline{A} \otimes k$ est de plus finie sur k, donc est un corps.

Montrons que ce dernier contient $\overline{A}$, ce qui conclura (il devra alors contenir le corps des fractions de $\overline{A}$, or on a établi l'injection $\overline{A} \otimes k \hookrightarrow K$).

Il revient à montrer l'injectivité de la flèche $\overline{A} \longrightarrow \overline{A} \otimes k$ obtenue en tensorisant par $\overline{A}$ l'injection $A \hookrightarrow k$. En tensorisant par 1 une relation algébrique annulant un $\alpha \in \overline{A}$, l'égalité $\alpha \otimes 1 = 0$ implique la nullité du coefficient constant, ce que l'on peut toujours éviter dès que α est non nul par intégrité de $\overline{A}$.

3 Localisé et corps résiduel en un idéal premier

3.1 Motivation et description des localisés $M_{\mathfrak{p}}$ et $A_{\mathfrak{p}}$

Introduction. Considérons l'anneau $A := C^0(X, \mathbf{R})$, un point $x \in X$ et posons

$$S_x := \{f \in A \ ; \ f(x) \neq 0\} = \{f \in A \ ; \ f \neq 0 \text{ au voisinage de } x\}.$$

La partie S_x est clairement multiplicative et on peut décrire l'algèbre localisée

$$A\left[\frac{1}{S_x}\right] = \left\{\frac{f}{s} \ ; \ s \neq 0 \text{ au voisinage de } x\right\}.$$

On observera par ailleurs que :

1. d'une part, une égalité $\frac{f}{s} = \frac{g}{t}$ dans $A\left[\frac{1}{S_x}\right]$ s'écrit $\exists \sigma \in S_x$, $\sigma f t = \sigma g s$, ce qui se réécrit (dans A) sous la forme $\frac{f}{s} = \frac{g}{t}$ au voisinage de x ; en d'autres termes, deux éléments sont *égaux dans l'algèbre localisée* ssi les fonctions associées *coïncident localement* en x ,
2. d'autre part, si l'on veut évaluer une fonction $\frac{f}{s} \in A\left[\frac{1}{S_x}\right]$, on ne pourra le faire que là où s ne s'annule pas, donc nécessairement dans un voisinage de x ; en d'autres termes, les éléments de l'algèbre localisée ne peuvent s'*évaluer* que *localement en* x.

Ces deux remarques éclairent en quoi *localiser* l'anneau A selon la partie $S_x = {}^c\mathfrak{m}_x$ (complémentaire d'un idéal premier) revient à regarder les fonctions de A *localement* en x.

Cet exemple, qui sera englobé dans l'avant-dernier point du paragraphe 5.2, motive la généralisation suivante, exemple importantissime de partie multiplicative dont on considérera l'algèbre des fractions.

Localisé en un idéal premier. Supposons A non nul et prenons un idéal premier $\mathfrak{p}$. Le complémentaire $A \setminus \mathfrak{p}$ contient 1 (car $\mathfrak{p}$ est un idéal strict) et est stable par produit (par primalité de $\mathfrak{p}$). Par définition, le ***localisé en*** $\mathfrak{p}$ est le module des fractions selon la partie multiplicative[47] $A \setminus \mathfrak{p}$; on le note

$$M_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1} M \qquad (\text{où } M \text{ est un module sur } A).$$

Observer de suite que, 0 étant toujours dans $\mathfrak{p}$, on évite le cas pathologique où 0 est un dénominateur autorisé (et où le localisé $M_{\mathfrak{p}}$ est alors nul).

[47] La réciproque est claire : si I est un idéal de A, la partie $A \setminus I$ est multiplicative ssi I est premier (contraposer la primalité de I).

On rappelle que localiser un module revient à le tensoriser par le localisé de l'anneau de base :

$$\left\{\begin{array}{ccc} M_{\mathfrak{p}} & \cong & M\otimes_A A_{\mathfrak{p}} \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & m\otimes\frac{1}{s} \\ \frac{am}{s} & \longleftarrow & m\otimes\frac{a}{s}\end{array}\right. ,\qquad \begin{array}{c}\text{ce qui nous amène à}\\ \text{nous concentrer sur}\\ \text{le cas où } M=A.\end{array}$$

Description du localisé $A_{\mathfrak{p}}$. Une observation préliminaire : d'une part toute fraction de $A_{\mathfrak{p}}$ est de la forme $\frac{s}{s'}$ ou $\frac{p}{s"}$ avec $s, s', s'' \notin \mathfrak{p} \ni p$, d'autre part deux telles fractions ne peuvent coïncider, sinon il y aurait un $\sigma \in S := A \backslash \mathfrak{p}$ tel que $\sigma s s'' = \sigma s' p \in \mathfrak{p}$, donc par primalité de $\mathfrak{p}$ l'un des éléments σ, s, s'' serait dans $\mathfrak{p}$. La décomposition obtenue peut s'écrire

$$A_{\mathfrak{p}} = \left(S\frac{1}{S}\right) \amalg \left(\mathfrak{p}\frac{1}{S}\right).$$

Intéressons-nous aux inversibles de $A_{\mathfrak{p}}$. Soit $\frac{a}{s}$ d'inverse $\frac{a'}{s'}$, ce qui s'écrit $\frac{\alpha a'}{ss'} = 1$, d'où un $\sigma \notin \mathfrak{p}$ tel que $\sigma a a' = \sigma s s'$. Puisque ni s ni s' ni σ sont dans $\mathfrak{p}$, le produit $\sigma s s'$ ne l'est pas, donc $\sigma a a'$ non plus, donc aucun des facteurs a et a' non plus. Finalement, $\frac{a}{s}$ est le quotient de deux éléments hors de $\mathfrak{p}$ et il est clair qu'un tel quotient est inversible. On conclut

$$A_{\mathfrak{p}}^{\times} = \left\{\frac{s}{s'}\right\}_{s,s'\notin\mathfrak{p}}.$$

Localité du localisé. D'après l'observation ci-dessus, les non inversibles du localisé $A_{\mathfrak{p}}$ sont donnés par

$$A_{\mathfrak{p}} \backslash A_{\mathfrak{p}}^{\times} = \left\{\frac{p}{s}\right\}_{s\notin\mathfrak{p}\ni p} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}},$$

la dernière égalité venant de l'idéalité de $\mathfrak{p}$. Les non inversibles sont donc stables par addition, ce qui montre[48] que

le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ est local ;

réciproquement, dans un anneau local L d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, les inversibles sont les éléments hors de tout idéal maximal, *i. e.* ceux de $L \backslash \mathfrak{m}$, donc le localisé $L_{\mathfrak{m}}$ est isomorphe à L. On en déduit que *les anneaux locaux sont exactement les anneaux localisés (en des idéaux premiers)*, ce qui devrait (à l'aide de l'introduction topologique) éclairer la terminologie.

Le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$ est noté

$$\kappa_{\mathfrak{p}} = \kappa(\mathfrak{p}) := {}^{A_{\mathfrak{p}}}\diagup_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}.$$

Des localisés non locaux. On montre en exercice qu'une algèbre des fractions $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est un anneau *local* ssi les diviseurs de S forment le complémentaire d'un idéal premier de A. Ainsi, en dépit du vocabulaire, le localisé $A\left[\frac{1}{S}\right]$ en une partie multiplicative S quelconque (pas de la forme ${}^c\mathfrak{p}$) n'est en général pas local. On vérifiera par exemple que l'anneau $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ possède une infinité d'idéaux maximaux, les (p) pour p nombre premier (c'est normal puisque que les impairs ne sont multiples d'aucun premier à la fois).

3.2 Propriétés du corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$

Voici une autre façon de calculer le corps résiduel.

Proposition.
Pour $\mathfrak{p}$ premier, le corps des fractions de ${}^{A}\diagup_{\mathfrak{p}}$ s'identifie naturellement au corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ via l'isomorphisme

$$\left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Frac}\left({}^{A}\diagup_{\mathfrak{p}}\right) & \cong & {}^{A_{\mathfrak{p}}}\diagup_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} \\ \frac{\overline{a}}{\overline{b}} & \longleftrightarrow & \widetilde{\frac{a}{b}}\end{array}\right. .$$

Démonstration.
Les deux flèches étant trivialement réciproques l'une de l'autre, il suffit de montrer qu'elles sont bien définies.

[48] rappelons que $A_{\mathfrak{p}}$ est non nul puisque $\mathfrak{p}$ ne contient pas 1

Le noyau de la flèche $\begin{cases} A & \longrightarrow & \kappa(\mathfrak{p}) \\ a & \longmapsto & \widetilde{\frac{a}{1}} \end{cases}$ contient $\mathfrak{p}$ (on raisonne *modulo* $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ à l'arrivée), donc induit une flèche quotient $\begin{cases} A/\mathfrak{p} & \longrightarrow & \kappa(\mathfrak{p}) \\ \overline{a} & \longmapsto & \widetilde{\frac{a}{1}} \end{cases}$, laquelle se prolonge sur le corps des fractions en $\begin{cases} \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) & \longrightarrow & \kappa(\mathfrak{p}) \\ \frac{\overline{a}}{\overline{b}} & \longmapsto & \frac{\widetilde{a/1}}{\widetilde{b/1}} \end{cases}$.
Pour voir que la flèche $\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$ de l'énoncé est bien définie, il suffit d'écrire

$$\frac{\widetilde{a/1}}{\widetilde{b/1}} = \widetilde{\frac{a}{1}}\,\widetilde{\frac{b}{1}}^{-1} = \widetilde{\frac{a}{1}}\,\widetilde{\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}} = \widetilde{\frac{a}{1}\frac{1}{b}} = \widetilde{\frac{a}{b}}.$$

Montrons ensuite que la flèche $\begin{cases} A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{\overline{a}}{\overline{s}} \end{cases}$ est bien définie. Si l'on admet cela, en observant que les $\frac{p}{s}$ de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ sont envoyés sur $\frac{\overline{p}}{\overline{s}} = \overline{0}$, on pourra passer *modulo* $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ et conclure. Considérons deux représentants $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$. Il y a un $\sigma \in S$ tel que $\sigma a s' = \sigma a' s$. Passant *modulo* $\mathfrak{p}$, on tombe dans l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$ où les éléments σ, s, s' sont non nuls donc inversibles dans le corps des fractions, ce qui donne sens à et justifie l'égalité $\frac{\overline{a}}{\overline{s}} = \frac{\overline{a'}}{\overline{s'}}$.

On peut se demander comment la localisation se comporte par passage au quotient et à l'algèbre des fractions. Pour cette dernière, il est topologiquement intuitif que regarder localement ce qui se passe déjà localement est... regarder localement, ce qui ne devrait pas changer grand chose. On obtiendra la même conclusion (à défaut d'une intuition topologique) pour le quotient.

On retiendra que *localiser ou quotienter ne change rien au corps résiduel.*

Proposition.

1. *Soit I un idéal et $\mathfrak{p}$ un premier contenant I. En notant $\overline{A}$ et $\overline{\mathfrak{p}}$ les quotients A/I et $\mathfrak{p}/I$, on a un isomorphisme canonique*
$$\begin{cases} A/\mathfrak{p} & \cong & \overline{A}/\overline{\mathfrak{p}} \\ a \pmod{\mathfrak{p}} & \longleftrightarrow & \overline{a} \pmod{\overline{\mathfrak{p}}} \end{cases}$$
En particulier, les corps résiduels $\kappa(\mathfrak{p}) \cong \kappa(\overline{\mathfrak{p}})$ sont identiques.
2. *Soit S une partie multiplicative et $\mathfrak{p}$ un premier disjoint de S. On a un isomorphisme canonique*
$$\begin{cases} A_{\mathfrak{p}} & \widetilde{\longrightarrow} & A\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]} \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{a/1}{s/1} \\ \frac{as''}{ss'} & \longleftarrow & \frac{a/s}{s'/s''} \end{cases}.$$
En particulier, les corps résiduels $\kappa_{\mathfrak{p}} \cong \kappa_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]}$ sont identiques.

Démonstration.

1. C'est l'isomorphisme canonique $A/\mathfrak{p} = {}^{(A/I)}/_{(\mathfrak{p}/I)} \cong \overline{A}/\overline{\mathfrak{p}}$. Pour identifier les corps résiduels, on prend le corps des fractions et on applique la proposition précédente.
2. On a déjà vu que $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$ est premier dans $A\left[\frac{1}{S}\right]$.

   Ensuite, pour $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ dans $A_{\mathfrak{p}}$, il y a un $\sigma \in S$ tel que $\sigma a s' = \sigma a' s$, d'où $\frac{\sigma}{1}\frac{a}{1}\frac{s'}{1} = \frac{\sigma}{1}\frac{a'}{1}\frac{s}{1}$ dans $A_{\mathfrak{p}}$ et l'égalité $\frac{a/1}{s/1} = \frac{a'/1}{s'/1}$ dans $A\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]}$ vu que $\frac{\sigma}{1} \in S\frac{1}{S} \subset ({}^c\mathfrak{p})\frac{1}{S} = {}^c\left(\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]\right)$. La flèche $\longrightarrow$ est donc bien définie. Par ailleurs, une égalité $\frac{a/s}{s'/s''} = \frac{b/t}{t'/t''}$ dans $A\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]}$ implique l'existence d'un $\frac{\sigma}{\sigma'} \in {}^c\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]$ tel que $\frac{\sigma}{\sigma'}\frac{a}{s}\frac{t'}{t''} = \frac{\sigma}{\sigma'}\frac{b}{t}\frac{s'}{s''}$ dans $A\left[\frac{1}{S}\right]$, ce qui s'écrit après multiplication par tous les dénominateurs $\sigma(as'')(tt') = \sigma(bt'')(ss')$, d'où l'égalité $\frac{as''}{ss'} = \frac{bt''}{tt'}$ dans $A\left[\frac{1}{S}\right]$. La flèche $\longleftarrow$ est donc bien définie.

   Enfin, montrons que ces flèches sont réciproques. Un élément $\frac{a}{s}$ est envoyé sur $\frac{\frac{a}{1}}{\frac{s}{1}}$ puis sur $\frac{a1}{1s} = \frac{a}{s}$. Un élément $\frac{\frac{a}{s}}{\frac{s'}{s''}}$ est envoyé sur $\frac{as''}{ss'}$ puis sur $\frac{as''/1}{ss'/1}$, ce qui vaut bien $\frac{a/s}{s'/s''}$ après multiplication de ce dernier par ss'' « en haut et en bas ».

   Les anneaux locaux $A_{\mathfrak{p}}$ et $A\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]}$ étant isomorphes, leurs corps résiduels le sont également.

Lorsque l'anneau $k \hookrightarrow A$ est une algèbre sur un corps k, le corps résiduel est une extension de ce dernier. On peut se demander à quelle condition cette extension est finie.

Pour les algèbres de type fini, le lemme de ZARISKI donne une réponse rapide. En effet, si $k \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$ est finie, alors l'algèbre intègre ${}^{A}\!/\!{}_{\mathfrak{p}}$ est finie (en tant que sev de son corps des fractions), donc est un corps, ce qui équivaut à la maximalité de $\mathfrak{p}$. Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est maximal, alors le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p}) \cong {}^{A}\!/\!{}_{\mathfrak{p}}$ est une algèbre de type fini (car A l'est), donc finie d'après ZARISKI.

Finalement, *si $\mathfrak{p}$ est un point du spectre d'une k-algèbre de type fini (où k est un corps), alors*

$$\textit{l'extension } k \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \textit{ est finie ssi l'idéal } \mathfrak{p} \textit{ est maximal.}$$

3.3 Exemples & application

Regardons l'anneau $A := \mathbf{C}[X]$. D'après le nullstellensatz, ses idéaux maximaux sont les $(X-\lambda)$ pour λ décrivant $\mathbf{C}$ (si l'on veut tout le spectre, il faut rajouter l'idéal nul). Pour $\mathfrak{p} := (X-\lambda)$ un tel idéal, la partie multiplicative dont on prend l'algèbre des fractions est constituée des polynômes ne s'annulant pas en λ. On peut donc voir le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ comme l'ensemble des fractions rationnelles n'ayant pas λ comme pôle. Ses non inversibles sont les fractions s'annulant en λ, autrement dit le noyau de l'évaluation en λ, laquelle est d'image le corps $\mathbf{C}$. Quotientant par ce noyau $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, on en déduit que le corps résiduel en $\mathfrak{p}$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ *via* l'évaluation en λ, isomorphisme qui identifie par ailleurs ${}^{\mathbf{C}[X]}\!/\!{}_{(X-\lambda)}$ avec $\mathbf{C}$.

Concernant l'idéal nul η, plaçons-nous dans le cas le plus général, à savoir dans un anneau intègre – pour que η soit bien dans le spectre.

Localisation dans un anneau intègre.

1. *Localiser en l'idéal nul revient à prendre le corps des fractions de l'anneau :*

$$A_\eta = \operatorname{Frac} A = \kappa(\eta).$$

2. *Un anneau intègre est l'intersection de ses localisés et l'on peut se restreindre aux maximaux :*

$$A = \bigcap A_{\mathfrak{p}} = \bigcap A_{\mathfrak{m}}.$$

Démonstration.

1. Il suffit d'expliciter

$$A_\eta = \left\{\frac{a}{s}\ ;\ s \notin \eta\right\} = \left\{\frac{a}{s}\ ;\ s \neq 0\right\} = \operatorname{Frac} A.$$

   Le corps résiduel s'obtient également en prenant le corps des fractions du quotient ${}^{A}\!/\!{}_{\eta} \cong A$ par l'idéal η (ce pour faire écho à une proposition précédente).

2. Déjà, l'intégrité assure l'injectivité de toutes les localisations ainsi que le prolongement des localisés dans le même corps des fractions, ce qui donne sens à l'énoncé et trivialise une inclusion :

$$A \subset \bigcap A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow A_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \operatorname{Frac} A.$$

   Ensuite, soit $x \in \operatorname{Frac} A$ dans tous les localisés, mettons $x = \frac{a_{\mathfrak{m}}}{s_{\mathfrak{m}}}$ avec $s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$. L'idéal $\{a \in A\ ;\ ax \in A\}$ des dénominateurs de x contient tous les $s_{\mathfrak{m}}$, donc n'est inclus dans aucun idéal maximal, donc est l'idéal total, donc contient 1, d'où $x = 1x \in A$, *CQFD*.

Citons à présent une applications de la localisation qui donne une condition suffisante pour que le spectre d'une flèche injective soit surjective.

Proposition (théorème de Cohen-Seidenberg).
Soit $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ une algèbre **entière** *injective. Alors $\operatorname{Sp}\varphi$ est surjective.*

Démonstration.

Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$ et S la partie $A \backslash \mathfrak{p}$. L'injection $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ (dont on notera l'action par un exposant) se localise par exactitude en $A_{\mathfrak{p}} \overset{S_{\varphi}^{-1}\varphi}{\hookrightarrow} B\left[\frac{1}{\varphi S}\right]$, le caractère entier étant préservé. Puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est local, il est non nul, donc $({}^{\varphi}S)^{-1} B$ aussi, donc $B\left[\frac{1}{\varphi S}\right]$ admet un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Ce dernier, comme tout idéal premier de $B\left[\frac{1}{\varphi S}\right]$, est de la forme $\mathfrak{q}\left[\frac{1}{\varphi S}\right]$ pour un $\mathfrak{q} \in \operatorname{Sp} B$ disjoint de ${}^{\varphi}S$. Montrons que $\mathfrak{q}$ est un antécédent de $\mathfrak{p}$ par $\operatorname{Sp}\varphi$, à savoir $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.

Déjà, $\mathfrak{q}$ est disjoint de ${}^{\varphi}S$, donc est inclus dans ${}^{\varphi}\mathfrak{p}$, d'où l'inclusion $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ par injectivité de φ.

