# Topologie sur les matrices (version quasi-achevée)

Marc SAGE

11 avril 2006

## Table des matières

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les matrices seront toujours prises non vides, *i. e.* dans un $M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$.

Les exercices visent surtout à illustrer la remarquable interaction entre réduction, polynômes, et topologie matricielle. C'est important !

# 1 Continuité du polynôme caractéristique

Soit $n$ un entier naturel non nul. On se place dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{K})$ muni de la norme produit

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}| .$$

L'espace vectoriel normé $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes complexes de degré $\leq n$ sera vu comme un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n+1$ muni de la norme produit.

*Montrer la continuité de la fonction polynôme caractéristique*

$$\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A = \det(XI_n - A) \end{array} \right. .$$

**Solution proposée.**

$\chi$ est continue ssi chacune de ses applications composantes est continue, *i. e.* ssi chacun des coefficients devant les différentes puissances de $X$ dans $\chi_A$ est une fonction continue en les coefficients de $A$. Or, cela est clair car un déterminant n'utilise que des opérations polynomiales (on a plus précisément

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left( \sum_{|I|=k} \det A_I \right) X^{n-k}$$

où $A_I$ est la matrice extraite de $A$ en ne prenant que les termes indicés par une partie $I \subset \{1, ..., n\}$, mais il n'est nul besoin d'établir la formule ci-dessus – dont une preuve se trouve dans les feuilles sur le déterminant et la réduction – pour comprendre ce qui se passe).

# 2 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$

1. *Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.*
2. *En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour deux matrices $A$ et $B$ de $M_n(\mathbb{K})$.*

**Solution proposée.**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On va approcher $A$ par des matrices inversibles. On cherche pour cela à perturber $A$ de sorte que le déterminant de la matrice perturbée soit non nul, et ce pour une perturbation infiniment petite.

   Plus précisément, considérons $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$ pour un $\varepsilon$ tout petit. Le déterminant de $A_\varepsilon$ est un polynôme en $\varepsilon$ sur le corps $\mathbb{K}$, donc admet un nombre fini de racines. Il y a par conséquent un voisinage $\left]-\frac{1}{N}\frac{1}{N}, \right[$ de 0 qui ne contient aucune racine de $P$ (sauf peut-être 0). La suite $\left(A_{\frac{1}{p}}\right)_{p>N}$ est alors dans $GL_n(\mathbb{K})$ et tend clairement vers $A$ :

$$\left\|A_{\frac{1}{p}} - A\right\| = \left\|\frac{1}{p} I_n\right\| = \frac{1}{p} \|I_n\| \longrightarrow 0.$$

2. Le résultat sur les polynômes caractéristiques s'établit aisément si $A$ est inversible :

$$\begin{aligned}\chi_{AB} &= \det\left(XI_n - AB\right) = \det\left[A\left(XA^{-1} - B\right)\right] = (\det A)\det\left(XA^{-1} - B\right) \\ &= \det\left(XA^{-1} - B\right)(\det A) = \det\left[\left(XA^{-1} - B\right)A\right] = \det\left(XI_n - BA\right) = \chi_{BA}.\end{aligned}$$

On conclut en invoquant la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ et la continuité de $\chi$ : soit $(A_n)$ suite de matrices inversibles qui tend vers $A$. On donc $A_nB \longrightarrow AB$, d'où

$$\chi_{AB} = \lim \chi_{A_nB} = \lim \chi_{BA_n} = \chi_{BA}.$$

# 3 Densité de $GL_n(\mathbb{Q})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$

*Montrer que $GL_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $GL_n(\mathbb{R})$.*

**Solution proposée.**
Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ que l'on cherche à approcher par des matrices inversibles rationnelles. On considère pour cela une matrice de perturbation $\varepsilon$ à choisir convenablement. Puisque $\det P \neq 0$, et par continuité du déterminant, pour $\varepsilon$ assez petit la matrice $P + \varepsilon$ est inversible. Il suffit ensuite de prendre les $\varepsilon_{i,j}$ de sorte que les $p_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$ soient rationnels, ce qui est toujours possible par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

# 4 Densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

1. *Montrer que les matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ sont denses.*
2. *Qu'en est-il du cas réel ?*

**Solution proposée.**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Quitte à la trigonaliser, on peut la supposer de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$. On va perturber la diagonale pour que les nouvelles valeurs propres soient distinctes, ce qui est un critère bien connu de diagonalisabilité.

