Un calcul rationnel

Marc SAGE

août 2020

Enoncé. *Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $a \in \mathbf{R}^n$ injectif. Établir l'égalité*

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{1 - a_i a_j}{a_i - a_j} = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

Stratégie : (on notera S la somme de gauche)

1. montrer la constance de S en tant que polynôme évalué en a_n
   (la symétricité de S en les a_i montrant alors que cette somme ne dépendra pas des a_i) ;
2. choisir des a_i judicieux afin de faciliter le calcul de S, attendue valoir $\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Réalisation. La somme S est l'image de a_n par le quotient de polynômes

$$\begin{aligned} f &:= \sum_{i<n} \left(\prod_{j<n}^{j \neq i} \frac{1 - a_i a_j}{a_i - a_j} \right) \frac{1 - a_i X}{a_i - X} \quad + \prod_{j<n} \frac{1 - X a_j}{X - a_j} \qquad \text{(dont nous allons faire apparaître les pôles } a_{j<n}) \\ &= \prod_{j<n} \frac{1}{X - a_j} \left[\sum_{i<n} \left(\prod_{j<n}^{j \neq i} \frac{1 - a_i a_j}{a_i - a_j} \right) (a_i X - 1) \prod_{j<n}^{j \neq i} (X - a_j) \quad + \prod_{j<n} (1 - X a_j) \right]. \end{aligned}$$

Notons P le gros polynôme dans le crochet. La fraction f sera alors constante ssi P est multiple scalaire du produit $\prod_{j<n} (X - a_j)$, çàd (par injectivité[1] de a) ssi P s'annule en a_k pour chaque $k < n$.

Soit donc un tel k : dans l'image $P(a_k)$, le facteur $\prod_{j<n}^{j \neq i} (X - a_j)$ évalué en a_k sera nul dès que $i \neq k$, ce qui réduit la somme $\sum_{i<n}$ au seul terme indexé par $i = k$, à savoir

$$\left(\prod_{j<n}^{j \neq k} \frac{1 - a_k a_j}{a_k - a_j} \right) (a_k a_k - 1) \prod_{j<n}^{j \neq k} (a_k - a_j) = -(1 - a_k a_k) \prod_{j<n}^{j \neq k} (1 - a_k a_j),$$

lequel est l'opposé du dernier terme $\prod_{j<n} (1 - X a_j)$ de P (évalué en a_k), d'où la nullité cherchée.

Pour faciliter le calcul de la somme S, il serait bon de chercher à annuler ses termes, çàd à annuler des facteurs $1 - a_i a_j$, ce qui peut être réalisé dès que a_i admet un inverse parmi les $a_{j \neq i}$, par exemple[2]

$$\text{quand } a \text{ est la suite } \left(2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, ... \right).$$

En résulte la nullité de S quand n est pair. Si n est impair, en rajoutant à la suite ci-dessus un $a_i = 1$, la somme S se réduira au seul produit d'indice i, dont le facteur général vaut $\frac{1 - a_i a_j}{a_i - a_j} = \frac{1 - a_j}{1 - a_j} = 1$, d'où $S = 1$.

(Une variante est d'imposer $a_i := \omega^i$ où ω est une racine $(n+1)$-ième primitive de l'unité[3]. Nous disons « variante » car les a_i forment l'ensemble $\left\{ \omega, \frac{1}{\omega}, \omega^2, \frac{1}{\omega^2}, \omega^3, \frac{1}{\omega^3}, ... \right\}$, lequel contient un -1 isolé ssi $n+1$ est pair, auquel cas le terme-produit correspondant dans la somme S a pour facteur général -1 et vaut donc $(-1)^{n-1} = 1$.)

[1] C'est l'unique endroit où l'on utilisera l'hypothèse d'injectivité, laquelle a donc une utilité *technique* au-delà de simplement donner sens aux inverses $\frac{1}{a_i - a_j}$ pour $i \neq j$.

[2] Pouvait-on simplement imposer $a_{i+1} = \frac{1}{a_i}$? L'injectivité nous obligeait alors à éviter $a_i = 1$ – et surtout les boucles $a_{i+2} = \frac{1}{a_{i+1}} = a_i$! Ces dernières seront évitées en imposant $a_{2i+1} = \frac{1}{a_{2i}}$ et l'injectivité vérifiée avec n'importe quels $a_{2i} \neq 1$ distincts.

[3] Les a_i étant imposés réels, le polynôme P (constant) est un réel. Or pour évaluer P rien ne nous oblige à rester dans $\mathbf{R}$: n'importe quelle extension (de corps) de $\mathbf{R}$ fera l'affaire ! *Sortir du cadre...*