Soit réciproquement $p \in \mathfrak{p}$. Puisque la flèche $S_{\varphi}^{-1}\varphi$ est entière, une proposition précédente permet d'affirmer que l'idéal $\left[S_{\varphi}^{-1}\varphi\right]^{-1}(\mathfrak{m})$ est maximal dans l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$, donc vaut l'unique idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Puisque $\frac{p}{1}$ est dedans, on en déduit $\left[S_{\varphi}^{-1}\varphi\right]\left(\frac{p}{1}\right) \in \mathfrak{m} = \mathfrak{q}\left[\frac{1}{\varphi S}\right]$, d'où un $(q,s) \in \mathfrak{q} \times S$ tel que $\frac{{}^{\varphi}p}{{}^{\varphi}1} = \frac{q}{{}^{\varphi}s}$ dans $B\left[\frac{1}{\varphi S}\right]$, ce qui s'écrit $\exists \sigma \in S,\ {}^{\varphi}\sigma\, {}^{\varphi}s\, {}^{\varphi}p = {}^{\varphi}\sigma\, q \in \mathfrak{q}$; puisque $\mathfrak{q}$ est disjoint de ${}^{\varphi}S$, on doit avoir ${}^{\varphi}p \in \mathfrak{q}$, *i. e.* $p \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, *CQFD.*

3.4 Support, fibres, délocalisation (Nakayama)

Introduction. Dans l'anneau $A := C^0(X, \mathbf{R})$, connaître *globalement* une fonction revient à la connaître *localement en tout point*, d'où l'intuition $A \hookrightarrow \prod_{x \in X} A_{\mathfrak{m}_x}$. Pour une fonction donnée $f \in A$, que l'on codera par le module $(f) = Af$ de type fini, cette intuition devient $(f) \hookrightarrow \prod_{x \in X} (f)_{\mathfrak{m}_x}$ et se précise : connaître f revient à la connaître localement en tout point *de son support*[49] $\operatorname{Supp} f$, d'où l'intuition $(f) \hookrightarrow \prod_{x \in \operatorname{Supp} f} (f)_{\mathfrak{m}_x}$.

Par ailleurs, connaître f *localement* revient à connaître f *ponctuellement* : on a ainsi envie que la nullité *ponct*uelle de $f(x)$ (qui équivaut à celle du produit tensoriel $(f) \otimes \kappa(\mathfrak{m}_x) \cong \mathbf{R} f(x)$) revienne à celle du *local*isé $(f)_{\mathfrak{m}_x}$.

Généralisons tout cela en remplaçant le module (f) de rang 1 par un module M quelconque (éventuellement de type fini).

Support d'un module. On dispose pour tout premier $\mathfrak{p}$ d'une flèche de localisation $M \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}$, donc d'une flèche produit $M \longrightarrow \prod M_{\mathfrak{p}}$. Bien que chaque localisation n'ait pas de raison d'être injective, leur produit l'est toujours (et on peut même se restreindre aux idéaux maximaux) :

un module se plonge dans le produit de ses localisés (en les idéaux maximaux).

Démonstration. Soit $m \in M$ dont les images $\frac{m}{1}$ sont nulles dans $M_{\mathfrak{m}}$. On en déduit la nullité des modules $A_{\mathfrak{m}} m$ pour tout $\mathfrak{m}$, donc celle du module $\prod A_{\mathfrak{m}} m$. Notons $P := \prod A_{\mathfrak{m}}$. En remarquant d'une part l'isomorphisme $\prod_i \left(A\left[\frac{1}{S_i}\right] m\right) \cong \left(\prod_i A\left[\frac{1}{S_i}\right]\right) \otimes Am$ pour toutes parties S_i multiplicatives, d'autre part l'isomorphisme $Am \cong {}^{A}\!\diagup_{I}$ où I est l'idéal annulateur de m, on obtient la nullité du module

$$\prod (A_{\mathfrak{m}} m) \cong \left(\prod A_{\mathfrak{m}}\right) \otimes Am \cong P \otimes {}^{A}\!\diagup_{I} \cong {}^{P}\!\diagup_{IP}, \text{ d'où } IP = P.$$

Supposons m non nul. L'idéal I est alors strict, donc est contenu dans un maximal $\mathfrak{M}$ de A, mettons $I \subset \mathfrak{M} \subset A$, d'où les inclusions $\underbrace{IP}_{=P} \subset \mathfrak{M}P \subset \underbrace{AP}_{=P}$ et l'égalité $\mathfrak{M}P = P$. Les projections de $\mathfrak{M}$ sur chaque $A_{\mathfrak{m}}$ étant des idéaux $I_{\mathfrak{m}} \subset A_{\mathfrak{m}}$, l'égalité précédente se réécrit $I_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m}$. Mais l'un des $I_{\mathfrak{m}}$ est strict car $\mathfrak{M}$ est strict, donc contenu dans $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ (l'unique idéal maximal de $A_{\mathfrak{m}}$), d'où l'inclusion $I_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} \subsetneq A_{\mathfrak{m}}$ et la contradiction.

En appelant ***support*** d'un A-module M l'ensemble

$$\operatorname{Supp} M := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \ ;\ M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

des points de $\operatorname{Sp} A$ où le localisé est non nul, l'injection ci-dessus en reste une si l'on corestreint aux localisés *non nuls*. Remarquer au passage que le support d'un anneau vaut tout le spectre :

$$\operatorname{Supp} A = \operatorname{Sp} A$$

[49] Rappelons que le ***support*** d'une fonction réelle est l'adhérence des points où elle ne s'annule pas. Ainsi, un point n'est pas dans le support ssi la fonction est nulle *au voisinage de* ce point (et pas seulement en ce point).

(en termes fonctionnels, l'inclusion $\supset$ dit que l'on peut toujours trouver une fonction n'annulant pas un point donné). En appelant ***support maximal*** l'intersection $\operatorname{Supp}_m M$ du support et du spectre maximal, on obtient

$$M \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp}_m M} M_{\mathfrak{m}}.$$

En particulier, un module est nul ssi son support est vide :

$$M = 0 \iff \operatorname{Supp} M = \emptyset.$$

Sanity check. Reprenons notre module (f) sur l'anneau $C^0(X, \mathbf{R})$ et montrons la nullité du localisé en point hors du support. Soit $x \in X \setminus \operatorname{Supp} f$: il y a un voisinage ouvert V de x où f est nulle. Notons $d := d({}^cV, \cdot)$ la distance au complémentaire de V, qui est dans $\mathfrak{m}_x$ (sinon $x \in \overline{{}^cV} = {}^c\mathring{V} = {}^cV$) et qui vérifie $fd = 0$. On a alors, dans le localisé $(f)_{\mathfrak{m}_x}$, l'égalité de toutes les fractions $\frac{af}{s} = \frac{bf}{t}$ puisque $d(aft) = (df)\,at = 0 = df\,(bs) = d(bfs)$.

Montrons que notre définition de support (d'un module) prolonge bien celle d'une fonction.

Proposition. *Le support d'une fonction f est le support maximal du module qu'elle engendre* :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Supp} f & \cong & \operatorname{Supp}_m(f) \\ x & \leftrightarrow & \mathfrak{m}_x \end{array} \right.$$

(on s'est placé sur l'anneau $A := C^0(X, \mathbf{R})$ où X est un espace complètement régulier).

Démonstration.

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal associé à un point $x \in X$. D'après Nakayama, on a pour tout module M de type fini les équivalences

$$\mathfrak{m} \notin \operatorname{Supp} M \iff 0 = M \otimes \kappa(\mathfrak{m}) = M \otimes {}^{A}/_{\mathfrak{m}} = {}^{M}/_{\mathfrak{m}M} \iff M = \mathfrak{m}M.$$

En particulier, pour $M := (f) = Af$, ces équivalences se poursuivent en $Af = \mathfrak{m}Af = \mathfrak{m}f$, ce qui signifie $f \in \mathfrak{m}f$, mettons $f = \mu f$ pour un $\mu \in \mathfrak{m}$. On a alors clairement $\mu = 1$ là où f ne s'annule pas, égalité qui se propage sur tout le support de f par continuité de μ. Réciproquement, si $\mathfrak{m}$ contient un μ valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$, alors on aura l'égalité $f = \mu f$ partout (elle s'écrit $0 = 0$ en dehors du support), ce qui montre l'équivalence

$$\mathfrak{m} \notin \operatorname{Supp}(f) \iff \exists \mu \in \mathfrak{m},\ \mu_{|\operatorname{Supp} f} \equiv 1.$$

Ainsi, puisqu'un tel μ s'annule en x, ce dernier ne peut appartenir à $\operatorname{Supp} f$. Réciproquement, si $x \notin \operatorname{Supp} f$, on sait construire (puisque X est complètement régulier) une fonction continue nulle en x et valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$, ce qui conclut.

Fibres d'un module. Définissons.la ***fibre*** en $\mathfrak{p}$ de M par $M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$.

Pour la calculer, on observe l'isomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) & \cong & M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p}) \\ m \otimes \frac{\overline{a}}{\overline{b}} & \longmapsto & \frac{m}{1} \otimes \widetilde{\frac{a}{b}} \\ m \otimes \frac{\overline{a}}{\overline{sb}} & \longleftarrow & \frac{m}{s} \otimes \widetilde{\frac{a}{b}} \end{array} \right.$ (le s n'étant pas dans $\mathfrak{p}$, la classe $\overline{s}$ au dénominateur est bien non nulle), puis on calcule le produit tensoriel

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} {}^{A_{\mathfrak{p}}}/_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} \cong {}^{M_{\mathfrak{p}}}/_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}M_{\mathfrak{p}}} = {}^{M_{\mathfrak{p}}}/_{(\operatorname{Jac} A_{\mathfrak{p}})M_{\mathfrak{p}}}$$

où la dernière égalité vient de ce que $A_{\mathfrak{p}}$ est local (et donc son radical de Jacobson vaut son unique idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$). Par conséquent, *lorsque M est de type fini*, le module $M_{\mathfrak{p}}$ l'est également (sur $A_{\mathfrak{p}}$), d'où les équivalences

$$M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = 0 \iff {}^{M_{\mathfrak{p}}}/_{(\operatorname{Jac} A_{\mathfrak{p}})M_{\mathfrak{p}}} = 0 \iff M_{\mathfrak{p}} = (\operatorname{Jac} A_{\mathfrak{p}})\, M_{\mathfrak{p}} \overset{\text{Nakayama}}{\iff} M_{\mathfrak{p}} = 0.$$

En d'autres termes, en tout point du spectre,

pour un module de type fini, le localisé est nul ssi la fibre est nulle.

Dit autrement, le support d'un module de type fini est décrit par les points dont la fibre est non nulle :

$$M \text{ de type fini} \implies \operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{p}\ ;\ M \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

L'intérêt de cette propriété réside, pour montrer la nullité de $M_{\mathfrak{p}}$, en ce que $\kappa(\mathfrak{p})$ est d'une part un *corps* (au lieu d'un anneau), d'autre part *plus "petit" que* $A_{\mathfrak{p}}$ (vu la surjection $A_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$).

Support et fibres permettent ainsi de remonter d'une information *ponctuelle* (la fibre) vers un information *locale* (le localisé) puis vers une information *globale* (tout le module).

Topologiquement, les supports de fonctions sont des *fermés*. Une fois introduite la topologie de ZARISKI sur le spectre d'un anneau, nous pourrons revoir les aspects topologiques des supports (*cf.* pargraphe 5.7).

3.5 Exercices

Autre construction de localisation.
Mq $A\left[\frac{1}{S}\right] \cong A\left[X_s\right]_{s\in U} / \left(sX_s - 1\right)_{s\in U}$

diviseurs de zéros dans les localisés.
Si l'on note $K := \{k \in A\ ;\ \exists s \in S,\ ks = 0\}$ le noyau de la flèche de localisation dans le cas $M = A$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\left\{\begin{array}{ccc} A\left[\frac{1}{S}\right] & \cong & {}^{A}\!\diagup_{K}\left[\frac{1}{{}^{S}\!\diagup_{K}}\right] \\ \frac{a}{s} & \longleftrightarrow & \frac{\overline{a}}{\overline{s}} \end{array}\right.$$

permettant de changer d'anneau de base, de sorte à éliminer les diviseurs de 0 de S.
On vérifiera les implications

$$\overline{sa} = \overline{0} \implies sa \in K \implies \exists \sigma \in S,\ \underbrace{\sigma s}_{\in S} a = 0 \implies a \in K \implies \overline{a} = \overline{0}.$$

Pour vérifier la bonne définition et l'injectivité, il suffit d'écrire les équivalences

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \iff \exists \sigma \in S,\ \sigma a s' = \sigma a' s \iff as' - a's \in K \iff \overline{a}\overline{s'} - \overline{a'}\overline{s} = \overline{0} \underset{\text{diviseurs de } \overline{0}}{\overset{{}^{S}\!\diagup_{K} \text{ n'a pas de}}{\iff}} \frac{\overline{a}}{\overline{s}} = \frac{\overline{a'}}{\overline{s'}}.$$

Rigidité des algèbres des fractions. Nous allons voir que l'algèbre $A\left[\frac{1}{S}\right]$ a une automorphie triviale. Plus généralement, si $A \xrightarrow{\rho} B$ est une algèbre et T une partie multiplicative de B, montrons qu'*il n'y a au plus qu'un ρ-morphisme d'algèbres* $A\left[\frac{1}{S}\right] \to B\left[\frac{1}{T}\right]$.
Simplfiier la preuve à l'aide des isomorphsiems ci-dessius afin de DEGAGER ces *$ù*^*^$ de diviseurs de 0.
Un tel morphisme φ est entièrement déterminé par les images des $\varphi\left(\frac{a}{s}\right) = \rho(a)\ \ \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$, donc par celles des $\varphi\left(\frac{1}{s}\right)$ pour s décrivant S. Or, à $s \in S$ fixé, le scalaire $x := \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$ est solution de l'équation $sx = 1$ (car φ préserve les 1). Montrons qu'une telle solution est unique (dans $B\left[\frac{1}{T}\right]$), ce qui conclura.
Soient $\frac{b}{t}$ et $\frac{c}{u}$ deux solutions.
Puisque $\frac{sb}{t} = 1$, il y a un $v \in T$ tel que $vsb = vt$; en particulier, l'élément $bsv = tv$ est dans T puisque cette dernière partie est stable par multiplication et contient v et t.
Puisque $\frac{sb}{t} = \frac{sc}{u}$, il y a un w dans T tel que $wsbu = wsct$. Afin de faire apparaitre l'élément $bsvw = tvw$ de T, on multiplie par vb, ce qui donne

$$vbwsbu = vbwsct, \text{ ou encore } (bsvw)bu = (bsvw)ct.$$

Il en résulte l'égalité des fractions $\frac{b}{t}$ et $\frac{c}{u}$ dans $A\left[\frac{1}{T}\right]$, *CQFD.*

En corollaire, pour $\rho = \mathrm{Id}_A$ et $T = S$, l'endomorphie (*a fortiori* l'automorphie) de l'algèbre des fractions $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est triviale :

$$\mathrm{End}\, A\left[\frac{1}{S}\right] = \mathrm{Aut}\, A\left[\frac{1}{S}\right] = \{\mathrm{Id}\}\,.$$

Cela est étrange : lorsque $S = \{1\}$ et A est un corps, cela signifierait que l'automorphie de tout corps est triviale. Or on parle ici d'*algèbres* – et il est clair qu'un corps, vu en tant qu'algèbre sur lui-même, a une endomorphie triviale.

Rigidité des algèbres des fractions BIS. si $A \xrightarrow{\rho} B$ est une algèbre, S et T des parties multiplicatives de A et B sans diviseurs de 0 et contenant les inversibles et stable par diviseurs, $A\left[\frac{1}{S}\right] \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} B\left[\frac{1}{T}\right]$: est-ce que $A \cong B$.? Quid si pas ypothèses ? (Notons $a' := {}^{\rho}a$)

Mq ρ inj. Supposons $a' = 0$. Alors $\varphi\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{a'}{1'} = 0$, donc ($\varphi$ inj) $\frac{a}{1} = 0$, d'où (car S sans div de 0) $a = 0$.

Notons $\frac{b}{t} := \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$. On a $\frac{bs'}{t} = s' \cdot \varphi\left(\frac{1}{s}\right) = \varphi\left(s \cdot \frac{1}{s}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1}$, çàd (car T sans div de 0) $bs' = t$, d'où (car T stable par diviseurs) $s' \in T$. On a donc ${}^{\rho}S \subset T$.

Notons $\frac{b}{t} := \varphi\left(\frac{a}{s}\right)$. On a de même $\frac{s'b}{t} = \frac{a'}{1}$, çàd (car T sans div de 0 et car $S' \subset T$) $\frac{b}{t} = \frac{a'}{s'}$, çàd $\varphi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{a'}{s'}$ dans $B\left[\frac{1}{T}\right]$.

Puisque S stable par div, les inversibles de $A\left[\frac{1}{S}\right]$ sont les $\frac{\sigma}{s}$ pour $s, \sigma \in S$. Par isomo d'anneaux, les inversibles de $\varphi\left(A\left[\frac{1}{S}\right]\right)$ sont les $\frac{\sigma'}{s'}$ pour $s, \sigma \in S$. Or $\varphi\left(A\left[\frac{1}{S}\right]\right) = B\left[\frac{1}{T}\right]$ a pour inversilbes les $\frac{\tau}{t}$ pour $t, \tau \in T$, d'où $\left\{\frac{\tau}{t}\right\} \subset \left\{\frac{\sigma'}{s'}\right\}$.

Si pas hypo sur div de 0, condidére $A\left[\frac{1}{S}\right] \cong \overline{A}\left[\frac{1}{\overline{S}}\right]$ où on quotient par $\operatorname{Ker}\left(A \longrightarrow A\left[\frac{1}{S}\right]\right)$

Si pas hypo de stable par div, considérer $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{4}\right] \cong \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ (ou $A\left[\frac{1}{S}\right]\left[\frac{1}{T}\right] \cong A\left[\frac{1}{ST}\right]$? ? ? ?)

Pire : $\underbrace{\mathbf{Z}}_{A}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \underbrace{\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]}_{B}\left[\frac{1}{2}\right]$

Anneaux localisés qui sont locaux.

Supposons $A\left[\frac{1}{S}\right]$ local. Montrer que les diviseurs de S forment le complémentaires d'un idéal premier de A.

Rappelons l'isomorphisme $A\left[\frac{1}{S}\right] \cong A\left[\frac{1}{\mathcal{D}S'}\right]$ où $\mathcal{D}S$ est l'ensemble des diviseurs de S.

L'idéal maximal de $A\left[\frac{1}{\mathcal{D}S}\right]$ est de la forme $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{\mathcal{D}S}\right]$ pour $\mathfrak{p}$ premier disjoint de $\mathcal{D}S$. On a donc $\mathcal{D}S \subset {}^{c}\mathfrak{p}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in {}^{c}\mathfrak{p}$: alors $\frac{x}{1}$ n'appartient pas à l'union des idéaux maximaux de $A\left[\frac{1}{\mathcal{D}S}\right]$, donc est inversible, d'où un $(a, d) \in A \times \mathcal{D}S$ tel que $\frac{x}{1}\frac{a}{d} = \frac{1}{1}$, d'où un $\delta \in \mathcal{D}S$ tel que $\delta x a = \delta d$; en notant d' et δ' deux éléments de A tel que $dd', \delta\delta' \in S$, on voit que x divise $d'\delta'\delta x a = \underbrace{\delta'\delta}_{\in S}\underbrace{d'd}_{\in S} \in S$, d'où $x \in \mathcal{D}S$.

Montrons qu'un morphisme de modules $M \longrightarrow N$ est inj/surj/bij ssi $M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$ l'est pour tout $\mathfrak{m}$

Pour inj : localition préserver noyau

Pour surj : pas besoin de platitude

Si M est de présentation finie, alors tout morphisme $S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$ est un $S^{-1}f$ por un $f : M \longrightarrow N$ (eisenbud, Prop 2.10)

4 Réalisation fonctionnelle d'un anneau

4.1 Un élément $a \in A$ est une application continue sur $\operatorname{Sp} A$

Pour a élément d'un anneau et $\mathfrak{p}$ point de son spectre, on notera $a(\mathfrak{p})$ ou $a_{\mathfrak{p}}$ l'image de a dans le corps résiduel par la localisation

$$\left\{\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} & \twoheadrightarrow & \kappa(\mathfrak{p}) \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1} & \longmapsto & \widetilde{\frac{a}{1}} \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même, par la flèche

$$\left\{\begin{array}{ccccc} A & \twoheadrightarrow & {}^{A}\!/_{\mathfrak{p}} & \hookrightarrow & \operatorname{Frac}\left({}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}\right) \\ a & \longmapsto & \overline{a} & \longmapsto & \frac{\overline{a}}{\overline{1}} \end{array}\right. .$$

Il est apparaît sur la seconde flèche que $a(\mathfrak{p})$ est nul ssi a appartient à l'idéal $\mathfrak{p}$:

$$a(\mathfrak{p}) = 0 \iff a \in \mathfrak{p}.$$

On réalise alors a comme une application sur son spectre définie par[50]

$$a : \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Sp} A & \longrightarrow & \coprod_{\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p}) \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & a(\mathfrak{p}) \end{array} \right. .$$

Un fait important à noter est qu'une telle fonction a est nulle en tout point ssi a est nilpotent[51] :

$$a \equiv 0 \iff a \text{ nilpotent.}$$

Il est bon de penser ces applications *continues*, de sorte à garder en tête l'équivalence

$$a(x) \neq 0 \iff (a \neq 0 \textit{ au voisinage de } x).$$

On précise en exercice quelques topologies sur $\coprod_{\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p})$ rendant continues toutes les appliations $\mathfrak{p} \mapsto a(\mathfrak{p})$.