Plus précisément, fixons-nous un entier $p$ qui va servir à borner la perturbation par $\frac{1}{p}$. On construit de proche en proche des réels $\varepsilon_1^{(p)}, ..., \varepsilon_n^{(p)}$ de la manière suivante : on prend $\varepsilon_1^{(p)} = \frac{1}{p}$, puis en supposant posés $\varepsilon_1^{(p)}, ..., \varepsilon_{k<n}^{(p)}$, on prend un $0 \leq \varepsilon_{k+1}^{(p)} < \frac{1}{p}$ distincts des $k$ valeurs $\lambda_i + \varepsilon_i^{(p)} - \lambda_{k+1}$ pour $i = 1, ..., k$. Ainsi, la matrice

$$A_p = A + \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

a toutes ses valeurs propres $\lambda_i + \varepsilon_i^{(p)}$ distinctes par construction des $\varepsilon_i^{(p)}$, donc est diagonalisable. Comme de plus

$$\|A_p - A\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n^{(p)} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \left|\varepsilon_i^{(p)}\right| \leq \frac{1}{p} \longrightarrow 0,$$

la suite $(A_p)$ tend vers $A$. Ceci conclut la démonstration.

2. Le résultat tombe en défaut dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit en effet $A$ une matrice $2\times 2$ compagnon d'un polynôme caractéristique sans racines réelles, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ compagnon de $X^2+1$. En notant $\delta_M$ le discriminant du polynôme caractéristique d'une matrice $M$, qui s'exprime par

$$\begin{aligned}\delta_{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} &= \operatorname{disc}\begin{vmatrix} X-a & -c \\ -b & X-d \end{vmatrix} = \operatorname{disc}\left[X^2-(a+d)X+ad-bc\right] = (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ \delta_M &= (\operatorname{tr} M)^2 - 4\det M\end{aligned}$$

et qui est donc continu, on a $\delta_A < 0$ ; si $A$ s'approchait par des matrices $D_k$ diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$, $\chi_{D_k}$ serait scindé (dans $\mathbb{R}$), donc $\delta_{D_k}$ serait positif, et par continuité on aurait $\delta_A \geq 0$, *absurde.*

# 5 Cayley-Hamilton par la densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

*Soit $A$ une matrice complexe diagonalisable. Montrer que $\chi_A(A) = 0$. Généraliser le résultat à toute matrice complexe.*

**Solution proposée.**
Soit $A$ une telle matrice. On peut écrire

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix}P^{-1},$$

de sorte que $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ et donc

$$\chi_A(A) = \prod_{i=1}^{n}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} - \lambda_i\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right] = \prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_{i-1}-\lambda_i & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_{i+1}-\lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

car un zéro apparaît dans chaque produit formant un coefficient diagonal.

On peut aussi dire que, pour $x$ vecteur propre tel que $Ax = \lambda x$, le polynôme $\prod_{\mu\in\operatorname{Sp} A}(X-\mu)$ annule $A$ en $x$ puisqu'il vaut $\prod_{\mu\neq\lambda}(A-\mu)$ évalué en $Ax-\lambda x = 0$. Ainsi, $\prod_{\mu\in\operatorname{Sp} A}(A-\mu)$ est nul sur tous les sous-espaces propres de $A$, donc est nul partout.

Remarquer que l'on n'utilise nullement ici les propriétés topologiques de $\mathbb{C}$, le résultat est valable sur un corps quelconque.

Soit maintenant $A$ quelconque dans $M_n(\mathbb{C})$. On sait que l'on peut l'approcher par une suite de matrices diagonalisables :

$$A = \lim D_k$$

où chaque $D_k$ vérifie par ce qui précéde

$$\chi_{D_k}(D_k) = 0.$$

Puisque $\left\{\begin{array}{l} \chi_{D_k} \longrightarrow \chi_A \\ D_k \longrightarrow A \end{array}\right.$, un exercice classique[1] affirme que $\chi_{D_k}(D_k) \longrightarrow \chi_A(A)$, d'où $\chi_A(A) = 0$ par unicité de la limite.

[1] *cf.* exercice 4 de la feuille sur les evn

## 6 La norme $|||\cdot|||_{p,q}$ est d'algèbre ssi $p \leq 2$, *i. e.* ssi $p \leq q$

? ? ? ? ? ?

=> La norme de $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vaut $2^{\frac{2}{p}}$ ; or $\frac{A}{2}$ est un projecteur, donc $\|A\| \geq 2$, d'où $\frac{2}{p} \geq 1$

<= Soit $\|X\|_q = 1$. On regarde

$$\|ABX\|_p \leq |||A|||_{p,q} \|BX\|_q .$$

Or, $\frac{p}{q} \leq 1$, donc $\cdot^{\frac{p}{q}}$ concave, donc sous-additive, d'où

$$\|BX\|_q = \sqrt[q]{\sum_i \left| \sum_j b_{i,j} x_j \right|^q} \leq \sqrt[p]{\sum_i \left| \sum_j b_{i,j} x_j \right|^p} = \|BX\|_p \leq |||B|||_{p,q} , \textit{ CQFD.}$$

## 7 Frontière de $SL_n(\mathbb{K})$

*Calculer dans $M_n(\mathbb{K})$ la frontière*[2] *de*

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \ ; \ \det A = 1\} .$$

**Solution proposée.**

En écrivant $SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$, on voit que $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé par continuité du déterminant, d'où $\overline{SL_n(\mathbb{K})} = SL_n(\mathbb{K})$.

