Sur l'application de Conway

Marc SAGE

25 septembre 2022

Construire une application $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *par laquelle l'image de chaque intervalle infini est* $\mathbf{R}$ *tout entier.*

(preuve adaptée de *Pour la Science*, n° 535 (mai 2022), rubrique "Logique & calcul", encadré "La fonction divine de CONWAY", p. 85)

Voyons tout d'abord comment remplacer les images imposées ($\mathbf{R}$) par le plus commode segment $[0,1]$.

Soit φ une bijection $[0,1] \widetilde{\longrightarrow} \mathbf{R}$ (possible vu l'équipotence des intervalles infinis). Si l'on construit une application $f : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ par laquelle l'image de chaque intervalle infini inclut $[0,1]$, alors la composée $\varphi \circ f$ conviendra. Avanti !

Soit t un réel dont on considère le développement "trial" (çàd en base 3).

1. Si l'on peut trouver dans ce dernier des "triales" valant 2 aussi loin que voulu, on envoie alors t sur n'importe quoi dans $[0,1]$, eg
$$t \mapsto 0.$$
2. Sinon ce développement est de la forme
$$t = \boxed{\cdots}, \boxed{\cdots} b_1 b_2 b_3 ... \quad (b \text{ comme "}\mathbf{b}\text{it"})$$
où b_1 est *la première* triale < 2 après laquelle CHACUNE est < 2 et l'on envoie alors
$$t \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{2^n}.$$

Le processus ci-dessus définit une application $\mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$. Montrons qu'elle convient.

(*heuristique* : jouer sur les b_n permet d'imposer n'importe quelle image $\in [0,1]$, jouer sur le reste permet de contrôler où tombent les arguments)

Soit I un intervalle infini et soit $t \in [0,1]$. L'existence d'un développement dyadique nous livre une suite b à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que $t = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{2^n}$. Par ailleurs, on peut trouver (par trichotomie, *cf.* détail plus bas) deux naturels E et V (écrits en base 3) tel que

$$\text{chaque réel de la forme } \boxed{E}, \boxed{V} ... \text{ tombe dans } I.$$

En particulier, le réel $\boxed{E}, \boxed{V}\boxed{2} b_1 b_2 b_3 ...$ tombe dans I ; or il a pour image t (grâce au $\boxed{2}$), ce qui conclut.

Détail trichotomique. Soit $i \in \mathring{I}$ (ok par infinitude de I), soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $\left[i, i + \frac{1}{3^{N-1}}\right[\subset I$ (ok par ouverture de $\mathring{I} \subset I$), considérons le développement trial de la somme

$$i + \frac{1}{3^N} = \boxed{E}, t_1 t_2 t_3 ..., \qquad \text{abrégeons } V := t_1 t_2 ... t_N, \qquad \text{puis notons } \tau := \boxed{E}, \boxed{V}$$

la troncature de $i + \frac{1}{3^N}$ au-delà de la N-ième triale. La troncation diminuant d'au plus $\frac{1}{3^N}$,

$$\text{on observera l'encadrement } i \leq \tau \leq i + \frac{1}{3^N}.$$

Chaque réel de la forme $\boxed{E}, \boxed{V} ...$ est alors minoré par $\boxed{E}, \boxed{V} 000 \cdots = \tau \geq i$ et majoré par

$$\boxed{E}, \boxed{V} 222 \cdots = \underbrace{\boxed{E}, \boxed{V}}_{= \tau \leq i + \frac{1}{3^N}} + \frac{1}{3^N} = i + \frac{2}{3^N} < i + \frac{3}{3^N} = i + \frac{1}{3^{N-1}},$$

donc tombe dans $\left[i, i + \frac{1}{3^{N-1}}\right[\subset I$, ce qu'il fallait démontrer.