Expliquons sur deux exemples pourquoi cette notion d'évaluation prolonge celles connues d'évaluations polynomiale et fonctionnelle.

1. Pour A anneau de fonctions continues sur un compact X, l'évaluation d'un élément-fonction f en un idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ (où $x \in X$) est la classe $f(\mathfrak{m}_x)$ dans le corps $\kappa(\mathfrak{m}_x) = A/\mathfrak{m}_x$. Ainsi, vue dans $\mathbf{R}$ *via* l'isomorphisme $A/\mathfrak{m}_x \overset{\text{éval. en } x}{\cong} \mathbf{R}$, l'évaluation de f en $\mathfrak{m}_x$ devient $f(x)$, soit l'évaluation classique d'une fonction en un point.
2. Pour A anneau de polynômes en n indéterminées, l'évaluation d'un élément-fonction P en un idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ (où $x \in k^n$) est la classe $P(\mathfrak{m}_x)$ dans le corps $\kappa(\mathfrak{m}_x) = A/\mathfrak{m}_x$, lequel s'identifie à k *via* l'évaluation en x. Comme précédemment, vue dans k *via* cet isomorphisme, l'évaluation de P en $\mathfrak{m}_x$ devient $P(x)$, à savoir l'évaluation classique d'un polynôme en un point.

Une fois « fonctionnalisé » notre anneau, la topologie de Zariski est celle à considérer pour que les éléments-fonctions de notre anneau s'annulent exactement sur une base de fermés.

On montre ci-après que la topologie de Zariski est également engendrée (au sens des ouverts) par les lieux de définition des éléments-fonctions des algèbres de fractions de A (intuitivement, une fraction est définie sur le complémentaire du lieu d'annulation de son dénominateur).

Le dernier paragraphe 6.5 indique en quoi cette topologie est la plus naturelle possible.

4.2 Un élément $\frac{a}{s} \in A\left[\frac{1}{S}\right]$ est une fonction sur $\operatorname{Sp} A$

Étant donnés une fraction $f = \frac{a}{s}$ d'une algèbre de fractions $A\left[\frac{1}{S}\right]$ et un point $\mathfrak{p}$ du spectre de A, quel sens donner à $f(\mathfrak{p})$?

Il est naturel de tenter de poser $f(\mathfrak{p}) := \frac{a(\mathfrak{p})}{s(\mathfrak{p})}$ dans le corps $\kappa(\mathfrak{p})$. Plus général : si $\lambda f = \frac{\alpha}{1}$, poser $f(\mathfrak{p}) := \frac{\alpha(\mathfrak{p})}{\lambda(\mathfrak{p})}$ (plus gnéral car $(\lambda, \alpha) \leftarrow (s, a)$).

Pb : Si S contient un diviseur de 0, *i.e.* $K := \operatorname{Ker}\left(A \longrightarrow A\left[\frac{1}{S}\right]\right) \neq \{0\}$, il n'est pas possible de bien définir toutes les fractions de $A\left[\frac{1}{S}\right]$ en un premier $\mathfrak{p}$ ne contenant pas K. En effet, soient $k \in K \setminus \mathfrak{p}$ et $s \in S$ tel que $sk = 0$. Alors $\frac{0}{s} = \frac{k}{1}$ mais $\frac{0}{s}(\mathfrak{p}) = 0 \neq k(\mathfrak{p})$.

Pire, on aura pour un tel (k, s) l'égalité $kf = \frac{0}{s}$ pour toute fraction $f \in A\left[\frac{1}{S}\right]$, ce qui implique $f(\mathfrak{p}) = 0$ car il serait déraisonnable que l'évaluation en $\mathfrak{p}$ ne soit pas $\left[A \overset{\mathrm{eval}_{\mathfrak{p}}}{\longrightarrow} \kappa(\mathfrak{p})\right]$-linéaire. Mais l'exemple de l'anneau $A := k[x,y]/xy$ (alors $\operatorname{Sp} A \simeq V(x) \cup V(y)$ s'identifie à la réunion des deux axes du plan k^2) de la partie $S := \{x^n ; n \in \mathbf{N}\}$ (alors $K = (y)$) et de la fraction $\frac{1}{x} \in A\left[\frac{1}{S}\right]$ montre que l'on n'a pas du tout envie de définir $\frac{1}{x}$ en un point de $D(y)$ (l'axe des ordonées privé de l'origine) autrement qu'un ∞ hors du corps résiduel.

[50] On rappelle la notation $\bigsqcup E_i := \bigcup (E_i \times \{i\})$ définissant l'***union disjointe*** d'une famille d'ensembles E_i. Chaque E_i s'identifie alors à son image $E_i \times \{i\}$ et est par conséquent disjoint (dans $\bigsqcup E_i$) des autres $E_{j \neq i}$ puisque les secondes coordonnées sont toujours différentes.

[51] on rappelle que l'intersection des premiers est formée des nilpotents

Solution On quotiente par K : $A\left[\frac{1}{S}\right] \cong \overline{A}\left[\frac{1}{\overline{S}}\right]$ où la barre dénote le quotientage par K. Alors $\overline{S}$ ne contient pas de diviseurs de 0 : si $\overline{sa} = \overline{0}$, alors $sa \in K$, donc $\exists \sigma \in S,\ \sigma(sa) = 0$, d'où $(\sigma s)\, a = 0$ et $a \in K$, ie $\overline{a} = 0$.

Vérif indéepndence : soit $\lambda, \alpha \in A$ et $\mathfrak{p} \in V(K)$ tel que $\lambda f = \frac{\alpha}{1}$ et $\lambda(\mathfrak{p}) \neq 0$. Alors $\frac{\alpha(\mathfrak{p})}{\lambda(\mathfrak{p})}$ indépendant de (λ, α) : soit $(\mu, \beta) \in A^2$ tel que $\mu f = \frac{\beta}{1}$ et $\mathfrak{p} \notin \mu$. Alors $\frac{\mu\alpha}{1} = \lambda\mu f = \frac{\lambda\beta}{1}$ dans $A\left[\frac{1}{S}\right]$, donc $\frac{\overline{\mu\alpha}}{\overline{1}} = \frac{\overline{\lambda\beta}}{\overline{1}}$ dans $\overline{A}\left[\frac{1}{\overline{S}}\right]$, ie $\overline{\mu\alpha} = \overline{\lambda\beta}$ dans $\overline{A}$, d'où $\overline{\mu}(\overline{\mathfrak{p}})\,\overline{\alpha}(\overline{\mathfrak{p}}) = \overline{\lambda}(\overline{\mathfrak{p}})\,\overline{\beta}(\overline{\mathfrak{p}})$ dans $\kappa(\overline{\mathfrak{p}})$, çàd $\mu(\mathfrak{p})\,\alpha(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p})\,\beta(\mathfrak{p})$ dans $\kappa(\mathfrak{p})$, ie $\frac{\alpha(\mathfrak{p})}{\lambda(\mathfrak{p})} = \frac{\beta(\mathfrak{p})}{\mu(\mathfrak{p})}$, cqfd.

On peut donc définir tout f en un $\overline{\mathfrak{p}} \in D\left(\overline{I}_f\right)$, *i. e.* en un $\mathfrak{p} \in V(K) \cap D(I_f)$. Ainsi, les points où f est ainsi bien définie sont ceux n'annulent pas tous les dénominateurs $s \in I_f$, à savoir la réunion

$$\operatorname{Dom} f := \bigcup_{s \in I_f} \{\mathfrak{p} \supset K \ ;\ s(\mathfrak{p}) \neq 0\} = V(K) \cap D(I_f).$$

Montron que l'intersection de ces domaines $V(K) \cap D(I_f)$ est précisément le spectre de $A\left[\frac{1}{S}\right]$. Soit $\mathfrak{p}$ dans l'intersection et $s \in S$: alors $\frac{1}{s}$ est définie en $\mathfrak{p}$, donc il y a un $(\lambda, \alpha) \in {}^{c}\mathfrak{p} \times A$ tel que $\lambda\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{1}$, çàd $\frac{\lambda}{s} = \frac{\alpha}{1}$ dans $A\left[\frac{1}{S}\right]$, çàd $\frac{\overline{\lambda}}{\overline{s}} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{1}}$ dans $A\left[\frac{1}{\overline{S}}\right]$, çàd $\overline{\lambda} = \overline{s\alpha}$ dans $\overline{A}$, d'où $\overline{\lambda}(\overline{\mathfrak{p}}) = \overline{s}(\overline{\mathfrak{p}})\,\overline{\alpha}(\overline{\mathfrak{p}})$ dans $\kappa(\overline{\mathfrak{p}})$, çàd $\lambda(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p})\,\alpha(\mathfrak{p})$ dans $\kappa(\mathfrak{p})$, forçant $s(\mathfrak{p}) \neq 0$ puisque $\lambda(\mathfrak{p}) \neq 0$. Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est disjoint de S, alors toute fraction $\frac{a}{s}$ est évaluable en $\mathfrak{p}$ ($\lambda := s$ et $\alpha := a$).

On éclaire ainsi la remarque fonctionnelle du paragraphe *2.5.* **sanity check** : deux évaluations ? ? ? voir f comme élément de l'anneau $A\left[\frac{1}{S}\right]$, donc évaluable sur $\operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{S}\right]$; par magie, l'image dans le corps résiduel, qui est le me^me que celui de A, est le quotient des images *via* l'iso canonique des corps résiduel) ? ? ? ?

Montrons enfin que $\operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{S}\right] \subset V(K)$. Soit $\mathfrak{p}$ disjoint de S, soit $k \in K$, soit $s \in S$ tel que $ks = 0$. Or s est non nul *modulo* $\mathfrak{p}$, d'où $k = 0 \bmod \mathfrak{p}$, *i. e.* $k \in \mathfrak{p}$, cqfd.

rq : l'algèbre $A\left[\frac{1}{S}\right]$ est un anneau, il faut que les lieux de def ne dépendent que cet anneau (à iso près) et non de S. Vérifions que I_f est inchangé si l'on rajoute à S ses diviseurs ainsi que $A^\times$: c'est clair car un divsieurs de S ou un inversible peut se transformer en un élément de S par multiplication.

De la localisation (cas des anneaux intègres). Dans un anneau intègre, on peut voir toutes les algèbres $A\left[\frac{1}{S}\right]$ dans le corps des fractions $\operatorname{Frac} A$. Ainsi, une fraction sera définie en un point $\mathfrak{p}$ ssi on peut l'écrire sous la forme $\frac{a}{s}$ avec $s \notin \mathfrak{p}$, autrement dit ssi elle appartient à l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$:

$$f \text{ définie en } \mathfrak{p} \iff f \in A_{\mathfrak{p}}.$$

Ainsi, localiser en $\mathfrak{p}$ revient à considérer les fractions définies en $\mathfrak{p}$ – et même en son *voisinage*, comme l'on verra bientôt, d'où un nouvel éclaircissement du vocabulaire d'anneau *local* :

$$A_{\mathfrak{p}} = \{f \in \operatorname{Frac} A \ ;\ f \text{ est définie au voisinage de } \mathfrak{p}\}.$$

Le paragraphe qui précède nous amène à définir la topologie de Zariski comme étant celle dont les fermés sont les intersections de lieux d'annulation d'éléments-fonctions de A. Pour cette topologie, sont ouverts les lieux de définition des fractions de A.

Réciproquement, si l'on prend ces derniers comme ouverts de base, alors, pour un $a \in A$ donné et pour $S := \left\{1, a, a^2, ...\right\}$, la fraction $\frac{1}{a}$ est définie sur la partie $D(a) := \{\mathfrak{p} \ ;\ a \notin \mathfrak{p}\}$, d'où le caractère fermé des lieux d'annulation $V(a) := \{\mathfrak{p} \ ;\ a \in \mathfrak{p}\}$ pour tout $a \in A$.

Les deux points de vue (variétés $V(a)$ ou domaines de définition $D(a)$) sont donc équivalents et gagneront à être entremêlés.

4.3 Exercices (franchement dispensables)

Rant sur les lieu de déf de fractions avec des diviseurs de zéro

vérifier d'une part s'il y a un dénominateur s tel que $s(\mathfrak{p}) \neq 0$ dans la partie $S_f := \left\{s \in S \ ;\ \exists a \in A,\ f = \frac{a}{s}\right\}$,d'autre part si, pour de tels dénominateurs s et s', mettons $\frac{a}{s} = f = \frac{a'}{s'}$, les deux quotients $\frac{a(\mathfrak{p})}{s(\mathfrak{p})}$ et $\frac{a'(\mathfrak{p})}{s'(\mathfrak{p})}$ sont égaux. Cette dernière condition est aisée à vérifier : si f s'écrit $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ avec s et s' hors de $\mathfrak{p}$, alors il y a un $\sigma \in S$ tel que $\sigma a s' = \sigma a' s$, d'où en évaluant en $\mathfrak{p}$ puis en simplifiant (???? et si $\sigma \in \mathfrak{p}$?????) par $\sigma(\mathfrak{p})$ dans le corps $\kappa(\mathfrak{p})$ l'égalité $a(\mathfrak{p})\, s'(\mathfrak{p}) = a'(\mathfrak{p})\, s(\mathfrak{p})$, laquelle se réécrit $\frac{a(\mathfrak{p})}{s(\mathfrak{p})} = \frac{a'(\mathfrak{p})}{s'(\mathfrak{p})}$, *CQFD*.

Montron que l'intersection de ces domaines $V(K) \cap D(S_f)$ est précisément le spectre de $A\left[\frac{1}{S}\right]$. Soit $\mathfrak{p}$ dans l'intersection et $s \in S$: alors $\frac{1}{s}$ est définie en $\mathfrak{p}$, donc il y a un $(\alpha, \sigma) \in A \times S$ tel que $\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{\sigma}$ et $\sigma(\mathfrak{p}) \neq 0$, d'où $s(\mathfrak{p})\, \alpha(\mathfrak{p}) = \sigma(\mathfrak{p}) \neq 0$, ce qui impose $s(\mathfrak{p}) \neq 0$, cqfd. Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est disjoint de S, alors toute fraction $\frac{a}{s}$ est évaluable en $\mathfrak{p}$.

Il peut être tentant de relier l'idéal engendré par la partie S_f à l'*idéal des dénominateurs* de f défini par

$$I_f := \left\{ d \in A \ ; \ \exists a \in A, \ df = \frac{a}{1} \right\}.$$

Cependant, bien que l'inclusion $\langle S_f \rangle \subset I_f$ soit triviale, la réciproque est fausse[52] en général. En effet, dans l'algèbre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$, la fraction $\frac{2}{6}$ ne peut s'écrire $\frac{a}{1}$ (sinon 6 diviserait 2) et a pour dénominateurs les 6^n où $n \geq 1$, d'où l'idéal engendré $\langle S_f \rangle = 6\mathbf{Z}$; par ailleurs, vue l'équivalence $d\frac{2}{6} = \frac{a}{1} \iff d = 3a$, l'idéal I_f vaut $3\mathbf{Z}$.

Remarque. Les équivalences $V(I) \subset V(J) \iff \sqrt{J} \subset \sqrt{I}$ (établies à la section 5.4) montrent que le lieu $D(S_f)$ de définition d'une fraction $f \in A\left[\frac{1}{S}\right]$ ne peut être en général remplacé par $D(I_f)$: si c'était le cas, on aurait l'égalité des radicaux $\sqrt{I_f} = \sqrt{\langle S_f \rangle}$ et l'on a déjà vu l'exemple de la fraction $f = \frac{2}{6}$ dans $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$ pour laquelle les idéaux $I_f = 3\mathbf{Z}$ (qui est radical car premier) et $\langle S_f \rangle = 6\mathbf{Z}$ (qui est aussi radical car $\mathbf{Z}/6$ ne contient pas de nilpotent non trivial) sont distincts.

Montrons que les applications $\mathfrak{p} \mapsto a(\mathfrak{p})$ sont toujours continues pour des topologies naturelles, **indépendamment de celle sur** $\operatorname{Sp} A$.

L'action de l'anneau sur son spectre est donnée par $\left\{ \begin{array}{ccc} A \times \operatorname{Sp} A & \longrightarrow & \coprod_{\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p}) \\ (a, \mathfrak{p}) & \longmapsto & a(\mathfrak{p}) \end{array} \right.$. On rappelle que l'union disjointe $\coprod_{\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p})$ est par définition la réunion des $\kappa(\mathfrak{p}) \times \{\mathfrak{p}\}$. Ainsi, les applications $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Sp} A & \hookrightarrow & \left(\bigcup \kappa_{\mathfrak{p}}\right) \times \operatorname{Sp} A \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & (a(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}) \end{array} \right.$ sont injectives et, pour toute partie $P \subset \operatorname{Sp} A$, on a l'équivalence

$$(a, \mathfrak{p}) \in A \times P \iff (a(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}) \in \left(\bigcup \kappa_{\mathfrak{p}} \right) \times P.$$

En munissant A et $\bigcup \kappa_{\mathfrak{p}}$ des topologies grossières, l'équivalence ci-dessus montre que l'action $(a, \mathfrak{p}) \mapsto (a(\mathfrak{p}), \mathfrak{p})$ est continue et fermée/ouverte. Il en est donc de même pour chacune des application a, lesquelles induisent des homéomorphismes de $\operatorname{Sp} A$ sur leurs images.

??? Que devient cette topo grossière dans les deux exemples ci-dessus ??? Surtout pour $\mathbf{R}$ *???*

Cas analytique. Soit X compact. Remarquer que la bijection $\left\{ \begin{array}{ccc} \kappa(\mathfrak{m}_x) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \overline{f} = \overline{f(x)} & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ est un homéomorphisme pour Zariski (puisque bij, préserve cardinal, donc parties finies échangées)

Soit un fermé de $\coprod_{\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m})$ rendant continues tous les $f \in C(X, \mathbf{R})$. Une partie de $\coprod_{\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m})$ est de la forme $\coprod_x F_x^\kappa$ où $F_x^\kappa \subset \kappa(\mathfrak{m}_x)$. Vu à travers $\kappa(\mathfrak{m}_x) \cong \mathbf{R}$, la partie F_x^κ est une partie $F_x \subset \mathbf{R}$.

Soit $f \in C(X)$ et $x \leftrightarrow \mathfrak{m}_x$. Notons ${}^\kappa f : \left\{ \begin{array}{ccc} X \cong \operatorname{Sp}_m A & \longrightarrow & \coprod_x \kappa(\mathfrak{m}_x) \\ x \leftrightarrow \mathfrak{m}_x & \longmapsto & (\overline{f}, \mathfrak{m}_x) \end{array} \right.$. On a les équivalences $x \in {}^\kappa f^{-1}\left(\coprod_x F_x^\kappa\right) \iff {}^\kappa f(x) \in \coprod_x F_x^\kappa \iff (\overline{f}, x) \in \coprod_x F_x^\kappa \iff \overline{f} \in F_x^\kappa \iff f(x) \in F_x$. Donc la parite $\{x \in X \ ; \ x \in F_x\}$ est un fermé $\varphi_f^{-1}(\{0\})$. COnclusions :

$$\text{une partie } \coprod_x F_x^\kappa \subset \coprod_{\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m}) \text{ est fermée ssi } \forall f, \forall x, \ \exists \varphi_f, \ \left(\varphi_f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) \in F_x \right).$$

Cas particulier : tous les F_x égaux à un même fermé $F = \varphi_f^{-1}(\{0\})$. Poser alors $\varphi_f := \varphi \circ f$: OK.