Montrons à présent que $SL_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide. Soit par l'absurde $A_0$ dans cet intérieur ; on peut trouver une boule $\mathcal{B} := A_0 + r_0\mathbb{B}$ qui reste dans $SL_n(\mathbb{K})$. La matrice $A_t := A_0 + tA_0$ est alors dans $\mathcal{B}$ pour $t < \frac{r_0}{\|A_0\|}$ ($\|A_0\|$ est non nul car $\det A_0 = 1$), donc le polynôme $\det(A_t) - 1$ possède une infinité de racines, d'où $\det(A_t) = 1$ pour tout $t$, en particulier pour $t = -1$, d'où $1 = \det(A_0 - A_0) = 0$, *absurde.*

Il en résulte que $SL_n(\mathbb{K})$ est égal à sa frontière.

## 8 Normes invariantes par les symétries hyperplanes

? ? ? ? ? *Une norme sur $R^n$ sera dit absolue si elle est invariante par les symétries $x_i \mapsto -x_i$.*

*Montrer qu'une norme absolue est monotone pour l'ordre produit. ($t \mapsto N(tx_1, x_2, ..., x_n)$ est paire et convexe).*

*CNS sur $A \in M_n(R)$ pour que $\|A\cdot\|_2$ soit absolue ?*

on veut $\sum_i \left(\sum a_{i,j} x_j\right)^2 = \sum_i \left(\sum a_{i,j} |x_j|\right)^2$. Pour $x_k - x_l$, on trouve $\sum_i (a_{i,k} - a_{i,l})^2 = \sum_i (a_{i,k} + a_{i,l})^2$, d'où $\sum_i a_{i,k} a_{i,l} = 0$, et ce $\forall k, l$, donc les colonnes de $A$ sont orthogonales. Réciproquement, on a

$$\sum_i \left( \sum_j a_{i,j} x_j \right)^2 = \sum_i \sum_{k,l} a_{i,k} a_{i,l} x_k x_l = \sum_{k,l} \left( \sum_i a_{i,k} a_{i,l} \right) x_k x_l = \sum_j \|C_j\|^2 x_j^2$$

qui est bien absolue (c'est une norme euclidienne pondérée).

[2] *On appelle* frontière *d'une partie $A$ d'un evn la partie*

$$\mathrm{Fr}\, A := \overline{A} \backslash \mathring{A} := \partial A.$$

## 9 Croissance locale du rang

1. *Montrer que la fonction « rang » est localement croissante sur $M_n(\mathbb{K})$ :*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \exists r > 0,\ \|M - A\| < r \implies \operatorname{rg} M \geq \operatorname{rg} A.$$

2. *En déduire que, si une suite de matrices $A_k$ converge vers une matrice $A$, alors* $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A_k$ *pour $k$ assez grand.*

**Solution proposée.**

1. Soit $A$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ et $r$ son rang. Il existe une matrice extraite $P$ inversible de taille $\geq r$, donc de déterminant $\delta_A$ non nul. Il existe alors un voisinage de $A$ où $\delta_A$ (qui est continu en $A$ car polynomial en ses coefficients) est non nul, de sorte que, pour toute matrice $M$ dans ce voisinage, la matrice extraite de $M$ à la même place que $P$ a un détermimant $\delta_M$ non nul, d'où $\operatorname{rg} M \geq p$, *CQFD.*
2. Pour $k$ assez grand, $A_k$ tombera dans un voisinage de $A$ donné par la question précédente, d'où le résultat.

## 10 Matrices de rang $\leq r$

Soit $1 \leq r \leq n$. On se place dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. *Montrer que les matrices de rang $\leq r$ forment un ensemble fermé.*
2. *En déduire l'adhérence des matrices de rang exactement $r$.*

**Solution proposée.**

1. Soit $(A_k)$ une suite de matrices de rang $r$ convergeant vers une matrice $A$. L'exercice précédent montre que $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A_k \leq r$, *CQFD.*
2. Soit $\left\{ \begin{array}{l} R_r := \{A \in M_n(\mathbb{K})\,;\ \operatorname{rg} A = r\} \\ R_r^- := \{A \in M_n(\mathbb{K})\,;\ \operatorname{rg} A \leq r\} \end{array} \right.$. $R_r^-$ contient $R_r$ et est fermé par ce qui précède, donc $\overline{R_r} \subset \overline{R_r^-} = R_r^-$. Montrons l'inclusion réciproque $R_r^- \subset \overline{R_r}$.

Soit $A \in R_r^-$, que l'on écrit $A = P \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ avec $P$ et $Q$ inversibles et $r' \leq r$. On perturbe la diagonale pour obtenir un rang égal à $r$, en posant par exemple $A_k = P \begin{pmatrix} I_{r'} & & \\ & \frac{1}{k} I_{r-r'} & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q$, de sorte que $(A_k)$ est une suite dans $R_r$ qui tend vers $A$ et donc $A \in \overline{R_r}$.

