Lorsqu'un étudiant connaît ses formules de trigonométrie, il ne trouve plus miraculeux de reparamétrer tel ou tel problème à l'aide d'un ch ou d'une arctan. Mais a-t-il vraiment le choix du reparamétrage ?

Notre problématique est de décrire les solutions d'équations fonctionnelles dont on connaît déjà des solutions "trigonométriques", à l'instar de $c(2\cdot) = 2c^2 - 1$ ou de $s(2\cdot) = 2ss'$ d'inconnues respectives c et s.

Pour simplifier, **chaque inconnue sera imposée complexe et de domaine la demi-droite $\mathbf{R}_+$.**

Rappel : les solutions de $f(2\cdot) = f^2$ dérivables en 0 sont les exponentielles $e^{c\cdot}$ (pour c décrivant $\mathbf{C}$) et l'application nulle.

Fait 1 : les solutions de l'équation $f(2\cdot) = 2f^2 - 1$ admettant un $DL_2(0)$ sont[1] les cosinus $\operatorname{ch}(c\cdot)$ pour c décrivant $\mathbf{C}$ et la constante $-\frac{1}{2}$.

L'étude générale des solutions (sans hypothèse de DL2) fait intervenir deux systèmes dynamiques, d'itérateurs respectifs $t \mapsto \pm\sqrt{\frac{1+t}{2}}$, dont l'étude est simplifiée par un lemme[2] en lien avec les séries.

Fait 2 : les solutions réelles du système $\begin{cases} f(2\cdot) = 1 - 2g^2 \\ g(2\cdot) = 2fg \end{cases}$ dérivables en 0 telles que $\binom{f(0)}{g(0)} = \binom{1}{0}$ sont[3] les couples $\binom{\cos(r\cdot)}{\sin(r\cdot)}$ pour r décrivant $\mathbf{R}$.

Question ouverte : y a-t-il d'autres solutions sous la seule hypothèse[4] de dérivabilité en 0 ?

Remarque : en notons $F := 2f$, le système ci-dessus équivaut à l'égalité $F(4\cdot) - 2 = [F(2\cdot) - 2] \cdot F^2$ et à la convergence simple du produit $\prod_{n\geq 1} F\left(\frac{\cdot}{2^n}\right)$. Ainsi émerge le système dynamique $a_n = \sqrt{\frac{a_{n-2}-2}{a_{n-1}-2}}$.

[1] Une preuve élémentaire (utilisant la racine carrée principale) consiste à montrer que $f \pm \sqrt{f^2-1}$ est dérivable en 0 (utiliser le DL2) et transforme doubles en carrées.

[2] *Soit r une suite complexe tendant vers 0 et non nulle à partir d'un certain rang, soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $|\lambda| < 1$ et $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \lambda + O(r_n)$. Il y a alors un réel $C > 0$ tel que $|r_n| \sim C|\lambda|^n$.*

[3] *Idée* : montrer la nullité de la différence $\delta := f^2 + g^2 - 1$ (les applications $f \pm ig$ transformeront alors doubles en carrés) en utilisant d'une part l'égalité $\delta(2\cdot) = -g^2\delta$, d'autre part la domination $g(t) = O(t)$ donnée par la majoration $f \leq 1$ et par l'existence de $g'(0)$.

[4] Avec conditions initiales $\binom{f(0)}{g(0)} = \binom{1/2}{1/2}$, si en outre f et g sont DSE en 0, ne restent que les solutions constantes $f = \frac{1}{2} = g$.