Cas particulier : tous les F_x sont fermés $\lambda_x^{-1}(\{0\})$. Alors

$$\coprod_x F_x^\kappa \text{ fermé ssi } \forall f \text{ la fonction } x \mapsto \lambda_x(f(x)) \text{ s'annule sur un fermé.}$$

Exemple : $x \mapsto \lambda_x$ C0 pour $\|\cdot\|_\infty$. On montre alors que $x \mapsto \lambda_x(f(x))$ est continue (pour topo habituelle), donc s'annule sur un femé de X.

[52] et même celle des radicaux, comme on le montrera dans le paragraphe 5.1

Cas polynomial. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A := k[X_1, ..., X_n]$. Remarquer que la bijection $\left\{ \begin{array}{ccc} \kappa(\mathfrak{m}_x) & \longrightarrow & k \\ \overline{P} = \overline{P(x)} & \longmapsto & P(x) \end{array} \right.$ est un homéomorphisme pour Zariski (puisque bij, préserve cardinal, donc parties finies échangées)

Soit un fermé de $\coprod_{\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m})$ rendant continues tous les P. Une partie de $\coprod_{\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m})$ est de la forme $\coprod_x F_x^\kappa$ où $F_x^\kappa \subset \kappa(\mathfrak{m}_x)$. Vu à travers $\kappa(\mathfrak{m}_x) \cong k$, la partie F_x^κ est une partie $F_x \subset k$.

Soit P et $x \leftrightarrow \mathfrak{m}_x$. Notons ${}^\kappa P : \left\{ \begin{array}{ccc} X \cong \operatorname{Sp}_m A & \longrightarrow & \coprod_x \kappa(\mathfrak{m}_x) \\ x \leftrightarrow \mathfrak{m}_x & \longmapsto & (\overline{P}, \mathfrak{m}_x) \end{array} \right.$. On a les équivalences $x \in {}^\kappa P^{-1}\left(\coprod_x F_x^\kappa\right) \iff {}^\kappa P(x) \in \coprod_x F_x^\kappa \iff \left(\overline{P}, x\right) \in \coprod_x F_x^\kappa \iff \overline{P} \in F_x^\kappa \iff P(x) \in F_x$. Donc la parite $\{x \in X \ ; \ x \in F_x\}$ est un fermé $V(I) = \cap_{\text{finie}} V\left(\pi_P^i\right)$

$$\text{une partie } \coprod_x F_x^\kappa \subset \coprod_{\mathfrak{m}} \kappa(\mathfrak{m}) \text{ est fermée ssi } \forall P, \forall x, \ \exists\left(\pi_P^i\right), \ \left(\left(\forall i, \ \pi_P^i(x) = 0\right) \iff P(x) \in F_x\right).$$

Cas particulier : tous les F_x égaux à un même fermé $F = V(\pi)$. Poser alors $\pi_P^i := \pi \circ P$: OK.

Cas particulier : tous les F_x sont fermés $V(\pi_x)$. Alors

$$\coprod_x F_x^\kappa \text{ fermé ssi } \forall P \text{ la fonction } x \mapsto \pi_x(P(x)) \text{ s'annule sur un fermé.}$$

Exemple : $x \mapsto \pi_x(f(x))$ polynôme (alors ses zréos sont un fermé). Montrons alors que POUR $n = 1$ ET SI k INDENB, les coef de chaque π_x sont des plyonômes (en x) et que leur degré est uniformémanet borné.

écrivons $\pi_x = \sum_{i=0}^{d_x} a_i(x) X^i$. SI , on peut se placer sur une partie X' où $d_x \leq d \ \forall x \in X'$. Prenant pour P des constantes λ_i, on a un systme de Vandermone $\left(\lambda_i^j\right)(a_i(x)) = \left(\pi_x\left(\lambda^j\right) =: P^j(x)\right)$, d'où par inversion le caractère polynpmial de $(a_i(x))_{i \leq d}$ pour $x \in X'$, donc (car$n = 1$) sur tout X'. Alors pour $x \in X'$ on a $\pi_x(f(x)) = \sum_{i=0}^d a_i(x) f(x)^i$, égalité polynomiale qui se prolonge à tout X.

5 Topologie de Zariski

5.1 Les variétés $V(I)$: définitions et propriétés

Par analogie avec les nullstellensatz algébrique et analytique, on définit pour $a \in A$ et pour I partie[53] de A des ***variétés***

$$\begin{aligned} V(a) &:= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \ ; \ a(\mathfrak{p}) = 0\} \\ \text{et } V(I) &:= \bigcap_{a \in I} V(a). \end{aligned}$$

Elles correspondent aux lieux d'annulation des éléments de A vus comme des fonctions.

Comme pour la topologie de Zariski sur k^n, on a les propriétés suivantes :

1. *l'application $I \mapsto V(I)$ est décroissante pour l'inclusion ;*
2. *la variété $V(I)$ ne dépend que de l'idéal engendré par I :*

$$V(I) = V\left(\sum_{i \in I} Ai\right) = V\left(\sum_{i \in I} iA\right) \ ;$$

3. *aucun point n'annule la fonction 1 ni toutes les fonctions :*

$$V(1) = \emptyset = V(A) \ ;$$

réciproquement, une variété est vide ssi l'idéal correspondant est total :

$$V(I) = \emptyset \iff 1 \in I \ ;$$

[53] La notation I n'est pas anodine, *cf.* deuxième propriété de la liste qui suit.

4. *tout point est annulé par la fonction nulle et par les fonctions nilpotentes :*
$$V(0) = \operatorname{Sp} A = V\left(\sqrt{0}\right) \text{ ;}$$
5. *l'intersection de variétés $V(I_k)$ est la variété de la somme $\sum I_k$:*
$$\bigcap V(I_k) = V\left(\sum I_k\right) \text{ ;}$$
6. *les variétés ne voient pas les puissances*[54] *:*
$$\begin{aligned} \forall n \geq 1,\ V(I^n) &= V(I), \\ \textit{i. e. } V\left(\sqrt{I}\right) &= V(I) \text{ ;} \end{aligned}$$
7. *l'union finie de variétés est*[55] *la variété du produit ou de l'intersection :*
$$V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J) \text{ ;}$$
8. *les variétés $V(I)$ sont les fermés d'une topologie sur* $\operatorname{Sp} A$.

Les fermés $V(a)$ sont appelés ***hypersurfaces***. Ce sont des ***fermés élémentaires*** au sens où tout fermé est intersection (éventuellement vide) de fermés élémentaires.

On note $D(a)$ l'***ouvert élémentaire*** ${}^cV(a)$ des points où ne s'annule pas a et naturellement $D(I)$ l'ouvert ${}^cV(I)$. Pour retenir la lettre D, on pourra voir

$D(a)$ comme le **d**omaine de **d**éfinition des fractions de **d**énominateur a.

On a en effet vu que l'ensemble de définition d'une fraction $f \in A\left[\frac{1}{S}\right]$ était l'ouvert
$$\operatorname{Dom} f = \bigcup\nolimits_{s \in S_f} D(s) = D(S_f).$$
Ainsi, $D(0) = \emptyset$ est le complémentaire de $V(0) = \operatorname{Sp} A$, ou encore l'ensemble des fractions de dénominateur 0 qui peuvent être évaluées en quelque chose. On a de même $D(1) = \operatorname{Sp} A$.

Exemples.

1. Les idéaux premiers de $\mathbf{C}[X]$ sont d'une part l'idéal nul $\eta := (0)$, d'autre part les $\mathfrak{p}_\lambda := (X - \lambda)$ pour λ décrivant $\mathbf{C}$, donc son spectre privé de η s'identifie à $\mathbf{C}$ *via* $\mathfrak{p}_\lambda \longleftrightarrow \lambda$. Puisque $\mathbf{C}[X]$ est principal, tout idéal est engendré un polynôme $P = \prod (X - \lambda_k)^{\omega_k}$, donc toute variété (stricte) est une hypersurface $V(P) = V\left(\prod (X - \lambda_k)\right) = \bigcup V(X - \lambda_k)$ identifiée à l'ensemble $\bigcup \{\lambda_k\}$ des racines de P.
2. Plus généralement, dans un anneau (intègre) principal (donc factoriel), tout idéal strict I est engendré par un élément $\prod p^{v_p}$ où le produit (non vide) parcourt les irréductibles, les idéaux premiers non nuls[56] correspondant aux (p) pour p irréductible (penser à $\mathbf{Z}$ ou à $k[X]$). On en déduit que toute variété (non vide) est une hypersurface et que le spectre est décrit par
$$\operatorname{Sp} = \{\eta\} \amalg \{(p)\}_{p \text{ irréductible}} = \{\eta\} \amalg \operatorname{Sp}_m.$$
Ainsi, pour $\mathfrak{p} = (p)$ idéal premier non nul, on a les équivalences
$$\mathfrak{p} \in V(a) \iff a \in \mathfrak{p} \iff (a) \subset (p) \iff p \mid a,$$
d'où l'égalité $V(a) = \{(p)\}_{p|a}$. Ainsi, *les variétés (strictes) sont les parties finies*[57], donc les ouverts (non vides) sont les parties cofinies. Par conséquent, si le spectre considéré est infini[58], deux ouverts non vides se rencontrent toujours, ce qui revient à dire que *tout ouvert non vide est dense*, ou encore que *la topologie de* Zariski *est irréductible.*

[54] On pourra par conséquent toujours supposer les variétés de la forme $V(\mathfrak{r})$ où $\mathfrak{r}$ est un idéal *radical*.

[55] Pour la seconde égalité, appliquer la décroissance des V à l'inclusion $(I \cap J)^2 \subset IJ \subset I \cap J$.

[56] attention à ne pas oublier l'idéal nul dans le spectre d'un anneau intègre

[57] une partie finie $\{(p_1), (p_2), ..., (p_k)\}$ de $\operatorname{Sp} A$ est la variété annulant tout ppcm des a_i

[58] L'argument d'Euclide donnant une infinité d'irréductibles deux à deux non associés tombe généralement en défaut : si $p_1, p_2, ..., p_k$ sont des irréductibles, alors la somme $1 + p_1 p_2 \cdots p_k$ est divisible par un irréductible (nécessairement autre que $p_1, p_2, ..., p_k$) *sauf si* cette somme est inversible. Ce sera par exemple le cas dans les corps (pas d'irréductibles) ou dans $k[[t]]$ (un seul irréductible).

3. Regardons l'anneau local $k[[t]]$. Ses idéaux sont, d'une part l'idéal nul (0), d'autre part les idéaux principaux (t^n) pour $n \geq 0$. Ces derniers ne sont pas radicaux (encore moins premiers) pour $n \geq 2$. Le spectre se réduit donc à 0 (par intégrité) et à l'unique idéal maximal $\mathfrak{m} := (t)$:

$$\operatorname{Sp} k[[t]] = \{0, \mathfrak{m}\}.$$

Quant aux variétés, toutes de la forme $V(\mathfrak{r})$ pour $\mathfrak{r}$ idéal radical, on trouve la variété totale $V(\eta)$, la variété vide $V(1)$, et la variété singleton $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} k[[t]]\}_{\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}} = \{\mathfrak{m}\}$. On en déduit que l'idéal nul η est dense. Un tel spectre $\boxed{\eta \rightsquigarrow \boxed{\mathfrak{m}}}$ (dont les ouverts sont représentés par des rectangles) est appelé un ***trait***. Il n'est pas séparé bien que noethérien (car fini), réalisant le contre-exemple donné en toute fin de la section 2.3.

On verra plus tard que l'idéal nul est toujours dense[59] (s'il est dans le spectre, *i. e.* dans tout anneau intègre) et que les points fermés sont exactement les idéaux maximaux.

Mise en garde. Tout comme la topologie usuelle de $\mathbf{R}^2$ n'est pas la topologie produit de la topologies usuelle de $\mathbf{R}$ par elle-même, la topologie de Zariski sur $\mathbf{C}[X,Y]$ n'est pas le produit des topologies de Zariski de $\mathbf{C}[X]$. En effet, avec l'identification $\operatorname{Sp} \mathbf{C}[X] \cong \{\eta\} \amalg \mathbf{C}$, tout fermé produit est un produit cartésien de $(\{\eta\} \amalg \mathbf{C})^2$, ce qui n'est pas le cas de la première bissectrice $X = Y$ codant le fermé $V(X - Y)$ de $\operatorname{Sp} \mathbf{C}[X,Y]$.

On est en droit de se demander s'il y a un lien avec la topologie de Zariski sur k^n que l'on connaît.

Lien avec les nullstellensatz algébrique et analytique.

1. *Soit k un corps algébriquement clos. Pour $A := k[X_1, ..., X_n]$, la bijection* $\left\{ \begin{array}{ccc} k^n & \widetilde{\longrightarrow} & \operatorname{Sp}_m A \\ x & \longmapsto & \mathfrak{m}_x := (X_i - x_i) \end{array} \right.$ *est un homéomorphisme envoyant à $P \in A$ fixé la variété $V(P)$ de k^n sur la variété $V(P)$ de $\operatorname{Sp}_m A$.*
2. *Soit X un compact. Pour $A := C^0(X, \mathbf{R})$, la bijection* $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \widetilde{\longrightarrow} & \operatorname{Sp}_m A \\ x & \longmapsto & \mathfrak{m}_x := \{f \in A \ ; \ f(x) = 0\} \end{array} \right.$ *est un homéomorphisme envoyant à $f \in A$ fixé le fermé $V(f)$ des zéros de f sur la variété $V(f)$ de $\operatorname{Sp}_m A$.*

Démonstration.

1. À $P \in A$ fixé, on a les équivalences pour tout $x \in k^n$

$$\mathfrak{m}_x \in V(P) \iff P \in \mathfrak{m}_x \iff P(x) = 0 \iff x \in V(P).$$

2. À $f \in A$ fixé, on a les équivalences pour tout $x \in X$

$$\mathfrak{m}_x \in V(f) \iff f \in \mathfrak{m}_x \iff f(x) = 0 \iff x \in V(f).$$

Remarque. De la seconde propriété, on en déduit la compacité de $\operatorname{Sp}_m A$. En fait, $\operatorname{Sp} A$ est toujours quasi-compact (*cf.* paragraphe 6.1) et l'on ne peut pas espérer mieux dans le cas général vu que la topologie de Zariski sur k^n n'est pas séparée.

5.2 Propriétés topologiques des bijections $\operatorname{Sp}\left(A/I\right) \cong V(I)$ et $\operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{a}\right] \cong D(a)$

On pourra remarquer que, ensemblistement, la variété

$$V(I) = \bigcap_{a \in I} V(a) = \bigcap_{a \in I} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A\}_{a \in \mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A\}_{I \subset \mathfrak{p}}$$

décrit les premiers de A contenant I, autrement dit le spectre de A/I. En particulier, pour $I = \sqrt{0}$ le nilradical, on voit que $\operatorname{Sp}\left(A/\sqrt{0}\right)$ est en bijection avec $\operatorname{Sp} A$:

le spectre ne voit donc pas les nilpotents.

[59] On sera amené à rencontrer de nouveau ces créatures étranges que sont les points denses.

De même, l'ouvert

$$D(a) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \; ; \; a \notin \mathfrak{p}\} = \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \; ; \; 1, a, a^2, a^3 ... \notin \mathfrak{p}\right\}$$

décrit les premiers de A disjoints de $\left\{1, a, a^2, ...\right\}$, autrement dit le spectre de $A\left[\frac{1}{a}\right]$. Suivant la remarque précédente,

$$D(a) \textit{ est vide ssi } a \textit{ nilpotent.}$$

On montre ci-après que ces correspondances sont des homéomorphismes.

Fonctorialité du spectre à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques.
Pour $\varphi : A \longrightarrow B$ *morphisme d'anneaux, la flèche* $\operatorname{Sp}\varphi : \operatorname{Sp} B \longrightarrow \operatorname{Sp} A$ *est une application* continue *dont la préimage d'un* $V(a)$ *est* $V(\varphi(a))$. *De plus, lorsque* $\operatorname{Sp}\varphi$ *est bijective, c'est automatiquement un homéomorphisme.*

Démonstration.
Il suffit de montrer la description annoncée : pour $\mathfrak{q}$ dans $\operatorname{Sp} A$, on a les équivalences

$$\begin{array}{rl} & \mathfrak{q} \in [\operatorname{Sp}\varphi]^{-1}(V(a)) \\ \iff & [\operatorname{Sp}\varphi](\mathfrak{q}) \in V(a) \\ \iff & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in V(a) \\ \iff & a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \iff & \varphi(a) \in \mathfrak{q} \\ \iff & \mathfrak{q} \in V(\varphi(a)), \; \textit{CQFD.} \end{array}$$

Lorsque $\operatorname{Sp}\varphi$ est bijective, le fait qu'elle transforme les fermés élémentaires en fermés élémentaires suffit à obtenir la continuité de la réciproque.

Corollaires.

1. *La flèche de réduction* modulo *un idéal* I *induit un homéomorphisme entre* $\operatorname{Sp}\left({}^{A}\diagup_{I}\right)$ *et la partie* $V(I)$ *de* $\operatorname{Sp} A$ *formée des* $\mathfrak{p}$ *contenant* I *:*

$$\left\{\begin{array}{ccc} V(I) & \cong & \operatorname{Sp}\left({}^{A}\diagup_{I}\right) \\ \mathfrak{p} & \longleftrightarrow & {}^{\mathfrak{p}}\diagup_{I} \\ V(a) & \longleftrightarrow & V(\overline{a}) \end{array}\right.$$

2. *La flèche de localisation selon une partie multiplicative* S *induit un homéomorphisme entre* $\operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{S}\right]$ *et la partie* $\operatorname{Sp} A$ *formée des* $\mathfrak{p}$ *disjoints de* S.
En particulier, pour $S = \left\{1, f, f^2, ...\right\}$, *on obtient un homéomorphisme*

$$\left\{\begin{array}{ccc} D(f) & \cong & \operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{f}\right] \\ \mathfrak{p} & \longleftrightarrow & \mathfrak{p}\left[\frac{1}{f}\right] \\ V(a) & \longleftrightarrow & V\left(\frac{a}{1}\right) \end{array}\right.$$

3. *Le spectre ne voit pas les nilpotents :*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Sp} A & \cong & \operatorname{Sp} A_{red} \\ V(a) & \longleftrightarrow & V(\overline{a}) \end{array}\right. .$$

Démonstration.

1. Posons $\overline{A} := {}^{A}\diagup_{I}$. Pour $a \in A$ et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$ contenant I, notons $(\overline{a}, \overline{\mathfrak{p}})$ leurs correspondants dans $\overline{A} \times \operatorname{Sp}\overline{A}$. On a alors les équivalences

$$\mathfrak{p} \in V(a) \iff a(\mathfrak{p}) = 0 \iff a \in \mathfrak{p} \iff \overline{a} \in \overline{\mathfrak{p}} \iff \overline{a}(\overline{\mathfrak{p}}) = 0 \iff \overline{\mathfrak{p}} \in V(\overline{a}).$$

2. Pour $a \in A$ et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$ disjoint de S, on a les équivalences

$$\mathfrak{p} \in V(a) \iff a \in \mathfrak{p} \overset{?}{\iff} \frac{a}{1} \in \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right] \iff \mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right] \in V\left(\frac{a}{1}\right).$$

Concernant l'équivalence $\overset{?}{\iff}$, le sens $\implies$ est trivial ; pour l'autre, si $\frac{a}{1} = \frac{p}{s}$ pour un $(p, s) \in \mathfrak{p} \times S$, alors il y a un $\sigma \in S$ tel que $\sigma as = \sigma p \in \mathfrak{p}$, d'où $a \in \mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{p}$ est premier et disjoint de $S \ni \sigma s$.

3. Puisque $A_{red} = {}^{A}\!\diagup_{\sqrt{0}}$, il suffit d'appliquer le premier point avec $I = \sqrt{0}$.

De la localité des localisés. Fixons un point $\mathfrak{p}$ dans $\operatorname{Sp} A$ et considérons un ouvert élémentaire $D(a)$ le contenant. Vu à travers l'homéomorphisme $D(a) \cong \operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{a}\right]$, ce point devient $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{a}\right]$. Or on a vu que les localisés $A_{\mathfrak{p}}$ et $A\left[\frac{1}{a}\right]_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{a}\right]}$ étaient canoniquement isomorphes. Ainsi, le localisé en un point est le même quel que soit l'ouvert considéré contenant ce point : c'est donc une donnée *locale* (à savoir, ici, un anneau local), d'où la terminologie.