On a ainsi prouvé que

$$\overline{\{A \in M_n(\mathbb{K})\ ;\ \operatorname{rg} A = r\}} = \{A \in M_n(\mathbb{K})\ ;\ \operatorname{rg} A \leq r\}.$$

## 11 Topologie des projecteurs

Pour $n \geq 1$, on note $P_n$ l'ensemble des projecteurs de $M_n(\mathbb{K})$.

*Calculer l'adhérence, l'intérieur et le nombre de composantes connexes (par arcs) de $P_n$.*
*Donner une CNS pour que $P_n$ soit compact.*

**Solution proposée.**
$P_n$ est la préimage du fermé $\{0\}$ par l'application continue $A \mapsto A^2 - A$, donc est fermé.

Pour $n=1$, les projecteurs de $M_n$ s'identifient aux scalaires $\lambda$ tels que $\lambda^2=\lambda$. On obtient $P_1=\{0,1\}$ qui est compact, d'intérieur vide, avec 2 composante connexes.

Pour $n\geq 2$, on a des projecteurs $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ & 1 \end{pmatrix}$ où $\lambda$ est quelconque, donc $P_n$ n'est pas borné, *a fortiori* non compact.

Par conséquent, $P_n$ est compact ssi $n=1$.

Montrons que l'intérieur est vide. Lorsque l'on perturbe un projecteur $p$ par un scalaire $\varepsilon$, on peut regarder si $p+\varepsilon$ est encore un projecteur :

$$(p+\varepsilon)^2 = p^2+2\varepsilon p+\varepsilon^2 = (1+2\varepsilon)\,p+\varepsilon^2$$

Ce dernier vaudra $p+\varepsilon$ ssi $2\varepsilon p+\varepsilon^2=\varepsilon$, *i. e.* ssi $p=\frac{1-\varepsilon}{2}$ ; or les seuls projecteurs scalaires sont 0 et l'identité ; il suffit de choisir $\varepsilon$ pour que $\frac{1-\varepsilon}{2}\notin\{0,1\}$ afin de conclure à une impossibilité.

Regardons à présent les composantes connexes. Soient $p$ et $q$ deux projecteurs situés dans une même composante connexe par arcs. Il y a donc un chemin $\gamma$ continu dans $P_n$ allant de $p$ à $q$. L'applicatio vers ? ? ? ? ?

Un projecteur est toujours semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est son rang. Par ailleurs, on sait que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. On en déduit (pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) que deux projecteurs de même rang appartiennent à la même composante connexe par arcs. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, il faut un peu ruser : $GL_n^+(\mathbb{R})$ est bien cpa, et si deux projecteurs de même rang ont une matrice de passage dans $GL_n^-(R)$ on conjugue les projecteur par $Diag\,(0,...,0,-1)$, ce qui ne change pas les proj mais change le det $>0$ :-)

## 12 Sur les matrices racines de l'identité

*Soit $q\geq 1$ un entier et $\mu_q=\{A\in M_n(\mathbb{C})\ ;\ A^q=I_n\}$. Montrer que le spectre est localement constant sur $\mu_q$ :*

$$\forall A\in\mu_q,\ \exists\varepsilon>0,\ \forall M\in\mu_q,\ \|M-A\|<\varepsilon\implies \operatorname{Sp} M=\operatorname{Sp} A.$$

**Solution proposée.**

Soit $A\in\mu_q$ et supposons par l'absurde que pour tout $\varepsilon>0$ il y a une matrice $A_\varepsilon$ de $\mu_q$ dans la boule $A+\varepsilon\mathbb{B}$ telle que $\operatorname{Sp} A_\varepsilon\neq\operatorname{Sp} A$. En prenant $\varepsilon=\frac{1}{n}$, on obtient une suite $(A_n)$ dans $\mu_q$ qui tend vers $A$. Les $A_n$ étant annulées par le polynôme $X^q-1$ scindé simple, elles sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ de spectre inclus dans l'ensemble $\mu_q$ des racines $q$-ièmes de l'unité, mettons $A_n=P_nD_nP_n^{-1}$ où les $D_n$ sont à valeurs dans $\mu_q$. Les $D_n$ sont donc en nombre fini (chaque coefficient de la diagonale ne peut prendre qu'au plus $q$ valeurs), donc on peut en extraire une sous-suite stationnaire $D_{\varphi(n)}=D$. En utilisant la continuité du polynôme caractéristique (dont les racines forment le spectre), on trouve

$$\chi_D=\chi_{D_{\varphi(n)}}=\chi_{A_{\varphi(n)}}\longrightarrow\chi_A,$$

de sorte que $\chi_{A_{\varphi(n)}}$ est constamment égal sa limite $\chi_A$, d'où l'égalité des spectres $\operatorname{Sp} A_{\varphi(n)}=\operatorname{Sp} A$, qui est *absurde* vues les hypothèses sur la suite $(A_n)$.

