

Un jeu de triangles (IMO26 Pb4)

Marc SAGE

août 2026

Énoncé. Alice et Bob jouent à un jeu, dépendant d'un réel $\theta \in]0, \pi[$ connu des deux joueuses. Bob commence par imposer un triangle (non applati), appelé T . Ensuite, Alice et Bob répètent les étapes suivantes :

1. si le triangle T a un angle mesurant θ radian, Alice a gagné (et Bob a perdu) ;
2. dans le cas contraire, Alice trace une céviene propre¹ de T et Bob choisit l'un des deux “petits” triangles (non applati) délimités par la céviene, petit triangle qui devient le nouveau T .

Déterminer les paramètres θ pour lesquels Alice a une stratégie gagnante.

Solution proposée. Notons $\mathbb{G} := \mathbf{N}^*\theta$, qualifions ses éléments de **gagnants**² et les autres angles de **nases** ; qualifions ensuite un triangle de **nase** si tous ses angles le sont et de **gagnant** dans le cas contraire.

Lemme 1. Alice peut toujours “forcer” l'apparition d'un angle droit.

Lemme 2. Lorsqu'un angle apparaît, Alice peut forcer l'apparition de chaque diviseur dudit angle³.

Lemme 3. Si un angle $> \theta$ apparaît, alors Alice peut forcer un angle gagnant ou son supplémentaire.

Mort de Bob. Alice a une stratégie gagnante dès que l'angle plat est gagnant.

Survie de Bob. Bob peut toujours choisir un triangle nase si l'angle plat est nase.

Preuve du lemme 1. Tracer la hauteur relative à un sommet d'angle maximal : son pied tombe alors bien sur le côté opposé, les autres sommets comportant des angles aigus.

Preuve du lemme 2. Soit α un angle apparaissant et soit $n \geq 1$ entier. Découper l'angle $\alpha = \frac{\alpha}{n} + (n-1) \frac{\alpha}{n}$ permet de conclure par récurrence, le cas $n = 1$ étant tautologique.

Preuve du lemme 3. Ordonnons les angles du triangle, mettons $a \leq b \leq c$ (l'hypothèse se formulant alors $c > \theta$) et étiquetons ses sommets A, B, C de façon correspondante. Tirons une céviene depuis C : son pied comporte deux angles (supplémentaires), un du côté de A , l'autre de B . Celui du côté de A varie dans l'intervalle $]b, \pi - a[$, qui est de longueur $\pi - a - b = c > \theta$ et doit donc *par continuité* rencontrer $\mathbb{G}$. Un tel angle gagnant (ou son supplémentaire) restera alors dans le petit triangle choisi par Bob.

Victoire d'Alice. Supposons π gagnant et soit $n \geq 2$ entier tel que $\theta = \frac{\pi}{n}$. Commençons par imposer un triangle rectangle (*lemme 1*) : Alice gagnant directement si $n = 2$, imposons $n > 2$. L'angle θ est alors (strictement) aigu, donc l'angle droit du triangle le majore strictement et le *lemme 3* s'applique ; or la partie $\mathbb{G}$ est stable par supplémentaire (car d'une part $\pi \in \mathbb{G}$ et d'autre part chaque différence strictement positive de deux multiples de θ reste dans $\mathbb{G}$), donc Alice peut forcer un angle gagnant et le *lemme 2* permet de conclure.

Survie de Bob. Bob commence par imposer un triangle initial nase, par exemple d'angles $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}, \pi - \theta$ (la nasitude de π assurant celle de $\pi - \theta$), ce qui permet d'amorcer une récurrence. Soit un triangle nase dans lequel Alice trace une céviene. Au pied de cette dernière, l'un des angles (supplémentaires) est nase (sinon leur somme π serait gagnante⁴), appelons-le s : l'angle le plus proche de s dans le grand triangle (appelons-le a) est nase par hypothèse, donc si le 3e angle (appelé α) est nase alors Bob disposera un petit triangle nase. Il reste à regarder le cas où α est gagnant. Montrons alors que l'autre petit triangle est nase :

1. l'angle “symétrique de a par rapport à la céviene” est un angle du grand triangle, donc est déjà nase ;
2. le supplémentaire $\pi - s$ est nase (sinon la différence $(\pi - s) - \alpha = a$ serait gagnante) ;
3. l'angle au sommet adjacent à α est nase (sinon les deux adjacents seraient gagnants et leur somme aussi, or cette somme est un angle du grand triangle nase).

¹ càd une droite passant par un sommet et coupant l'intérieur du segment opposé (elle n'inclut donc aucun côté du triangle)

² ces qualifications sont à prendre du point de vue d'Alice (par ex. l'angle θ est littéralement **gagnant**)

³ En corollaire, Alice pourra gagner dès qu'un angle *multiple* de θ apparaît – la réciproque étant immédiate. Cela motive rétrospectivement l'introduction de la partie $\mathbb{G}$ et permet de reformuler : *Alice gagnera ssi elle peut forcer un triangle gagnant.*

⁴ c'est en ce point – discret mais *précis* – que l'hypothèse apparaît