Propriétés topologiques des spectres produits. Regardons pour finir comment la bijection $\operatorname{Sp} \prod A_i \cong \coprod \operatorname{Sp} A_i$ agit sur les fermés.

Soit $I \times J$ un idéal de $A \times B$. Étant donné un premier $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \times B$ de $A \times B$ vu dans $\operatorname{Sp} A \amalg \operatorname{Sp} B$, on a les équivalences

$$\mathfrak{P} \in V(I \times J) \iff I \times J \subset \mathfrak{p} \times B \iff I \subset \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in V(I) \iff \mathfrak{P} \in V(I) \amalg V(J),$$

de même pour un premier $A \times \mathfrak{q}$, d'où l'identification $V(I \times J) \cong V(I) \amalg V(J)$. Puisque les fermés d'une union disjointe (finie) sont les unions disjointes de fermés, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \textit{la bijection } \operatorname{Sp} \prod A_i & \cong & \coprod \operatorname{Sp} A_i \textit{ est un homéomorphisme} \\ \textit{identifiant } V\left(\prod I_i\right) & \cong & \coprod V(I_i) \textit{ pour tous idéaux } I_i. \end{array}$$

Quotienter & localiser. ? ? ? Les points 1 et 2 jettent une nouvelle lumière :

1. quotienter, c'est regarder *dans* une variété ;
2. localiser, c'est regarder *hors d'*une variété.

5.3 Spectre de flèches entières

Considérons une algèbre $A \xrightarrow{\varphi} B$ entière et regardons le morphisme $f := \operatorname{Sp} \varphi$.

Fixons un point $\mathfrak{q} \in \operatorname{Sp} B$ dont on note $\mathfrak{p}$ l'image par f. On a déjà vu l'équivalence suivante en termes d'idéaux maximaux :

un point $\mathfrak{q} \in \operatorname{Sp} B$ est fermé ssi son image $f(\mathfrak{q})$ l'est.

En particulier, lorsque $\mathfrak{q}$ est maximal, la variété $V(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{q}\}$ est envoyée sur $\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p}) = V\left(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})\right)$. Plus généralement, on va montrer que

pour J idéal de B, f envoie la variété $V(J)$ sur $V\left(\varphi^{-1}(J)\right)$.

Démonstration.
Notons I l'idéal $\varphi^{-1}(J)$ ainsi que $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ les quotients $\left({}^{A}\!\diagup_{I}, {}^{B}\!\diagup_{J}\right)$. On veut montrer $f(V(J)) = V(I)$.

Puisque $a \in I$ ssi $\varphi(a) \in J$, la flèche $\overline{A} \overset{\overline{\varphi}}{\hookrightarrow} \overline{B}$ induite par φ est bien définie et injective ; puisqu'elle reste entière, le spectre de cette flèche est surjective.

Par ailleurs, si $\mathfrak{q}$ est un premier de B contenant J, alors $\operatorname{Sp} \overline{\varphi}$ envoie le point $\overline{\mathfrak{q}} := {}^{\mathfrak{q}}\!\diagup_{J}$ de $\operatorname{Sp} \overline{B}$ sur $\overline{\varphi}^{-1}(\overline{\mathfrak{q}})$. Pour calculer ce dernier, on fixe un $a \in A$ et on raisonne par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} \overline{a} \in \overline{\varphi}^{-1}(\overline{\mathfrak{q}}) & \iff & \overline{\varphi}(\overline{a}) \in \overline{\mathfrak{q}} \iff \overline{\varphi(a)} \in \overline{\mathfrak{q}} \iff \varphi(a) \in \mathfrak{q} \\ & \iff & a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) =: \mathfrak{p} \iff \overline{a} \in \overline{\mathfrak{p}} := {}^{\mathfrak{p}}\!\diagup_{I}, \end{array}$$

d'où l'égalité $[\operatorname{Sp}\overline{\varphi}](\overline{\mathfrak{q}}) = \overline{\mathfrak{p}}$. On en déduit que l'action de $f : \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ sur $V(J)$ se factorise à travers les surjections

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} V(J) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Sp}\overline{B} & \overset{\operatorname{Sp}\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{Sp}\overline{A} & \xrightarrow{\sim} & V(I) \\ \mathfrak{q} & \longmapsto & \overline{\mathfrak{q}} & \longmapsto & \overline{\mathfrak{p}} & \longmapsto & \mathfrak{p} \end{array} \right. ,$$

d'où l'égalité recherchée, $f(V(J))$ étant l'image de $V(J)$ par les surjections précédentes.

Corollaire. La formule $f(V(J)) = V\left(\varphi^{-1}(J)\right)$ montre que

le spectre d'une flèche entière est une application fermée.

5.4 Les idéaux $I(X)$: définitions et propriétés

Afin d'avoir une dualité entre points et fonctions, on définit, pour $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Sp} A$, l'idéal (premier) des fonctions s'annulant en $\mathfrak{p}$ par

$$I(\mathfrak{p}) := \{a \in A\,;\, a(\mathfrak{p}) = 0\}$$

(ensemblistement, c'est $\mathfrak{p}$) et, pour $X \subset \operatorname{Sp} A$, l'idéal (radical) des fonctions s'annulant sur X par

$$I(X) := \{a \in A\,;\, a \equiv 0 \text{ sur } X\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} I(\mathfrak{p})$$

(ensemblistement, c'est $\bigcap_{\mathfrak{p}\in X} \mathfrak{p}$). La dualité s'exprime par les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{p} \in V(a) & \Longleftrightarrow & a \in I(\mathfrak{p}) \text{ et} \\ I \subset I(X) & \Longleftrightarrow & X \subset V(I), \end{array}$$

les deux membres de la seconde équivalence traduisant chacun l'annulation des fonctions de I sur la partie X.

Voici quelques propriétés liées aux idéaux radicaux $I(X)$, les dernières tissant les premiers liens entre topologie et algèbre :

1. *l'application $X \mapsto I(X)$ décroît pour l'inclusion ;*
2. ***(nullstellensatz)** une fonction s'annule sur une variété ssi elle est une racine de l'idéal correspondant :*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}\,;$$

3. *un point annule les fonctions d'un idéal radical[60] ssi il est dans l'adhérence de la partie correspondante :*

$$V(I(X)) = \operatorname{Adh} X\,;$$

4. *les applications $I \mapsto V(I)$ et $X \mapsto I(X)$ sont pseudo-inverses l'une de l'autre :*

$$V \circ I \circ V = V \text{ et } I \circ V \circ I = I\,;$$

   elles deviennent des bijections réciproques l'une des l'autre une fois restreintes aux parties fermées *et aux idéaux* radicaux *;*
5. *deux variétés coïncident ssi les racines des idéaux correspondant sont égales. Plus précisément, on a l'équivalence*

$$V(I) \subset V(J) \iff \sqrt{J} \subset \sqrt{I}\,;$$

6. *l'adhérence d'un singleton est la variété de l'idéal correspondant :*

$$\operatorname{Adh}\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p})\,;$$

7. *un singleton est fermé ssi l'idéal correspondant est maximal :*

$$\{\mathfrak{p}\} \text{ fermé} \iff \mathfrak{p} \text{ maximal}\,;$$

[60] Tout idéal radical I vaut sa racine $\sqrt{I} = I(V(I))$, donc est de la forme $I(X)$.

8. *les points fermés sont denses ssi les nilpotents forment tout le radical de Jacobson :*

$$\overline{\mathrm{Sp}_m} = \mathrm{Sp} \iff \mathrm{Rad} = \mathrm{NilRad} \iff \mathrm{Jac} \subset \sqrt{0}.$$

Démonstration.

1. Trivial.
2. Une fonction a donnée est dans la racine de I ssi sa classe $\overline{a}$ *modulo* I est nilpotente, autrement dit ssi la fonction $\overline{a}$ est nulle sur $\mathrm{Sp}\left({}^{A}\diagup_{I}\right) \cong V(I)$. Ce dernier homéomorphisme envoyant $V(\overline{a})$ sur $V(a)$, on en déduit les équivalences
$$a \in \sqrt{I} \iff \overline{a} \text{ nulle sur } \mathrm{Sp}\left({}^{A}\diagup_{I}\right) \iff \mathrm{Sp}\left({}^{A}\diagup_{I}\right) \subset V(\overline{a}) \iff V(I) \subset V(a) \iff a \in I(V(I)).$$
3. Le fermé $F := V(I(X))$ contient tautologiquement X, d'où l'inclusion $\mathrm{Adh}\, X \subset F$. Supposons cette dernière stricte, de sorte qu'il y a un point $\mathfrak{p} \in F$ hors de $\mathrm{Adh}\, X$. On peut donc trouver un ouvert $D(a)$ contenant $\mathfrak{p}$ et disjoint de X. Cette dernière condition se réécrit $X \subset V(a)$, *i. e.* par dualité $a \in I(X)$. Or $\mathfrak{p}$ est dans $F = V(I(X))$, donc annule a et ne saurait appartenir à $D(a)$, *CQFD.*
4. Appliquer les points 2 et 3 sachant que les $V(X)$ sont fermés et les idéaux $I(X)$ radicaux.
5. On applique la décroissance de I et l'égalité du point 2 en se rappelant que les variétés ne voient pas les puissances.
6. Appliquer le point 3 à la partie $X = \{\mathfrak{p}\}$.
7. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal contenant $\mathfrak{p}$. Puisque $\mathrm{Adh}\{\mathfrak{p}\} \overset{\text{point 3}}{=} V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}}$ contient $\mathfrak{m}$, on a les équivalences
$$\{\mathfrak{p}\} \text{ fermé} \iff \{\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{p}\} \iff \mathfrak{p} = \mathfrak{m} \iff \mathfrak{p} \text{ maximal.}$$
8. Les points fermés constituent le spectre maximal, donc leur adhérence vaut $V(I(\mathrm{Sp}_m))$ avec $I(\mathrm{Sp}_m) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Sp}_m} \mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{m} = \mathrm{Jac}$. Cette adhérence vaut tout le spectre ssi $V(\mathrm{Jac}) = \mathrm{Sp} = V(0)$, autrement dit ssi $\sqrt{\mathrm{Jac}} = \sqrt{0}$, ou encore (vu l'inclusion $\sqrt{0} \subset \mathrm{Jac}$ ou bien la radicalité de Jac) ssi $\mathrm{Jac} = \sqrt{0}$.

Remarque. Le dernier point sera vérifié si tous les points sont fermés, *i. e.* si tout premier est maximal, *i. e.* si $\mathrm{Sp} \subset \mathrm{Sp}_m$.

Remarque. Lorsque le dernier point est vérifié, tout anneau A *réduit semi-local* est isomorphes à $C^0\left(A, \coprod_{\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p})\right)$:

pour l'inj, si $a = b$ *modulo* tout $\mathfrak{p}$, alors $a - b \in \bigcap \mathfrak{p} = \sqrt{0} = 0$;

pour surj, si $(f_{\mathfrak{p}})$ est donnée, alors (par finitude des $\mathfrak{m}$) le th chinois donne un (unique) $a \in A$ tq $\forall \mathfrak{m}, a = f_{\mathfrak{m}}$, donc f et a coïncident sur $\mathrm{Sp}_m A$ qui erst dense, donc sur tout $\mathrm{Sp}\, A$.

Récirpqie ? ? ? ? ? est-ce que $A \cong C^0\left(A, \coprod_{\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p})\right) \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{Sp}\, m} = \mathrm{Sp}$? ? ? ?

Le cas des algèbre dtf rentre dans ce cadre.

5.5 Le cas des algèbres de type fini

La proposition suivante montre pourquoi, dans les anneaux de polynômes et leurs quotients, on ne perd rien du point de vue topologique à se restreindre aux idéaux *maximaux*.

En particulier, lorsque k est algébriquement clos, connaître la topologie de ZARISKI sur $k^n \cong \mathrm{Sp}_m\, k[X_1, ..., X_n]$ permet de reconstituer les variétés de $\mathrm{Sp}\, k[X_1, ..., X_n]$. Cela pourra motiver le choix pédagogique de présenter en tout premier lieu la topologie de ZARISKI sur k^n (on ne perd rien du point de point topologique).

On notera par un indice m (comme **m**aximal) le fait d'intersecter avec le spectre maximal :

$$V_m(I) := V(I) \cap \mathrm{Sp}_m A,$$
$$D_m(a) := D(a) \cap \mathrm{Sp}_m A.$$

Proposition (spectre maximal des algèbres de type fini).
Dans une algèbre de type fini, on dispose des propriétés suivantes :

1. *les points fermés sont denses :*

$$\overline{\operatorname{Sp}_m A} = \operatorname{Sp} A \ ;$$

2. *pour qu'une fonction s'annule sur une variété, il suffit qu'elle s'annule sur ses points maximaux :*

$$I(V(I)) = I(V_m(I)) = \sqrt{I}\,;$$

3. *deux variétés $V(I)$ et $V(J)$ sont égales ssi elles ont mêmes points fermés :*

$$V(I) = V(J) \iff V_m(I) = V_m(J)\,.$$

4. *la topologie sur $\operatorname{Sp} A$ et la topologie trace sur $\operatorname{Sp}_m A$ sont en bijection via $V(I) \longleftrightarrow V_m(I)$:*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{\text{fermés de } \operatorname{Sp} A\} & \cong & \{\text{fermés relatifs de } \operatorname{Sp}_m A\} \\ V(I) & \longleftrightarrow & V_m(I) \end{array} \right. .$$

Démonstration.

1. Soit $D(a)$ un ouvert élémentaire non vide. On veut trouver un idéal maximal dedans. On rappelle l'homéomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} D(a) & \cong & \operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{a}\right] \\ \mathfrak{p} & \longleftrightarrow & \mathfrak{p}\left[\frac{1}{a}\right] \end{array} \right.$. Il suffit de montrer qu'il induit par restriction aux points fermés un homéomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} D_m(a) & \cong & \operatorname{Sp}_m A\left[\frac{1}{a}\right] \\ \mathfrak{m} & \longleftrightarrow & \mathfrak{m}\left[\frac{1}{a}\right] \end{array} \right.$. En effet, puisque $\operatorname{Sp} A\left[\frac{1}{a}\right] \simeq D(a)$ est non vide, l'anneau $A\left[\frac{1}{a}\right]$ est non nul, donc admet un idéal maximal, auquel correspondrait un idéal maximal dans $D(a)$ *via* l'homéomorphisme $D_m(a) \cong \operatorname{Sp}_m A\left[\frac{1}{a}\right]$ dont nous allons maintenant prouver l'existence.

   Puisque l'isomorphisme entre anneaux localisés $\left\{ \begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \widetilde{\longrightarrow} & A\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{S}\right]} \\ \frac{a}{s} & \longmapsto & \frac{\frac{a}{1}}{\frac{s}{1}} \end{array} \right.$ est linéaire, les corps résiduels $\kappa_{\mathfrak{p}\left[\frac{1}{a}\right]}$ et $\kappa_{\mathfrak{p}}$ sont isomorphes en tant qu'algèbres. Par conséquent, l'un est de dimension finie ssi l'autre l'est ; les algèbres A et $A\left[\frac{1}{a}\right]$ étant par ailleurs de type fini, le lemme de Zariski nous permet de traduire : l'idéal $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{a}\right]$ est maximal ssi $\mathfrak{p}$ l'est, *CQFD.*

   Remarque. La preuve ci-dessus est de nature géométrique. Une preuve *algébrique* est proposée dans les exercices.

2. On rappelle l'homéomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} V(I) & \cong & \operatorname{Sp}\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right) \\ \mathfrak{p} & \longleftrightarrow & {}^{\mathfrak{p}}\!\diagup_{I} \\ V(a) & \longleftrightarrow & V(\overline{a}) \end{array} \right.$. Il induit par restriction aux points fermés (suivant le même argument qu'au point précédent) un homéomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} V_m(I) & \cong & \operatorname{Sp}_m\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right) \\ \mathfrak{m} & \longleftrightarrow & {}^{\mathfrak{m}}\!\diagup_{I} \end{array} \right.$.
   Considérons à présent une fonction a nulle sur $V_m(I)$. Cela s'écrit $V_m(I) \subset V(a)$, soit encore (en utilisant la bijection rappelée) $\operatorname{Sp}_m\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right) \subset V(\overline{a})$. Passant à l'adhérence et utilisant le point précédent[61], il vient $\operatorname{Sp}\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right) \subset V(\overline{a})$, soit encore $V(I) \subset V(a)$, autrement dit a nulle sur $V(I)$, *CQFD.*

3. Un sens est indigne d'être étudié, l'autre tombe grâce aux implications

$$V_m(I) = V_m(J) \implies I(V_m(I)) = I(V_m(J)) \Longrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J} \implies V(I) = V(J)\,.$$

4. Vu le point précédent, l'application $V(I) \mapsto V_m(I)$ est bien définie est injective. Comme elle est par construction surjective, on a terminé.

Remarque. L'hypothèse de type fini nous a servi en introduction pour montrer l'égalité $I(V(I)) = \sqrt{I}$ pour un idéal de $C^0(X, \mathbf{R})$ de type fini. ? ? ?

[61] l'algèbre quotient ${}^{A}\!\diagup_{I}$ est bien de type fini puisque A l'est

5.6 Le cas des algèbres finies

Finissons par la description exhaustive des cas où ces points fermés sont en nombre *fini* – par exemple, dans un produit de corps. Ce dernier exemple est le seul possible au sens du point 2 de la proposition suivante.

? ? ? ?Rappel sur artinien = *i. e.* sans suites strictement décroissantes d'idéaux $\overset{\text{Akizuki}}{=}$ noeth + tout premier maximal : alors sp(=spm) fini[62], $\sqrt{0}$ nilmpotent, $A_{rd} = \prod_{fini}$corps, $A = \prod$irred. EXO AKIZUKI ? ? ?
Ici, alg dtf$\Longrightarrow$noeth, et finie = de dim finie = noeth = artinien.

Proposition. *Une algèbre de type fini est finie ssi son spectre (maximal) est fini. Alors :*

1. *tout premier est maximal :*
$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp}_m A\,;$$
2. modulo *le nilradical, l'algèbre de départ vaut le produit des corps résiduels*
$$\left\{\begin{array}{ccc} A/\sqrt{0} & \xrightarrow{\sim} & \prod \kappa(\mathfrak{m}) \\ a & \longmapsto & (a \mod \mathfrak{m}) \end{array}\right.\,;$$
3. *tous les localisés sont des algèbres finies :*
$$\forall \mathfrak{m},\ \dim A_{\mathfrak{m}} < \infty\,;$$
4. *l'algèbre de départ est produit de ses localisés :*
$$\left\{\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & \prod A_{\mathfrak{m}} \\ a & \longmapsto & \left(\frac{a}{1}\right) \end{array}\right.\,.$$

Démonstration.
Supposons $\dim A$ finie.

Déjà, pour tout premier $\mathfrak{p}$, l'algèbre intègre $A/\mathfrak{p}$ est finie, donc est un corps, d'où la maximalité de $\mathfrak{p}$ et l'égalité $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp}_m A$.

Ensuite, deux idéaux maximaux distincts étant copremiers, le lemme chinois donne des surjections $A \twoheadrightarrow \prod A/\mathfrak{m}_i$ pour tout système fini de $\mathfrak{m}_i$. En prenant les dimensions, il vient $\dim A \geq \sum \dim\left(A/\mathfrak{m}_i\right) \geq \sum 1 = \#\{\mathfrak{m}_i\}$, d'où la finitude de $\operatorname{Sp}_m A = \operatorname{Sp} A$. D'après la dernière proposition du paragraphe 2.5, on en déduit le second point.

On suppose à présent $\operatorname{Sp}_m A$ fini (toujours sous l'hypothèse « A de type fini »). On montrera en toute fin de démonstration que A est finie ; cela découlera des points 3 et 4.