## 13 Sur les matrices racines de l'identité (bis)

*Déterminer l'adhérence dans $M_n(\mathbb{C})$ des matrices dont une puissance $\geq 1$ vaut l'identité.*

**Solution proposée.**

Pour $n=1$, il s'agit de déterminer l'adhérence de toutes les racines de l'unité. Vu que $2\pi\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout complexe unitaire s'approche par un complexe unitaire d'argument $\in 2\pi\mathbb{Q}$. L'adhérence cherchée est donc tout le cercle unité.

Dans le cas général, on va trouver toutes les matrices de spectre inclus dans le cercle unité. En effet, d'une part ce dernier est fermé par continuité du polynôme caractéristique (donc contient l'adhérence cherchée), d'autre part tout $n$-uplet de complexes unitaires s'approche par un $n$-uplet de racines de l'unité (on utilise $n$ fois le résultat pour $n=1$).

# 14 Les suites et les hirondelles

Soit $A$ une matrice complexe dont le spectre est disjoint du disque unité fermé.
On se donne une suite $(a_n)$ de $\mathbb{C}^k$ bornée et une extractrice $\varphi$ telles que $a_{\varphi(n)} - Aa_n$ converge.

*Montrer que $(a_n)$ converge et donner sa limite.*
*Que se passe-t-il si la suite $(a_n)$ n'est plus supposée bornée ?*

**Solution proposée.**
Maître Randé s'exclamait un jour en cour Molière :

« La compacité appelle les suites extraites
tout comme le printemps appelle les hirondelles ».

Que voit-on : une suite bornée ? Pas d'hésitation, on extrait une sous-suite convergente. En notant $l_0$ la limite de cette dernière et $\alpha$ la limite de $a_{\varphi(n)} - Aa_n$, on obtient ainsi une nouvelle valeur d'adhérence $l_1 := Al_0 + \alpha$. En itérant le procédé, on construit une suite $(l_n)$ de valeurs d'adhérence vérifiant $l_{n+1} = Al_n + \alpha$.

Pour $k = 1$, on obtient une suite arithmético-géométrique que l'on sait expliciter. Essayons de calquer la méthode pour le cas général. Cherchons un point fixe $x$ tel que $x = Ax + \alpha$, ce qui équivaut à $(A - 1)\,x = \alpha$. Il suffirait pour obtenir $x$ que la matrice $A - 1$ soit inversible, *i. e.* que 1 ne soit pas valeur propre, mais cela est vrai par hypothèse. On peut donc définir $x := [A - 1]^{-1}(\alpha)$. Soustrayant $x = Ax + \alpha$ de la relation $l_{n+1} = Al_n + \alpha$, il vient $l_{n+1} - x = A\,(l_n - x)$, d'où

$$l_n = A^n\,(l_0 - x) + x.$$

C'est le moment de se souvenir que, puisque $(a_n)$ est bornée, $(l_n)$ l'est aussi. En admettant un instant que l'hypothèse sur le spectre de $A$ implique l'énoncé

$$\forall X \in \mathbb{C}^k,\ (A^n X) \text{ bornée} \iff X = 0,$$

nous obtenons $l_0 = x$. Finalement, nous avons montré que la seule valeur d'dhérence de $(a_n)$ est $x$.

Si $a_n$ ne convergeait pas vers ce $x$, on pourrait extraire une sous-suite $a_{\psi(n)}$ et trouver un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall n,\ \left\|a_{\psi(n)} - x\right\| > \varepsilon_0.$$

Mais $a_{\psi(n)}$ étant bornée, on pourrait en extraire une sous-suite (donc extraite de $(a_n)$) convergente, nécessairement vers $x$ par ce qui précède, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus pour $n$ assez grand.

Montrons le résultat annoncé. Soit $X$ un vecteur tel que $(A^n X)$ soit bornée. Pour faire apparaître le spectre de $A$, on la trigonalise $A = PTP^{-1}$, de sorte que la suite $(T^n Y)$ avec $X = PY$ reste bornée. Si $X$ était non nul, $Y$ serait aussi non nul, donc admettrait une coordonnée $y_i \neq 0$ avec $i$ maximal ; la $i$-ième coordonnée de $T^n Y$ vaudrait alors $\lambda^n x_i$ avec $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, donc ne serait pas bornée puisque $|\lambda| > 1$, d'où la contradiction.

Sans l'hypothèse de bornitude, on peut trouver un contre-exemple. Pour faire simple, on essaie de réaliser l'hypothèse « $a_{\varphi(n)} - Aa_n$ converge » sous la forme $a_{\varphi(n)} = Aa_n$ et on prend 0 pour les autre $a_m$. Pour y parvenir, on pose $u_{\varphi^{\circ p}(0)} := A^p u_0$ pour tout $p \geq 0$ (avec $u_0$ vecteur non nul) et $u_m = 0$ pour les autres $a_m$. Vérifions la relation $a_{\varphi(n)} \overset{?}{=} Aa_n$ : si $n$ est de la forme $\varphi^{\circ p}(0)$, on veut $a_{\varphi^{p+1}(0)} \overset{?}{=} Aa_{\varphi^p(0)}$, *i. e.* $A^{p+1}u_0 \overset{?}{=} AA^p u_0$, ce qui est vrai ; sinon $\varphi(n)$ n'est pas non plus (par injectivité de $\varphi$) de la forme $\varphi^{\circ p}(0)$, donc l'égalité voulue devient $0 \overset{?}{=} 0$.