1. L'adhérence d'une union finie étant l'union des adhérences, on peut écrire
$$\operatorname{Sp} A \overset{A \text{ de type fini}}{=} \overline{\operatorname{Sp}_m A} = \overline{\bigcup \{\mathfrak{m}\}} = \bigcup \overline{\{\mathfrak{m}\}} = \bigcup \{\mathfrak{m}\} = \operatorname{Sp}_m A.$$
Un autre argument consiste à appliquer le lemme chinois aux idéaux maximaux[63]. On aurait également pu raisonner en termes de supports[64].
2. Déjà vu.
3. Fixons un $\mathfrak{m}$ et notons $\mathfrak{M} := \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal du localisé $A_{\mathfrak{m}}$. Vu la suite de puissances
$$\cdots \subset \mathfrak{M}^n \subset \mathfrak{M}^{n-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{M}^2 \subset \mathfrak{M} \subset A_{\mathfrak{m}},$$
la finitude de $A_{\mathfrak{m}}$ découlera[65] de celle des quotients successifs $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ à condition d'avoir celle des $\mathfrak{M}^n$.

[62] Un anneau possédant un nombre fini d'idéaux maximaux est dit ***semi-local***. Sans surprise, un anneau local est semi-local. On rappelle ici que les anneaux ***artiniens*** sont semi-locaux.

[63] Le noyau $\bigcap \mathfrak{m}$ de la flèche $A \twoheadrightarrow \prod A/\mathfrak{m}$ est le radical de A, donc son nilradical puisque A est de type fini. Le spectre de A s'identifie donc à $\operatorname{Sp}\left(A/\sqrt{0}\right) \cong \operatorname{Sp} \prod k(\mathfrak{m})$, lequel contient autant d'éléments que de $\mathfrak{m}$, d'où l'égalité des cardinaux de $\operatorname{Sp} A$ et $\operatorname{Sp}_m A$.

[64] Puisque $A_{réd}$ est somme (directe) des corps résiduels, son support vaut la réunion des supports des $k(\mathfrak{m})$, à savoir la réunion des $\{\mathfrak{m}\}$, autrement dit $\operatorname{Sp}_m A$. Par ailleurs, les anneaux A et $A_{réd}$ ayant même spectre, ils ont même support ; celui de A valant $\operatorname{Sp} A$, on peut conclure.

[65] on renvoie à la première moitié du paragraphe 2.1 pour cette caractérisation de la dimension finie

Montrons déjà ce dernier point[66] :

$$\exists p \geq 1,\ \mathfrak{M}^p = 0.$$

L'anneau $A_\mathfrak{m}$ étant local, son radical vaut $\mathfrak{M}$. Par ailleurs, A est noethérien car de type fini sur un anneau noethérien (le corps de base), donc le localisé $A_\mathfrak{m}$ aussi, de sorte que l'idéal $\mathfrak{M}$ est de type fini. Or le radical $\mathfrak{M}$ vaut le nilradical car $\overline{\operatorname{Sp}_m A} = \overline{\operatorname{Sp} A} = \operatorname{Sp} A$. En prenant une puissance qui annule tous les éléments d'une famille génératrice de $\mathfrak{M}$, on conclut.

Maintenant, chaque quotient ${}^{\mathfrak{M}^n}\!\diagup_{\mathfrak{M}^{n+1}}$ est un $\left({}^{A_\mathfrak{m}}\!\diagup_{\mathfrak{M}}\right)$-module de type fini (car $\mathfrak{M}^n$ est de type fini), *i. e.* un $\kappa(\mathfrak{m})$-ev de dimension finie ; or Zariski nous dit que la dimension de $\kappa(\mathfrak{m})$ est finie, ce qui conclut.

4. On regarde la flèche Λ produit des localisations $A \longrightarrow \prod A_\mathfrak{m}$.

Son injectivité est un cas particulier de l'injection d'un module M dans le produit $\prod M_\mathfrak{m}$.

La surjectivité revient à la nullité du conoyau $Q := {}^{\prod A_\mathfrak{m}}\!\diagup_{\operatorname{Im}\Lambda}$, ou encore (d'après l'injection $Q \hookrightarrow \prod Q_\mathfrak{m}$) à celle des localisés $Q_\mathfrak{m}$. Or, le module Q étant de type fini (puisque tous les $A_\mathfrak{m}$ le sont et car $\operatorname{Sp}_m A$ est fini), Nakayama nous dit que ces nullités reviennent à celles des fibres $Q \otimes \kappa(\mathfrak{m})$. On tensorise donc (pour faire apparaître la fibre en un $\mathfrak{m}_0$ donné) la suite exacte $A \xrightarrow{\Lambda} \bigoplus A_\mathfrak{m} \twoheadrightarrow Q$ par le corps résiduel en un $\mathfrak{m}_0$:

$$\kappa(\mathfrak{m}_0) \longrightarrow \bigoplus A_\mathfrak{m} \otimes \kappa(\mathfrak{m}_0) \twoheadrightarrow Q \otimes \kappa(\mathfrak{m}_0).$$

Dans la somme du milieu, un terme vaut

$$A_\mathfrak{m} \otimes \kappa(\mathfrak{m}_0) \cong A_\mathfrak{m} \otimes \operatorname{Frac}\left({}^{A}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0}\right) \cong A_\mathfrak{m} \otimes {}^{A}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0} \cong {}^{A_\mathfrak{m}}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0 A_\mathfrak{m}} ;$$

pour $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$, on a $\mathfrak{m}_0 \not\subset \mathfrak{m}$ par maximalité, donc $\mathfrak{m}_0$ contient un inversible s_0 de $A_\mathfrak{m}$, d'où la nullité *modulo* $\mathfrak{m}_0 A_\mathfrak{m}$ de tous les éléments $\frac{a}{s} = s_0 \frac{a}{ss_0}$ de $A_\mathfrak{m}$. La somme directe se restreint donc au quotient ${}^{A_{\mathfrak{m}_0}}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0}} = \kappa(\mathfrak{m}_0)$. La tensorisation étant exacte à droite, on obtient une suite exacte

$$\kappa(\mathfrak{m}_0) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{m}_0) \twoheadrightarrow Q \otimes \kappa(\mathfrak{m}_0).$$

La nullité de la fibre voulue découlera donc de la surjectivité de la flèche de gauche. Montrons qu'il s'agit en fait de l'identité : puisqu'elle se factorise en

$${}^{A}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0} = \kappa(\mathfrak{m}_0) \cong A \otimes \kappa(\mathfrak{m}_0) \xrightarrow{\Lambda \otimes \operatorname{Id}_{\kappa(\mathfrak{m}_0)}} \bigoplus A_\mathfrak{m} \otimes \kappa(\mathfrak{m}_0) = A_{\mathfrak{m}_0} \otimes {}^{A}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0} \cong {}^{A_\mathfrak{m}}\!\diagup_{\mathfrak{m}_0 A_\mathfrak{m}},$$

un élément $\lambda = \overline{a} = \frac{\widetilde{a}}{1}$ de $\kappa(\mathfrak{m}_0)$ est envoyé successivement sur

$$\lambda \longleftrightarrow 1 \otimes \lambda \longmapsto \sum_{\mathfrak{m}} \frac{1}{1} \otimes \lambda = \frac{1}{1} \otimes \overline{a} \longleftrightarrow \frac{\widetilde{a}}{1} = \lambda,\ \mathit{CQFD}.$$

5.7 Exercices

Soit I idéal dans A noteithérien et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A/I$. Alors $\mathfrak{p}$ est minimal ssi $A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$ est artivien
(eisenbud, Cor 2.19)
$A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p} \cong (A/I)_{\mathfrak{p}/I} = \overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}$; or $\mathfrak{p}$ min$\Longleftrightarrow$pas de premier $\subsetneq \overline{\mathfrak{p}}\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ $\Longleftrightarrow$tout $\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{m}$; puisque $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ noeth, on a bien l'équivalence$A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$ aritinin $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ minmial.

Un anneau safaisant $\overline{\operatorname{Sp}_m} = \operatorname{Sp}$ est qualifié ***de Jacobson*** (ie tout idéal premier est intersection de maximaux).

Sens géométrique : *un anneau est de Jacobson ssi les points fermés sont denses dans tout fermé.*

=> soit $V(I)$ un fermé et un ouvert $D(J)$ rencontrant $V(I)$ en un $\mathfrak{p}$. Alors $\mathfrak{p}$ est intersection de max, dont l'un ne peut contenir J (sinon $J \subset \mathfrak{p}$), d'où un max dans $D(J)$

[66] En fait, on pourrait travailler avec les m au lieu des M : d'une part, les propriétés de noethérianité sont déjà présentes, d'autre part, tensoriser par m^n l'isomorphisme du corps résiduel ${}^{A}\!\diagup_{\mathsf{m}} \cong {}^{A_\mathsf{m}}\!\diagup_{\mathsf{m}A_\mathsf{m}}$ donne l'isomorphisme des quotients ${}^{\mathsf{m}^n}\!\diagup_{\mathsf{m}^{n+1}} \cong {}^{\mathsf{M}^n}\!\diagup_{\mathsf{M}^{n+1}}$.

<=Soit $\mathfrak{p}$l'hypothèse se traduit (cf =>) $\forall I, \forall J,\ \begin{matrix} I \subset \mathfrak{p} \\ J \not\subset \mathfrak{p} \end{matrix} \implies \exists \mathfrak{m},\ \begin{matrix} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \\ J \not\subset \mathfrak{m} \end{matrix}$. Contrapose : $\forall \mathfrak{m}, (\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \implies J \subset \mathfrak{m}) \implies (I \subset \mathfrak{p} \implies J \subset \mathfrak{p})$, spécialisée (I, J) en $(\mathfrak{p}, \cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m})$ donne $\cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, l'inclusin $\supset$ est triviale.

Sanity check : *Mq Spm dense dans tout fermé => Spm dense, ie (tout $\mathfrak{p} = \cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m}$)=>($Jac = \sqrt{0}$).*
$Jac = \cap \mathfrak{m}$ est inclus dans $\cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ poru tout $\mathfrak{p}$.

Autre caractérisdation : *A de Jac ssi $\mathfrak{p}$ maximal dans A dès que $\mathfrak{p}\left[\frac{1}{a}\right]$ est maximal dans un $A\left[\frac{1}{a}\right]$*
(**sens géom** : *un point est fermé dès qu'il est fermé dans un ouvert*)

<= Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$. On a toujours $\mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m}$. Soit réciproquement $a \in \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m}$ et supposons par l'absurde $a \notin p$. Alors $\overline{a}$ est non nilpotent dans ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}$, donc l'anneau ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}\left[\frac{1}{\overline{a}}\right]$ est non nul et admet un idéal maximal, auquel correspond un idéal ${}^{\mathfrak{m}}\!/_{\mathfrak{p}}$ de ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}$ ne contenant pas $\overline{a}$ et maximal pour cette propriété, *i. e.* un idéal $\mathfrak{m}$ de A contenant $\mathfrak{p}$ et pas a et maximal pour ces propriétés. Alors $\mathfrak{m}$ est un idéal de A ne contenant pas a et maximal pour cette propriété (si $\mathfrak{m} \subset I \not\ni a$, alors I contient $\mathfrak{p}$ et pas a, d'où $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ par maximalité de $\mathfrak{m}$), *i. e.* $\mathfrak{m}\left[\frac{1}{a}\right]$ est maximal dans $A\left[\frac{1}{a}\right]$. Par hypothèse, $\mathfrak{m}$ doit être maximal ; or il contient $\mathfrak{p}$, d'où $a \in \bigcap_{\mathfrak{m}' \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$, ce qui est une contradiction.

=> on a les équivalences

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_m \text{ dense dans tout fermé} &\iff \forall F,\ \forall O,\ (F \cap O \neq \emptyset \implies \exists \mathfrak{m} \in F \cap O) \\ &\iff \forall F,\ \forall O,\ \forall \mathfrak{p},\ (\mathfrak{p} \in F \cap O \implies \exists \mathfrak{m} \in F \cap O) \\ &\iff \forall \Delta,\ \forall S,\ (S \subset \Delta \implies \exists \mathfrak{m} \in \Delta) \end{aligned}$$

(on quantifie sur les $\Delta := F \cap O$ différence de deux ouverts (ou deux fermés) et sur les singletons $S := \{\mathfrak{p}\}$) et

$$\begin{aligned} &\text{un point est fermé dès qu'il est fermé dans un ouvert} \\ \iff\ &\forall F,\ \forall O,\ \forall \mathfrak{p},\ (\{\mathfrak{p}\} = F \cap O \implies \exists \mathfrak{m} \in \{\mathfrak{p}\}) \\ \iff\ &\forall \Delta\ \forall S,\ (S = \Delta \implies \exists \mathfrak{m} \in \Delta) \end{aligned}$$

d'où l'iplication cherchée.

Mq une algèbre de type fini est de Jac

Montrons que $k\left[\overrightarrow{X}\right]$ est un anneau de Jacobson. Cela découle du nustellensatz : $\cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m} = \cap_{\mathfrak{m}_x \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m}_x = \cap_{x \in V(\mathfrak{p})} I(x) = I(V(\mathfrak{p})) = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. On en déduit que $k\left[\overrightarrow{X}\right]/I$ est de jacobson : $\cap_{\mathfrak{M} \supset \mathfrak{P}} \mathfrak{M} = \cap_{\mathfrak{m}/I \supset \mathfrak{p}/I} \mathfrak{m}/I = \cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} (\mathfrak{m}/I) = (\cap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}} \mathfrak{m})/I = \mathfrak{p}/I = \mathfrak{P}$.

Retour sur les supports. Les variétés $V(I)$ permettent de décrire aisément les supports de modules.

Proposition.

1. *le support d'une somme (de sous-modules) est l'union des supports :*
$$\operatorname{Supp}\left(\sum M_i\right) = \bigcup \operatorname{Supp} M_i\ ;$$

2. *le support d'un produit tensoriel (fini) de modules de type fini est l'intersection des supports :*
$$M \text{ et } N \text{ de type fini} \implies \operatorname{Supp} M \otimes N = \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} N.$$

3. *le support d'un quotient est la variété associée à l'idéal quotientant :*
$$\operatorname*{Supp}_A \left({}^{A}\!/_{I}\right) = V(I)\ ;$$

4. *le support d'un anneau est son spectre :*
$$\operatorname{Supp} A = \operatorname{Sp} A\ ;$$

5. *le support d'un corps résiduel en un point fermé est ce point :*
$$\operatorname{Supp} \kappa(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}\ ;$$

6. *le support d'un module est l'union des variétés associées aux annulateurs de générateurs de ce module :*

$$M = \sum Am_i \implies \operatorname{Supp} M = \bigcup V(\operatorname{Ann} m_i) \; ;$$

7. *le support d'un module est toujours inclus dans la variété associée à son annulateur, avec égalité si le module est de type fini :*

$$\operatorname{Supp} M \subset V(\operatorname{Ann} M) \;\; \textit{avec} \;\; = \;\; \textit{si } M \textit{ de type fini.}$$

Démonstration.

1. D'une part le localisé $\left(\sum M_i\right)_{\mathfrak{p}}$ de la somme étant la somme $\sum (M_i)_{\mathfrak{p}}$ des localisés, d'autre part une somme de sous-modules est nulle ssi tous ces sous-modules le sont.
2. Vu les distributivités de $\otimes$ sur $\sum$ et de $\cap$ sur $\bigcup$, on peut supposer d'après le point 1 M et N monogènes, disons $M = (f)$ et $N = (g)$, d'où $M \otimes N \cong (f \otimes g)$. ????
3. On peut toujours calculer le localisé

$$\left({}^{A}\!/\!_{I}\right)_{\mathfrak{p}} \cong {}^{A}\!/\!_{I} \otimes A_{\mathfrak{p}} \cong {}^{A_{\mathfrak{p}}}\!/\!_{IA_{\mathfrak{p}}}.$$

Si $\mathfrak{p}$ ne contient pas I, la partie multiplicative $A \backslash \mathfrak{p}$ contient un élément nul *modulo* I, donc $A_{\mathfrak{p}}$ est nul *modulo* $IA_{\mathfrak{p}}$. Par ailleurs, l'inclusion $I \subset \mathfrak{p}$ implique $IA_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subsetneq A_{\mathfrak{p}}$ (l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est strict), donc la non-nullité du localisé.
4. Spécialiser $I \leftarrow 0$.
5. Spécialiser $I \leftarrow \mathfrak{m}$ vu l'isomorphisme $\kappa(\mathfrak{m}) \cong {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{m}}$ et l'égalité $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$.
6. D'une part le point 1 nous dit que $\operatorname{Supp} M = \bigcup V(Am_i)$, d'autre part les modules Am_i et ${}^{A}\!/\!_{\operatorname{Ann} m_i}$ sont isomorphes donc ont même support $V(\operatorname{Ann} m_i)$ d'après le point 3.
7. Vu d'une part l'égalité $\operatorname{Ann} M = \bigcap \operatorname{Ann} m_i$ pour toute famille (m_i) génératrice, d'autre part l'inclusion $\bigcup V(I_i) \subset V\left(\bigcap I_i\right)$ pour toute famille d'idéaux I_i (qui est une égalité lorsque la famille est finie), on peut affirmer

$$\operatorname{Supp} M = \bigcup V(\operatorname{Ann} m_i) \subset V\left(\bigcap \operatorname{Ann} m_i\right) = V(\operatorname{Ann} M).$$

Lorsque M est de type fini, on peut choisir des m_i en nombre fini, d'où l'égalité.

Remarque. Chacun des points ci-dessus peut se comprendre en regardant le cas de l'anneau $A := C^0(X, \mathbf{R})$ et de modules monogènes Af et Ag. D'une part le produit tensoriel de Af par Ag est Afg, d'autre part le support de fg est l'intersection de ceux de f et g. Le premier point permet alors de faire le pont.

Pour plus de détails, le lecteur se reportera au tome d'*Algèbre commutative* de Bourbaki, chapitre 2 (*Localisation*), numéro 3, point 4 (*Support d'un module*).

6 Séparation dans les spectres

Rappelons que les questions de *séparation* dans un espace topologique X consistent à se demander comment la topologie de X permet de distinguer, de *séparer* deux points de X. Formalisons : deux points a et b dans X seront dits (topologiquement) ***indistinguables*** si tout ouvert contenant a contient automatiquement b (intuitivement, la topologie n'est alors pas assez fine pour repérer une différence "spatiale" entre les points a et b). Le minimum que l'on puisse attendre d'un espace "séparé" est qu'il puisse distinguer (topologiquement) tout couple de points distincts (ensemblistement) : c'est le premier axiome de séparation – dit[67] T_0.

[67]La lettre T, initiale du mot allemand *Trennungsaxiom* (« axiome de séparation »), a été introduite par Pavel Aleksandrov et Heinz Hopf dans leur traité *Topologie* de 1935 (p. 58 et suivantes), où ils présentaient une liste de tels axiomes.

6.1 Quasi-compacité et « quasi-séparation » (axiome T_0 de Hausdorff)

Comme annoncé précédemment, montrons que

la topologie de Zariski *sur un spectre est quasi-compacte.*

Observer que la vacuité d'une intersection de fermés $\bigcap V(I_i) = \emptyset$ se réécrit $V(\sum I_i) = \emptyset$ et donc équivaut à $1 \in \sum I_i$. Par définition de la somme de parties, l'intersection est vide ssi une sous-intersection *finie* est vide, *CQFD.*

Cependant, nous avons vu que la topologie de Zariski sur les anneaux principaux (où les fermés stricts sont les parties finies) n'est pas séparée au sens usuel[68]. Cette non-séparation se généralise aux anneaux intègres.

Non-séparation dans un anneau intègre.
Le spectre d'un anneau intègre est irréductible. De plus le point 0 *est dense et est le seul.*

Démonstration.
Un anneau intègre n'ayant qu'un seul nilpotent (zéro), un ouvert $D(a)$ est non vide ssi $a \neq 0$. Ainsi, la formule $D(a) \cap D(b) = D(ab)$ assure que deux ouverts non vides se rencontrent toujours, autrement dit que tout ouvert (non vide) est dense.
Soit maintenant η un point dense. On a $V(0) = \operatorname{Sp} A = \operatorname{Adh}\{\eta\} = V(\eta)$, donc $\sqrt{\eta} = \sqrt{0} = 0$, d'où $\eta = 0$. Réciproquement, on a bien $\operatorname{Adh}\{0\} = V(0) = \operatorname{Sp} A$.

Même si les anneaux intègres doivent nous ramener à la réalité quant à la séparabilité de la topologie de Zariski, on dispose quand même d'une propriété de séparation – nécessairement plus faible.

Proposition – Définition (séparation T_0 au sens de Kolmogorov).
Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes. Lorsqu'elles sont vérifiées[69]*, on dit que X est un espace* ***de*** Kolmogorov *:*

1. *pour tous points distincts a et b de X, il y a un ouvert contenant [a et pas b] ou [b et pas a];*
2. *idem que 1. en remplaçant « ouvert » par « fermé »;*
3. *pour tous points distincts a et b de X, on a la disjonction $a \notin \operatorname{Adh}\{b\}$ ou $b \notin \operatorname{Adh}\{a\}$;*
4. *l'application $x \mapsto \operatorname{Adh}\{x\}$ est injective.*

Démonstration.
1. $\iff$ 2. Clair par passage au complémentaire.
2. $\iff$ 3. Considérons deux points distincts a et b. Soit par exemple F un fermé contenant a et pas b. Alors F contient l'adhérence de $\{a\}$, donc cette dernière ne peut contenir b. Réciproquement, si $b \notin \operatorname{Adh}\{a\}$, alors $\operatorname{Adh}\{a\}$ est un fermé satisfaisant le second point.
3. $\implies$ 4. Puisque $a \in \operatorname{Adh}\{a\}$, supposer $a \notin \operatorname{Adh}\{b\}$ empêche l'égalité des deux adhérences.
4. $\implies$ 1. On considère deux points a et b distincts. En observant les implications (valables pour tous points x, y)

$$x \in \operatorname{Adh}\{y\} \implies \{x\} \subset \operatorname{Adh}\{y\} \implies \operatorname{Adh}\{x\} \subset \operatorname{Adh}\{y\},$$

on voit que nier la disjonction $a \notin \operatorname{Adh}\{b\}$ ou $b \notin \operatorname{Adh}\{a\}$ conduit à l'égalité $\operatorname{Adh}\{a\} = \operatorname{Adh}\{b\}$, ce qui contredit l'hypothèse d'injectivité.

L'intérêt de cette définition est que

la topologie de Zariski *sur un spectre est un espace de* Kolmogorov.

Montrons en effet l'injectivité de $\mathfrak{p} \mapsto \operatorname{Adh}\{\mathfrak{p}\}$. D'une part l'adhérence d'un point $\mathfrak{p}$ est la variété $V(\mathfrak{p})$, d'autre part une égalité $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q})$ équivaut à $\sqrt{\mathfrak{p}} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, soit à[70] $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

[68] L'axiome T_2 de séparation, ou axiome de Hausdorff, énonce : étant donnés deux points distincts, il y deux ouverts disjoints contenant chacun l'un de ces points

[69] Ce qu'il y a à retenir de ces équivalences, c'est que, lorsqu'il y a un fermé « séparateur », on peut prendre pour celui-ci l'adhérence de l'un des deux points séparés.

[70] un idéal premier est radical

Un corollaire amusant est de retrouver l'unicité du point dense dans un anneau intègre : si a et b sont deux points denses distincts, par Kolmogorov, il y a par exemple un ouvert U contenant a et pas b ; or b est dense, donc appartient à tout ouvert, donc à U, d'où la contradiction.

Plus généralement, ce qui précède montre que[71]

un espace irréductible de Kolmogorov *admet au plus un point générique.*

Voyons à présent d'autres séparations ainsi que les critères algébriques correspondants.

6.2 Critères de séparation au sens de Fréchet et Hausdorff (axiomes T_1 et T_2)

On dira qu'un espace est ***séparé*** (tout court) s'il vérifie l'axiome T_2 de séparation de Hausdorff : *étant donnés deux points distincts, il y a deux ouverts disjoints contenant chacun l'un (exactement) de ces points.* C'est la séparation au sens courant dans les espaces vectoriels normés.

Proposition – Définition (séparation T_1 au sens de Fréchet**).**
Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes. Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que X est un espace ***de*** Fréchet *:*

1. *pour tous points distincts a et b de X, il y a un ouvert contenant [a et pas b] et un ouvert contenant [b et pas a] ;*
2. *idem que 1. en remplaçant « ouvert » par « fermé » ;*
3. *tous les points sont fermés.*

Démonstration.
1. $\iff$ 2. Trivial par passage au complémentaire.
2. $\implies$ 3. Soit a un point et $b \neq a$: il y a un fermé F contenant a et pas b, donc l'adhérence de $\{a\}$ est incluse dans F, *a fortiori* ne contient pas b. Ce dernier étant quelconque, $\operatorname{Adh}\{a\}$ est réduit à $\{a\}$
3. $\implies$ 2. Les adhérences de points distincts fournissent des fermés satisfaisants.

Il est aisé de constater les implications

$$T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Reformulons ces trois points en termes algébriques dans le cas des spectres.

Spectres de Kolmogorov**.** Vues l'injectivité de $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ et l'égalité $\operatorname{Adh}\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p})$,

tous les spectres sont de Kolmogorov.

Spectres de Fréchet**.** Un spectre est T_1 ssi ses points sont fermés, *i. e.* ssi $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp}_m A$:

un spectre est de Fréchet *ssi tout premier est maximal.*

De manière explicite, si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont deux points fermés, on sait que $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}'$, d'où un élément $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}'$, de sorte que l'ouvert $D(a)$ contient $\mathfrak{m}'$ mais pas $\mathfrak{m}$; de même dans l'autre sens.

Spectres de Hausdorff **ou** Fréchet**.** La réciproque de l'implication $T_2 \implies T_1$ est fausse pour les spectres en général, même pour un anneau noethérien : dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}[X]$, l'intégrité assure que le spectre (étant irréductible) n'est pas séparé (il n'est pas réduit à un point si l'anneau n'est pas un corps) et la factorialité montre que tout premier est maximal.

En revanche, si l'on rajoute une condition de *finitude* (toujours sur un anneau noethérien), on peut remonter : *lorsque A est noethérien,*

$\operatorname{Sp} A$ *est séparé ssi les spectres* $\operatorname{Sp} A$ *et* $\operatorname{Sp}_m A$ *sont égaux et* finis,

[71] comme annoncé lors de la définition d'un point générique

En effet, $\mathrm{Sp}\, A$ étant noethérien, sa séparation implique sa finitude ; par ailleurs, étant T_2, il est T_1, d'où l'égalité $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}_m\, A$. Réciproquement, on a vu que ces conditions permettaient (*via* le lemme chinois) d'écrire A_{red} comme un produit fini de corps k_i dont les points sont les $\mathfrak{m}_i := \cdots \times k_{i-1} \times 0 \times k_{i+1} \times \cdots$. On sépare alors $\mathfrak{m}_i$ et $\mathfrak{m}_j$ par les ouverts $D(\cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ où le 1 est à la i-ème puis la j-ième place, leur intersection valant $D(0) = \emptyset$ lorsque $i \neq j$.

Remarque. ? ? ? Un anneau noethérien où tout premier est maximal est dit ***artinien***. Un théorème d'Akizuki montre qu'un anneau est artinien ssi toute suite décroissante d'idéaux stationne. Ainsi, vu les résultats du paragraphe 5.6, l'équivalence ci-dessus se reformule comme suit :

$$\text{lorsque } A \text{ est noethérien,} \quad \begin{array}{c} (\mathrm{Sp}\, A \textit{ est séparé}) \iff (\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}_m\, A \textit{ sont finis}) \\ \iff (A \textit{ est artinien}) \iff (A_{red} \textit{ est un produit de corps}) \end{array}.$$

6.3 Critères de connexité et d'irréductibilité

Dans tous les critères topologico-algébriques qui suivent, il est souvent question de l'anneau *réduit* : c'est normal puisque le spectre ne voit pas les nilpotents.

En pensant un anneau comme un espace de fonctions continues sur son spectre, le premier critère est le Zariski-analogue de la proposition suivante : *un espace topologique X est connexe ssi*[72] *l'anneau $C^0(X, \mathbf{R})$ est indécomposable*[73].

Critère de connexité. *Le spectre d'un anneau est connexe ssi le réduit de cet anneau est indécomposable.*

Démonstration.
Vu le calcul du spectre d'un produit

$$\mathrm{Sp}\, A \times B \cong \mathrm{Sp}\, A \amalg \mathrm{Sp}\, B,$$

et vu que la non-nullité des anneaux A et B implique la non-vacuité de leurs spectres, il est clair que le spectre d'un anneau décomposable n'est pas connexe.

Supposons réciproquement $\mathrm{Sp}\, A = V(I) \amalg V(J)$ avec I et J idéaux radicaux stricts ($V(I)$ et $V(J)$ sont non vides). Alors :

$$\begin{aligned} \text{d'une part, } V(I \cap J) &= V(I) \cup V(J) = \mathrm{Sp}\, A = V(0)\text{, d'où } I \cap J = \sqrt{0}, \\ \text{d'autre part, } \emptyset &= V(I) \cap V(J) = V(I + J)\text{, d'où } I + J = A. \end{aligned}$$

Il en résulte par le lemme chinois une surjection $A \twoheadrightarrow \left(A/I\right) \times \left(A/J\right)$ de noyau $\sqrt{0}$, d'où une décomposition $A_{red} = A/\sqrt{0} \cong \left(A/I\right) \times \left(A/J\right)$. Les idéaux I et J étant stricts, la décomposition n'est pas triviale, ce qui conclut.

En corollaire, on retrouve que le spectre d'un anneau intègre est connexe : étant intègre, il est réduit et indécomposable (sinon un produit $(1,0) \times (0,1)$ serait nul). Évidemment, on pouvait se passer de cela en se rappelant que le spectre d'un anneau intègre est irréductible.

Donnons à présent une c. n. s. pour l'irréductibilité d'une variété (chacun des points suivants raffine le précédent).

Critères d'irréductibilité.

---

[72] Si $X = U \sqcup V$ pour des ouverts U et V, on a un isomorphisme d'anneaux $\left\{ \begin{array}{ccc} C^0(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(U, \mathbb{R}) \times C^0(V, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (f_{|U}, f_{|V}) \\ u\chi_U + v\chi_V & \longleftarrow & (u, v) \end{array} \right.$.
Supposons réciproquement que $C^0(X, \mathbb{R})$ est isomorphe à un produit d'anneaux $A \times B$. Notons α et β les fonctions correspondant aux éléments $(1,0)$ et $(0,1)$. Alors d'une part la relation $\alpha\beta = 0$ montre que les fermés $\alpha^{-1}(0)$ et $\beta^{-1}(0)$ recouvrent X, d'autre part l'identité $\alpha + \beta = 1$ montre qu'ils sont disjoints

[73] Un anneau est ***indécomposable*** si toute décomposition en produit de deux anneaux est triviale, autrement dit si

$$A \simeq B \times C \implies (B \simeq 0 \text{ ou } C \simeq 0).$$

Cela équivaut à ce qu'il n'y a pas d'idempotent autre que 0 et 1. En effet, si $A \simeq B \times C$, alors les éléments $(1,0)$ et $(0,1)$ sont des idempotents non triviaux ; réciproquement, si i est un idempotent non trivial, on montre (intuité par l'analyse) que $j := 1 - i$ en est aussi un, puis que A est isomorphe au produit $(i) \times (j)$.

1. *le spectre d'un anneau réduit est irréductible ssi cet anneau est intègre ;*
2. *le spectre d'un anneau est irréductible ssi son nilradical est premier ;*
3. *une variété $V(I)$ est irréductible ssi l'idéal $\sqrt{I}$ est premier*[74].

Démonstration.

1. Le sens $\Longleftarrow$ a déjà été vu. Supposons à présent A réduit et $\operatorname{Sp} A$ irréductible. Tout d'abord, $\operatorname{Sp} A$ est non vide, donc A est non nul. Si maintenant un produit ab est nul, réduisant *modulo* un premier $\mathfrak{p}$, il vient $ab(\mathfrak{p}) = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{p} \in V(a) \cup V(b)$, et ceci pour tout point $\mathfrak{p}$ du spectre, d'où $\operatorname{Sp} A = V(a) \cup V(b)$. Par irréductibilité, l'une des variétés $V(a)$ ou $V(b)$ vaut tout le spectre, donc a ou b est nilpotent, *i. e.* nul, *CQFD*.
2. Vu que le spectre ne voit pas les nilpotents ($\operatorname{Sp} A \cong \operatorname{Sp} A_{red}$), on a les équivalences
$$\operatorname{Sp} A \text{ irréductible} \iff \operatorname{Sp} A_{red} \text{ irréductible} \iff A_{red} \text{ intègre} \iff {}^{A}\!\diagup_{\sqrt{0}} \text{ intègre} \iff \sqrt{0} \text{ premier.}$$
3. Vu l'homéomorphisme $V(I) \cong \operatorname{Sp}\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right)$, on a les équivalences
$$\begin{aligned} V(I) \text{ irréductible} &\iff \operatorname{Sp}\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right) \text{ irréductible} \iff \operatorname{NilRad}\left({}^{A}\!\diagup_{I}\right) \text{ premier} \\ &\iff {}^{\sqrt{I}}\!\diagup_{I} \text{ premier} \iff \sqrt{I} \text{ premier.} \end{aligned}$$

Corollaire. Étant donné un élément a d'un anneau factoriel, les équivalences
$$a \text{ irréductible} \iff (a) \text{ premier} \iff V(a) \text{ irréductible}$$
montrent que

dans un anneau factoriel, un élément a est irréductible ssi la variété $V(a)$ l'est.

Exemples.

1. Le spectre de ${}^{\mathbf{Z}}\!\diagup_{91}$ n'est pas irréductible car $91 = 13 \times 7$ n'est pas premier : il se décompose en $\operatorname{Sp}\left({}^{\mathbf{Z}}\!\diagup_{91}\right) \cong V(91) = V(13) \cup V(7)$.
2. La variété $\operatorname{Sp}\left({}^{k[X,Y]}\!\diagup_{XY}\right) \cong V(XY)$ n'est pas irréductible car l'idéal (XY) n'est pas premier (ni X ni Y ne sont dedans) : elle se décompose en $V(X) \cup V(Y)$. Lorsque k est algébriquement clos, les points maximaux de cette variété correspondent à l'union des axes des coordonnées dans le plan $k^2 \cong \operatorname{Sp}_m k[X,Y]$.
3. Soit A un anneau tel que $\operatorname{Sp} A$ soit séparé. Alors, les variétés $V(I)$ sont également séparées, mais pour $I = \mathfrak{p}$ premier elles sont également irréductibles, donc des singletons. Puisque $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence du singleton $\{\mathfrak{p}\}$, on en déduit que tout point est fermé. On retrouve l'implication $T_2 \implies T_1$.
4. Soit A un anneau de spectre irréductible. Puisque $\operatorname{Sp} A = V\left(\sqrt{0}\right)$, le nilradical est premier ; dans ce cas, c'est toujours un point dense vu que $\operatorname{Adh} \sqrt{0} = V\left(\sqrt{0}\right) = \operatorname{Sp} A$. Ainsi, le point générique d'un spectre irréductible est l'unique premier *minimal*. On va généraliser cela dans les spectres noethériens.

6.4 Composantes irréductibles dans un spectre noethérien, spécialisation & généralisation

Vu l'équivalence $V(I) \subset V(J) \iff \sqrt{J} \subset \sqrt{I}$ tenant pour tous idéaux I et J, on voit qu'un spectre est noethérien ssi toute suite croissante d'idéaux *radicaux* stationne. Tout premier étant radical,

le spectre d'un anneau noethérien est noethérien.

[74] Cette proposition peut s'obtenir sans quotient. On dit qu'un idéal est ***irréductible*** s'il n'est pas intersection de deux idéaux strictement plus grands. On peut alors montrer les deux points suivant : l'irréductibilité d'une variété $V(I)$ équivaut à celle de la racine $\sqrt{I}$; un idéal est premier ssi il est réduit et irréductible.

La réciproque est fausse : vu que le spectre ne voit pas les nilpotents, on construit un contre-exemple en tuant une puissance de chaque générateur d'une algèbre de type fini. Si l'on veut un anneau non noethérien, il faut ne pas tuer une infinité de générateurs, par exemple en considérant le quotient ${}^{k[a,b,c,...]}\diagup_{(a^2)+(b^2)+(c^2)+\cdots}$.

? ? ? quid si anneau réduit ? ? ? ? Produit infini est toujours non noeth et de spectre non noth : $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times 0 \times ...m$. DE plus, produit fini noeth ssi tout le monde est noeth (une suite deidéaux produit croit sttt ssi l'une croit) et idem pour les réduit. OPDS A *connexe*. Quid du cas intègre ? ? ? ? ? CF MAIL FORUM

Le spectre d'un anneau noethérien s'écrit donc comme réunion finie de fermés irréductibles. Précisons qu'encore une fois la réciproque est fausse, même s'il n'y a qu'une seule composante irréductible : pour $A := \mathbf{R}[a, b, c, ...]$ l'anneau des polynômes en une infinité d'indéterminées, l'intégrité de A assure l'irréductibilité de $\operatorname{Sp} A$, lequel n'est pas noethérien puisque la suite des fermés élémentaires $V(a) \supset V(ab) \supset V(abc) \supset \cdots$ décroît strictement – une égalité $V(a_1 \cdots a_n) = V(a_0 \cdots a_n)$ implique celle des radicaux correspondant, mais a_0 n'est pas dans le radical de $(a_1 \cdots a_n)$.

Considérons plus généralement la décomposition d'un espace noethérien $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ en composantes irréductibles. Chacune d'elle admet (sous une hypothèse T_0) un unique point générique η_i, d'où une bijection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{\text{points génériques}\} & \cong & \{\text{composants irréductibles}\} \\ \eta_i & \longleftrightarrow & \operatorname{Adh}\{\eta_i\} = X_i \end{array} \right. .$$

Donnons un peu de vocabulaire afin de poursuivre.

Définitions (points générique, générisation, spécialisation).
*Un point d'un espace est dit **générique** lorsque son adhérence est un fermé irréductible maximal.*
*Lorsqu'un point s est limite d'un point g, on dit que g se **spécialise** en s, que s est une **spécialisation** de g, que g est une **générisation** de s ou que g **générise** s. On note alors*

$$g \rightsquigarrow s \overset{\text{déf.}}{\iff} s \in \operatorname{Adh}\{g\}.$$

Avec ce vocabulaire, tout fermé irréductible de la forme $\operatorname{Adh}\{\eta\}$ est l'ensemble des spécialisations de son point générique η et tout point générique est une générisation des points dont il est limite. En particulier, un point générique est son unique générisation et un point fermé est son unique spécialisation. (Le lecteur montrera que tout fermé est stable par spécialisation et que tout ouvert est stable par générisation.)

On dispose d'une application $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \{\text{fermés irréductibles}\} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Adh}\{x\} \end{array} \right.$, qui est injective ssi X est de Kolmogorov (*a fortiori* pour X un spectre) et qui se restreint alors en une injection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{\text{points génériques}\} & \hookrightarrow & \{\text{fermés irréductibles maximaux}\} \\ \eta & \longmapsto & \operatorname{Adh}\{\eta\} \end{array} \right. .$$

Il est par ailleurs clair que la relation $\rightsquigarrow$ de spécialisation est un préordre, qui est un ordre ssi l'espace est de Kolmogorov – en particulier dans les spectres.

Spécialisation dans les spectres. *L'ordre $\rightsquigarrow$ d'un spectre est l'inclusion $\subset$, ou le transporté de l'inclusion inverse de ses fermés, ou encore le transporté de l'injection inverse des corps résiduels :*

$$\mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{s} \iff \mathfrak{g} \subset \mathfrak{s} \iff V(\mathfrak{s}) \subset V(\mathfrak{g}) \iff \kappa(\mathfrak{s}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. Les deux premiers points sont immédiats au vu des équivalences

$$\mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{s} \iff \mathfrak{s} \in \operatorname{Adh}\{\mathfrak{g}\} = V(\mathfrak{g}) \underset{V(\mathfrak{g})}{\overset{\text{def. de}}{\iff}} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{s} \underset{\text{radicaux}}{\overset{\mathfrak{g} \text{ et } \mathfrak{s}}{\iff}} V(\mathfrak{s}) \subset V(\mathfrak{g}).$$

Par ailleurs, d'une part une flèche $\operatorname{Frac} A \hookrightarrow \operatorname{Frac} B$ induite par une flèche $A \longrightarrow B$ entre anneaux intègres est injective ssi la seconde flèche l'est, d'autre part la flèche de réduction ${}^{A}\diagup_{\mathfrak{s}} \longrightarrow {}^{A}\diagup_{\mathfrak{g}}$ est injective ssi $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{s}$, autrement dit ssi $\mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{s}$, ce qui montre l'équivalence avec le caractère bien défini de l'injection canonique $\left\{ \begin{array}{ccc} \kappa(\mathfrak{s}) & \hookrightarrow & \kappa(\mathfrak{g}) \\ \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} & \longmapsto & \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \end{array} \right.$.