**Remarque.** Cet exercice est une généralisation naturelle de l'énoncé suivant[3] : *montrer qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n + \frac{u_{2n}}{2} \longrightarrow 1$ converge et donner sa limite.*

# 15 Les cycliques forment un ouvert connexe dense

On rappelle qu'un endomorphisme $u$ d'un $\mathbb{K}$-ev $E$ de dimension finie $n \geq 1$ est dit *cyclique* s'il y a un vecteur $x \in E$ dont les $n$ premiers termes de l'orbite selon l'action de $u$ forment une base, *i. e.* tel que $\left(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ soit libre.

On donne deux résultats[4] de la théorie de Frobenius :

[3] que l'on trouvera dans la feuille sur les suites réelles
[4] *cf.* cours sur la réduction de Frobenius

1. *tout endomorphisme sur un ev non nul s'écrit comme somme directe d'un cyclique sur un sev non nul plus autre chose ;*
2. *un endomorphisme est cyclique ssi le degré de son polynôme minimal vaut la dimension de l'ev sous-jacent.*

*Montrer que les endomorphismes cycliques forment un ouvert connexe dense*

*(On pourra montrer pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ que les endomorphismes de polynôme caractéristique scindé simple sont cycliques.)*

**Solution proposée.**

1. La condition « $\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ libre » peut se réécrire sous la forme $\det_{\mathcal{B}}\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right) \neq 0$ où $\mathcal{B}$ est une base arbitraire de $E$, ce qui est une condition continue en les coordonnées de la matrice de $u$. Le déterminant ci-dessus restera donc non nul pour une petite perturbation de $u$, ce qui montre que les endomorphismes cycliques forment un ensemble ouvert.
2. Quant à la connexité, il s'agit de remarquer que la matrice de $u$ dans la base $\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ s'écrit sous la forme $C := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ où $\overrightarrow{a} \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur de scalaires, d'où
$$\operatorname*{Mat}_{B} u = PCP^{-1}$$
où $P$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ de référence à la base cyclique. Réciproquement, s'il y a un vecteur $\overrightarrow{a} \in \mathbb{K}^n$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{Mat}_B\, u = PCP^{-1}$, $P$ peut s'interpréter comme la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{X} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1})$, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{X}}\, u = C$, ce qui montre en lisant $C$ que $x_i = u(x_{i-1})$ pour tout $i = 1, ..., n-1$, d'où une base cyclique pour $u$ engendrée par le vecteur $x_0$.

   Par conséquent, les endomorphismes cycliques sont exactement l'image de la composée
$$\left\{\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ (P, a) & \longmapsto & P \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \end{array}\right. \circ \left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u & \longmapsto & u \end{array}\right. .$$
   L'ensemble de départ étant connexe ($SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par des transvections que l'on envoie chacune continûment sur l'identité en étouffant leur coefficient hors diagonale ? ? ?+dilatations pour $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ? ? ? ?) et l'application considérée continue, l'image reste connexe, *CQFD.*

   ? ? ? ? POur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, passer par le cyclique $C$ de poly car $X^n - 1$, il commute avec $\Gamma := \frac{1}{2} - C$ qui est de dét <0, donc $PCP^{-1} = (P\Gamma) C (P\Gamma)^{-1}$ pour chq $P \in GL_n$, puis passer de $C$ à n'importe quel autre matrice compagn ? ? ? ?
3. Pour la densité, suivons l'énoncé. L'intérêt est que tout endomorphisme diagonalisable est approchable par des endomorphismes à polynôme caractéristique scindé simple (il suffit de perturber les valeurs propres pour les rendre distinctes), ce qui conculera dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ au vu de l'exercice 4.

   Soit donc $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres pour $u$ dont on note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres respectivement associées. Il faut exhiber un vecteur cyclique pour $u$. Il est raisonnable d'essayer d'en créer un à partir des $e_i$. Comme ces derniers sont symétriques, il vaut mieux prendre une expression symétrique, par exemple la somme $x := e_1 + \cdots + e_n$. Une récurrence immédiate montre que $u^k x = \lambda_1^k e_1 + \cdots + \lambda_n^k e_n$, d'où la matrice de la famille $\left(x, ux, ..., u^{n-1}x\right)$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ : c'est un Vandermonde, inversible par hypothèse sur les $\lambda_i$, ce qui montre que la famille $\left(x, ux, ..., u^{n-1}x\right)$ dont on lit les coordonnées dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est libre, *CQFD.*

   Dans le cas général, on va raisonner par récurrence sur $n \geq 1$ en s'aidant du premier résultat donné. En dimension 1, tout endomorphisme est cyclique. Considérons à présent un endomorphisme $u$ d'un ev de dimension $n \geq 2$ (le résultat étant supposé pour $n-1$) et un $\varepsilon > 0$. Le rappel nous permet d'écrire $u \sim \begin{pmatrix} C & \\ & M \end{pmatrix}$ avec $C$ cyclique. Si $M$ est vide, on a terminé ; sinon, $M$ est approchable par un cyclique, mettons $M = C' + \varepsilon$ avec $C'$ cyclique, de sorte que $u$ est approché par $\begin{pmatrix} C & \\ & C' \end{pmatrix}$ à moins de $\varepsilon$ près[5].