Ainsi, si l'on représente un spectre ordonné par $\rightsquigarrow$ (ou $\subset$, c'est pareil), on obtient un arbre dont les feuilles (les éléments maximaux) sont les points fermés et dont les racines (les éléments minimaux) contiennent les points génériques. On verra plus loin que, dans le cas noethérien, les racines sont toutes génériques. ? ? ? ? hauteur de l'arbre est la hauteur de l'anneau : longueur maximal de chaîne strictement croisante d'idéaux premiers ? ? ?

Par exemple, dans un anneau factoriel, l'intégrité assure l'irréductibilité et l'existence d'un point générique, les autres points étant tous fermés : le spectre d'un anneau factoriel peut par conséquent être représenté par un arbre de hauteur 1 ayant une racine (générique) et autant de feuilles que d'irréductibles.

Exemple du trait. On rappelle que le spectre de $k[[t]]$ est formé de deux points, l'idéal nul (0) et l'unique idéal maximal (t). Vu l'inclusion $(0) \subset (t)$, le point $\eta := (0)$ génerise (t), donc est générique et le point (t) est l'unique spécialisation du point générique (autre que $\eta := 0$) – on l'appelle le ***point spécial***. Ainsi, le trait $\operatorname{Sp} k[[t]]$ est formé d'un point générique η et d'un point spécial $\mathfrak{s}$:

$$\operatorname{Sp} k[[t]] = \left\{ \boxed{\eta \rightsquigarrow \boxed{\mathfrak{s}}} \right\} \qquad \text{(les rectangles représentent les ouverts).}$$

Cas d'un anneau intègre. On a vu que le spectre d'un anneau intègre est irréductible, donc son point générique $\eta := 0$ génerise tout le monde. Observer que le corps résiduel $\kappa(\eta)$ est le corps des fractions. Remarquer ainsi au passage ce que deviennent les équivalences sus-prouvées pour le point générique η générisant un point $\mathfrak{p}$ quelconque :

$$\eta \rightsquigarrow \mathfrak{p} \iff \begin{array}{ccccc} \eta \subset \mathfrak{p} & \iff & \kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \kappa(\eta) & \iff & V(\mathfrak{p}) \subset V(\eta) \\ 0 \in \mathfrak{p} & \iff & \kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \operatorname{Frac} A & \iff & V(\mathfrak{p}) \subset \operatorname{Sp} A \end{array}.$$

Par ailleurs, puisque η est dans tout premier $\mathfrak{p}$ fixé, il ne rencontre aucune partie $A \backslash \mathfrak{p}$, donc on peut y évaluer toutes les fractions des $A\left[\frac{1}{A\backslash\mathfrak{p}}\right] = A_{\mathfrak{p}}$ (lesquelles se plongent toutes dans $\kappa(\eta)$) : l'image d'une telle fraction $\frac{a}{s}$ vaudra $\frac{a(\eta)}{s(\eta)} = \frac{\overline{a}}{\overline{s}} = \frac{a}{s}$ (raisonner *modulo* η ne change pas grand-chose), à savoir elle-même. Ainsi, tout comme un polynôme P s'écrit $P(X)$ où X est une variable « générique », toute fraction f d'un anneau intègre s'écrit $f(\eta)$ où η est un point générique du spectre.

(En fait, dans les deux cas, les « écritures » $P = P(X)$ et $f = f(\eta)$ sont des évaluations, des spécialisations[75].)

De la spécialisation et l'évaluation. Dans le cas particulier de la ***droite affine***[76] $\mathbb{A}_k^1 := \operatorname{Sp} k[x]$, en notant $\mathfrak{m}_\lambda$ le point fermé[77] $(x - \lambda)$, le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{m}_\lambda) = {}^{k[x]}\!/_{x-\lambda}$ s'identifie à k *via* l'évaluation en λ. Ainsi, étant donnée une fraction rationnelle $f \in \kappa(\eta)$, toute spécialisation $\eta \rightsquigarrow \mathfrak{m}_\lambda$ induit une « spécialisation » $f \rightsquigarrow f(\lambda)$ (au sens d'évaluation) par spécialisation de la variable.

Même chose dans l'***espace affine*** $\mathbb{A}_k^n := \operatorname{Sp} k[x_1, ..., x_n]$ de dimension n : on peut évaluer/spécialiser une fraction rationnelle de $k(x_1, ..., x_n)$ en un point $x \in k^n$ identifié au point fermé correspondant dans $\mathbb{A}_k^n$.

De la spécialisation. Plus généralement, on peut ***spécialiser*** une fonction $f = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ d'un corps résiduel $\kappa(\mathfrak{g})$ en toute spécialisation de $\mathfrak{g}$ n'annulant pas le dénominateur b :

$$\textit{pour } f \in \kappa(\mathfrak{g}) \textit{ et } \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{s} \textit{ tel que } b(\mathfrak{s}) \neq 0, \textit{ définir } f(\mathfrak{s}) := \frac{a(\mathfrak{s})}{b(\mathfrak{s})} \textit{ dans } \kappa(\mathfrak{s}).$$

On vérifie l'indépendance en les représentants :

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \frac{\overline{a'}}{\overline{b'}} \implies ab' - a'b \in \mathfrak{g} \overset{\mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{s}}{\subset} \mathfrak{s} \implies ab' - a'b \in \mathfrak{s} \implies a(\mathfrak{s})\,b'(\mathfrak{s}) - a'(\mathfrak{s})\,b(\mathfrak{s}) = 0 \implies \frac{a(\mathfrak{s})}{b(\mathfrak{s})} = \frac{a'(\mathfrak{s})}{b'(\mathfrak{s})}.$$

Il est intéressant de noter le cas particulier $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$: en effet, on a alors $f(\mathfrak{g}) = \frac{a(\mathfrak{g})}{b(\mathfrak{g})} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}} = f$ (comme pour un anneau intègre), de sorte que le point $\mathfrak{g}$ peut être vu comme une variable *générique* pouvant se *spécialiser* en n'importe quelle des spécialisations de $\mathfrak{g}$ de l'ouvert $D(I_f)$? ? ?

$$\mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{s} \implies f = f(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow f(\mathfrak{s}).$$

Nous espérons avoir ainsi éclairé la terminologie.

[75] Lorsqu'on *évalue* une fonction f en un point, on donne à la variable une valeur *spéciale*, d'où l'entrecroisement terminologique.

[76] La ***droite affine*** est une généralisation de la droite k identifiée à $\operatorname{Sp} k[X]$ lorsque k est algébriquement clos. Dans le cas contraire, par exemple sur la droite réelle $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, il faut rajouter des points comme $(X^2 + 1)$.

[77] On prendra garde à ne pas confondre l'idéal nul, qui est le point générique $\eta = (0)$ formé du *polynôme* nul, avec le *point* 0 de k, qui est l'idéal maximal $(x - 0) = (x)$ et pour lequel le *scalaire* 0 joue le même rôle que n'importe quel autre.

Cas d'un anneau noethérien. Les composantes irréductibles seront notées $V(\mathfrak{p}_i)$, l'irréductibilité se traduisant par la primalité des idéaux $\mathfrak{p}_i$. Les composantes $V(\mathfrak{p}_i) = \operatorname{Adh}\{\mathfrak{p}_i\}$ étant irréductibles et T_0, elles admettent chacune un unique point générique, à savoir[78] $\mathfrak{p}_i$. L'injection $x \mapsto \operatorname{Adh}\{x\}$ devient donc une bijection

$$\left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Sp} A & \cong & \{\text{fermés irréductibles}\} \\ \mathfrak{p} & \longleftrightarrow & \operatorname{Adh}\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p}) \end{array}\right. .$$

Cette dernière décroissant, la corestreindre aux fermés irréductibles maximaux revient à la restreindre aux premiers *minimaux* :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \{\text{premiers minimaux}\} & \cong & \{\text{composantes irréductibles}\} \\ \mathfrak{p}_i & \longleftrightarrow & \operatorname{Adh}\mathfrak{p}_i = V(\mathfrak{p}_i) \end{array}\right. .$$

On vient ainsi de montrer que

les points génériques d'un spectre noethérien sont les premiers minimaux.

Cette proposition est à rapprocher du fait plus connu :

les points fermés d'un spectre sont les premiers maximaux.

On précise à ce sujet que *toute composante irréductible contient un point fermé* (c'est immédiat[79] vu qu'un idéal premier est inclus dans un maximal).

6.5 Exercices

Remarque. Comme annoncé, déterminer les variétés de $\operatorname{Sp} k[X_1, ..., X_n]$, c'est déterminer les points de $\operatorname{Sp}_m k[X_1, ..., X_n] \cong k^n$.Lien topo Sp_m et Sp ? ? ? il est possible de retrouver $\operatorname{Sp} A$ à partir de $\operatorname{Sp}_m A$ au niveau purement topologique (en ajoutant un point générique à chaque fermé irréductible).

Exemples des matrices
Pour k algébriquement clos, on pose $\mathcal{M}_n := \operatorname{Sp} k[x_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ et $M_n := \operatorname{Sp}_m k[x_{i,j}] \cong k^{n^2}$.
Puisque $k[x_{i,j}]$ dtf, les points fermés sont denses, donc M_n suffit à connaître $\mathcal{M}_n$.
mq GL_n ouvert desnse irrédutible
det est polynôme irréd, donc l'idéal (det) est irréd, donc $GL_n = D(\det)$ est ouvert
mq $M_{\mathrm{rg}=r}$ irréd : fermé ? ouvert ?
mq $M_{\mathrm{rg}=r}$ dense dans $M_{\mathrm{rg}\leq r}$
mq $M_{\mathrm{rg}\leq r}$ fermé
mq les projecteurs $V\left(X^2 - X\right)$ sont $n+1$ composantes connexes, qui sont les composantes irréd.
que signigie "matrice génériqueé ?

Axiomatique : tout espace se plonge-t-il dans un spectre *via*

$$i : \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \operatorname{Sp}_m C^0(X, \mathbf{R}) \\ x & \longmapsto & \mathfrak{m}_x = \operatorname{Ker} \operatorname{eval}_x \end{array} \quad ????$$

Bien définie : les $\mathfrak{m}_x$ sont maximaux car noyau de éval donc $C/\mathfrak{m}_x = \mathbf{R}$ est un corps

Vu que $X \mapsto C^0(X, \mathbf{R})$ ne voit pas la "complète régularisatio", on peut suppose X complètement régulier (ie $T_{\frac{3}{2}}$)

INJ ? Si oui, alors X doit être (comme tout spectre) T_0. Mieux : la relation $i(a) = i(b)$ implique $\forall f \in C(X),\ f(a) = 0 = f(b)$ (les fonctions de $C(X)$ ne distinguent pas les points a et b) : quotienter par cette relation refdonne exactmeent le "complet régularisé" de X.

Si X est T_0 et $T_{\frac{3}{2}}$, alors INJ : supposons $a \neq b$, il y a (T_0) un fermé contenant a et pas b (ou l'inverse), donc $(T_{\frac{3}{2}})$ il y a une fonction s'annulant en a et pas en b, d'où $\mathfrak{m}_a \neq \mathfrak{m}_b$.

[78] Autre vision : $A/\mathfrak{p}_i$ est intègre, donc son idéal nul est générique dans son spectre, ce qui s'exprime *via* la bijection $\operatorname{Sp}\left(A/\mathfrak{p}_i\right) \cong V(\mathfrak{p}_i)$ en disant que le point $\mathfrak{p}_i$ est générique dans $V(\mathfrak{p}_i)$.

[79] mais faux dans un espace topologique en général : n'importe quel espace ayant au moins deux éléments, une fois muni de la topologie grossière, est irréductible et sans points fermés

i fermée/ouverte ? si X $T_{\frac{3}{2}}$, soit $F = V(I)$ un fermé où I idéal de $C^0(X, \mathbf{R})$, soit $\mathfrak{m} \in \mathrm{Sp}_m C^0(X, \mathbf{R})$, on a les équiv

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} \in i(V(I)) &\iff \exists x \in V(I),\ \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \\
&\iff \exists x \in X,\ (\forall f \in I,\ f(x) = 0) \text{ et } (\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x) \\
&\iff \exists x \in X,\ (\forall f \in I,\ f \in \mathfrak{m}_x) \text{ et } \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \\
&\iff \exists x \in X,\ \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \in V_m(I) \\
&\iff \exists \mathfrak{i} \in \mathrm{Im}\, i,\ \mathfrak{m} = \mathfrak{i} \in V_m(I) \\
&\iff \mathfrak{m} \in V_m(I) \cap \mathrm{Im}\, i
\end{aligned}$$

RACCOURCI : on plonge X dans son comapctifé de Stone-Cech βX, d'où $X \hookrightarrow \beta X \cong \mathrm{Sp}_m C^0(\beta X, \mathbf{R})$ avec surj ssi $X \cong \beta X$, ie ? ? ? ?ssi X compact.

Axiomatique bis

Dans les deux cas particuliers algébrique (polynomial) et analytique (compact), on dispose d'une action de l'anneau A sur un espace topologique X donnée par $\left\{ \begin{array}{ccc} A \times X & \longrightarrow & \coprod_{x \in X} A_x \\ (a, x) & \longmapsto & a_x \end{array} \right.$ où les A_x sont des monoïdes additifs et telle que :

1. les fermés de X sont engendrés par les lieux d'annulation $V(a) := \{x \in X\ ;\ a_x = 0\}$ des fonctions $a : x \mapsto a_x$;
2. pour toutes fonctions $a, b \in A$, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} [ab]_x = 0 \iff [a_x = 0 \text{ ou } b_x = 0] \\ a_x = 0 = b_x \implies a_x + b_x = 0 \end{array} \right. ..$$

Les fermés de X sont donc les intersections de certaines parties $V(a) \subset X$ pour a décrivant A soumises aux deux schémas d'axiomes $\left\{ \begin{array}{c} V(a) \cup V(b) = V(ab) \\ V(a) \cap V(b) \subset V(a+b) \end{array} \right.$ pour tous $a, b \in A$.

On va montrer que, sous une hypothèse supplémentaire de séparation[80], un tel espace se plonge dans $\mathrm{Sp}\, A$ muni de la topologie de Zariski que nous avons introduite.

Remarque. Si l'on souhaite que les fermés d'un espace soient engendrés par les lieux d'annulation des éléments d'un certain anneau de fonctions continues[81], il semble difficile de se passer de l'un de ces deux axiomes : les inclusions $V(a) \cap V(b) \subset V(a+b)$ et $V(a) \subset V(\lambda a)$ assurent que la nullité se propagera bien, celle $V(ab) \subset V(a) \cup V(b)$ que l'espace des valeurs prises par nos fonctions possède une bonne propriété d'intégrité.

On se donne un espace X de Kolmogorov dont les fermés sont les intersections de parties $V(a)$ indexées par les éléments a d'un anneau A soumis aux axiomes

$$\forall a, b \in A, \left\{ \begin{array}{c} V(a) \cap V(b) \subset V(a+b) \\ V(a) \cup V(b) = V(ab) \end{array} \right. .$$

Montrons que X est le spectre d'un quotient de A, autrement dit que X se plonge de façon fermée dans $\mathrm{Sp}\, A$.

Puisque les points $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Sp}\, A$ s'obtiennent comme les idéaux $I(\mathfrak{p})$, il est naturel de considérer pour tout $x \in X$ la partie

$$I(x) = I_x := \{a \in A\ ;\ x \in V(a)\}$$

(remarquer la dualité $x \in V(a) \iff a \in I(x)$) et de montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathrm{Sp}\, A \\ x & \longmapsto & I_x \end{array} \right.$ est bien définie, continue, fermée et injective.

1. Les I_x sont des parties *strictes* : d'une part, on a l'équivalence $I_x = A \iff x \in \bigcap_{a \in A} V(a)$, d'autre part, le vide est le plus petit des fermés, donc doit valoir leur intersection.

[80] l'axiome T_0 de séparation de Kolmogorov

[81] la fermeture de leurs lieux d'annulation venant de leur continuité

2. Les I_x sont des idéaux en vertu des deux chaînes d'implications suivantes où a, b, λ sont fixés dans A :

$$\begin{array}{rcl} a, b & \in & I_x \iff x \in V(a) \cap V(b) \subset V(a+b) \implies a+b \in I_x, \\ a & \in & I_x \iff x \in V(a) \subset V(a) \cup V(\lambda) = V(\lambda a) \implies \lambda a \in I_x. \end{array}$$

3. Ils sont par ailleurs premiers :

$$ab \in I_x \iff x \in V(ab) = V(a) \cup V(b) \iff [a \in I_x \text{ ou } b \in I_x].$$

4. L'application $x \mapsto I_x$ est donc bien définie. Puisque qu'elle échange les fermés élémentaires ($x \in V(a) \iff a \in I_x \iff I_x \in V(a)$), elle est continue et fermée.
5. Montrons son injectivité. Une inclusion $I_x \subset I_y$ se réécrit $\forall a \in A,\ x \in V(a) \implies y \in V(a)$, ou encore $\forall I \subset A,\ x \in V(I) \implies y \in V(I)$, ce qui impliquera $y \in \bigcap_{x \in V(I)} V(I) = \operatorname{Adh}\{x\}$. Ainsi, une égalité $I_x = I_y$ implique celle des adhérences $\operatorname{Adh}\{x\} = \operatorname{Adh}\{y\}$, donc celle de x et y puisque X est de Kolmogorov.

7 Idéaux associés

notes à transférer

http ://www.math.polytechnique.fr/~laszlo/dea/2005-2006/dea.pdf
|–> page65*

8 Cohomologie des faisceaux

notes à transférer

Exemple. Résolution injective de $A := \mathbf{C}\left[t, t^{-1}, s, s^{-1}\right]$ (dans la catégorie des A-modules) ?
messagede Mathieu du 25 11 2010 dans maths avancées, réponses de Rémy et surtout de Yves :

J'ai regardé plus précisément ce que ça donne, c'est rigolo. De façon générale, soit A l'anneau des polynômes de Laurent à n variables sur un corps C de caract 0. Soit M un A-module. Alors on peut plonger A comme module dans le A-module injectif $I(M) = \operatorname{Hom}_C(A, M)$ où la structure de A-module est donnée par l'action à gauche.

On peut expliciter ça joliment en interprétant A comme l'algèbre de groupe $C[Z^n]$ (i.e. un A-module est un C-ev muni d'une action linéaire de Z^n) :

On a $I(M) = \operatorname{Hom}_C(A, M) = \operatorname{Hom}_C\left(C^{Z^n}, M\right) = \operatorname{Hom}_C(C, M)^{Z^n}$ (produit non restreint), soit $I(M) = M^{Z^n}$ et si on regarde, on voit que

- la structure de A-module sur $I(M) = M^{Z^n}$ est donnée par l'action de décalage de Z^n sur les coordonnées
- le plongement de M dans $I(M) = M^{Z^n}$ est donné par $m \mapsto (g \mapsto gm)$

Par exemple si $n = 1$ et $M = A$, ce dernier est $P(t) \mapsto \left(\ldots \frac{P(t)}{t}, P(t), tP(t), t^2P(t), \ldots\right)$

Exercice : toujours avec $n = 1$ et M quelconque, montrer directement que $I(M) = M^Z$ est $(1-t)$-divisible (on voit la subtilité de la construction ; attention la structure de A-module sur M^Z donnée plus haut n'**est pas** la structure produit)

Exercice : toujours dans cet exemple et $M = A$ pour fixer les idées, trouver le sous-module de torsion de $I(A) = A^Z$ (supposer si nécessaire d'abord C algébriquement clos).

Par contre je n'arrive pas à voir clairement, même dans ce cas là, ce que sera la clôture injective de A dans $I(A) = A^Z$ (déjà, c'est un C-ev de dimension dénombrable alors que $I(A) = A^Z$ ne l'est pas).

CAtégories abélienne. Origine selon témoignage Mac Lane : l'ouvrage 1952 de Steenrod-Eilenberg définissant l'homologie à valeurs dans les groupes abéliens, Mac Lane voulait généraliser à des objets abéliens (pas forcément groupes)

source Léo COrry *modern algebra and the rise of math strutures* p.359