[5] L'erreur vaut $\begin{pmatrix} 0 & \\ & \varepsilon \end{pmatrix}$ : considérer la norme infinie.

Maintenant, puisque $\mu_u = \text{ppcm}\{\mu_C, \mu_{C'}\}$, en invoquant le second résultat donné, l'endomorphisme $u$ sera cyclique ssi le degré de $\text{ppcm}\{\mu_C, \mu_{C'}\}$ vaut $n = \deg \mu_C + \deg \mu_{C'} = \deg \mu_C \mu_{C'}$, autrement dit ssi $\mu_C$ et $\mu_{C'}$ ont pour ppcm leur produit, ce qui revient à la primalité relative de $\mu_C$ et $\mu_{C'}$. Pour s'assurer de cela, on va perturber $\mu_C$ en perturbant son coefficient constant dans la matrice $C$ par un réel $\delta$ tel que $0 < \delta < \varepsilon$. Si par l'absurde ce n'était pas possible, on aurait une application de $]0, \varepsilon[$ dans l'ensemble des diviseurs (unitaires) de $C'$, injective, contradiction. ? ?bien finir rédaction ? ? ?..

# 16 Intérieur et adhérence des matrices diagonalisables

*Déterminer l'adhérence, l'intérieur, et la frontière des matrices diagonalisables sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
*On pourra utiliser la continuité des racines telle qu'elle énoncée dans la feuille 2 sur les polynômes.*

**Solution proposée.**

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'adhérence est connue (cf. exercice 4). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $A$ limite de matrices $D_k$ diagonalisables. $\chi_{D_k}$ est alors scindé pour tout $n$, donc sa limite $\chi_A$ l'est aussi (chaque racine complexe $\lambda$ de $\chi_A$ est approchable par une suite de $\lambda_k$ racine de $\chi_{D_k}$, mais les $\lambda_k$ étant réelles il en est de même pour $\lambda$), ce qui montre que $A$ est trigonalisable. Réciproquement, on fait comme le cas complexe en perturbant la diagonale pour avoir $n$ valeurs propres distinctes.

   Finalement, l'adhérence des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables. On retrouve le fait (remarqué dans un cas particulier lors de l'exercice 4) que les matrices réelles dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé (par exemple $X^2 + 1$) ne sont pas approchables pas des matrices diagonalisables.

2. Soit à présent $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \operatorname{Id} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \operatorname{Id} \end{pmatrix} P^{-1}$ dans l'intérieur des diagonalisables. Il est bon de se souvenir de l'argument montrant pourquoi la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable : son spectre $\{\lambda\}$ se lit sur la diagonale, donc la réduite diagonale ne peut être que $\lambda I_2$, d'où $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} = P\lambda P^{-1} = \lambda I_2$ : *contradiction*. Ainsi, s'il y a une valeur propre multiple, en perturbant par un $\varepsilon$ au-dessus de la diagonale, on a un matrice extraite de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ & \lambda \end{pmatrix}$ qui doit rester diagonalisable, ce qui est *absurde* par ce qui précède. Par conséquent, $\chi_A$ est scindé simple.

   Montrons réciproquement que cela est suffisant pour être dans l'intérieur. Soit $D$ une telle matrice : $\chi_D$ est alors scindé simple. En perturbant $D$, on perturbe $\chi_D$ (continuité de $\chi$), et on peut raisonnablement espérer qu'une petite perturbation des coefficients de $\chi_D$ ne va pas trop faire bouger ses racines, ce qui donnera encore un polynôme scindé simple (et donc une matrice diagonalisable).

   Montrons cela par l'absurde, à savoir qu'une limite de scindés multiples (dans $\mathbb{C}$) ne peut être scindée simple. Soit $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ le polynôme limite, supposé scindé simple, et $P_k = \left(X - \lambda_1^{(k)}\right) \cdots \left(X - \lambda_n^{(k)}\right)$ les approximations de $P$ avec $\lambda_i^{(k)} \longrightarrow \lambda_i$ pour tout $i$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on aura pour $k$ assez grand $\left|\lambda_i^{(k)} - \lambda_i\right| < \varepsilon$ pour tout $i$, et il s'agit de choisir $\varepsilon$ pour que $\lambda_1^{(k)}, ..., \lambda_n^{(k)}$ n'aient aucune chance de se rencontrer ; ce sera le cas si les boules $\lambda_i + \varepsilon\mathbb{B}$ sont deux à deux disjointes, et il suffit pour cela de prendre $\varepsilon < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$.

   Finalement, l'intérieur des matrices diagonalisables est formé des matrices (diagonalisables) dont toutes les valeurs propres sont simples.

3. Pour répondre à la question, la frontière des diagonalisables s'obtient en prenant les trigonalisables ayant au moins une valeur propre multiple.

RQ ? ? ? la partie $\Gamma$ formée des matrices diagonalisables à spectre simple contient chaque cyclique (n vp => poly min = poly car) et est dense (on vient de le faire), donc $\Gamma \subset$cycliques$\subset \overline{\Gamma}$ où $\Gamma$ connexe (evoyer GL_n sur I_n puisque chaque coef diag sur un de référence, eg diag(1,2...,n)), ce qui montre que les cycliques (sur C) sont connexes ? ? ?

Les cinq exercices qui suivent visent à étudier les différentes propriétés topologiques des classes de similitudes et leur lien avec la réduction des matrices considérées.

On notera $\operatorname{Sim} A$ la classe de similitude d'une matrice $A$.

## 17 Une classe de similitude n'est jamais ouverte

*Montrer que l'intérieur d'une classe de similitude est toujours vide.*

**Solution proposée.**

La trace étant un invariant de similitude, $\operatorname{Sim} A$ est incluse dans l'hyperplan affine $\operatorname{tr} = \operatorname{tr} A$, lequel est d'intérieur vide.

## 18 Matrices dont $0$ ou $I_n$ adhère à la classe de similitude

*Montrer qu'une matrice est nilpotente ssi* $0$ *adhère à sa classe de similitude.*
*En déduire qu'une matrice est unipotente ssi* $I_n$ *adhère à sa classe de similitude.*

**Solution proposée.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $A$ une matrice nilpotente. Quitte à la trigonaliser (on reste dans $\operatorname{Sim} A$), on peut supposer $A$ triangulaire supérieure stricte. On conjugue alors par un produit de dilatations $\operatorname{Diag}\left(C^1, C^2, ..., C^n\right)$ où $C$ est une constante arbitrairement grande. Multiplier à gauche multiplie la $i$-ligne par $C^i$ et diviser à droite divise la $j$-colonne par le même facteur $C^j$. Finalement, le terme $a_{i,j}$ se trouve transformé en $a_{i,j} C^{i-j}$. Comme on ne regarde que les termes pour $i < j$, la nouvelle matrice tend vers $0$ lorsque $C$ tend vers $\infty$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Pour l'autre sens, le polynôme caractéristique est un invariant continu de similitude, donc $\chi_A = \chi_{\overline{\operatorname{Sim} A}} = \chi_0 = X^n$, ce qui une condition bien connue de nilpotence.

Quant aux matrices unipotentes, il s'agit d'observer que

$$\operatorname{Sim}(A + I_n) = \left\{P(A + I_n)P^{-1}\right\} = \left\{PAP^{-1} + I_n\right\} = (\operatorname{Sim} A) + I_n.$$

Le résultat tombe alors en appliquant ce qui précède.

## 19 Matrices dont la classe de similitude est bornée

*Déterminer toutes les matrices de* $M_n(\mathbb{K})$ *dont la classe de similitude est bornée,* i. e. *les* $A$ *telles que*

$$\exists M > 0,\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \left\|PAP^{-1}\right\| < M.$$

**Solution proposée.**

Montrons déjà que $\operatorname{Sim} A$ ne contient que des matrices diagonales.

Dans le cas contraire, soit $A'$ une matrice semblable à $A$ ayant un coefficient $a'_{i_0,j_0}$ non nul avec $i_0 \neq j_0$. On dilate ce coefficient à l'aide d'une matrice de dilatation

$$P = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

où le $\lambda$ est à la $i_0$-ième place. On a alors $\left[PAP^{-1}\right]_{i_0,j_0} = \lambda a'_{i_0,j_0}$ qui n'est pas bornée, d'où *absurdité*. En particulier, $A$ est diagonale.

Montrons à présent que $\operatorname{Sim} A$ ne contient que des matrices scalaires. Si une telle matrice, diagonale par ce qui précède, n'est pas scalaire, elle contient deux valeurs propres $\lambda$ et $\mu$ distinctes. On conjugue alors par une transvection :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda-\mu \\ & \mu \end{pmatrix},$$

ce qui donne une matrice non diagonale, *contradiction* puisqu'on doit rester dans $\operatorname{Sim} A$. En particulier, $A$ doit être scalaire.

On aurait pu également dire que, étant donnée un vecteur $x \in K^n$ non nul, on peut le compléter en une base $(x, e_2, ..., e_n)$ de $K^n$ et dans cette base la matrice de $A$ est diagonale, ce qui montre que $(x, Ax)$ est liée pour tout $x$ et il est connu que $A$ est alors scalaire.

Réciproquement, la classe de similitude d'une matrice scalaire est réduite à un point (elle-même), donc est bornée.

Finalement, les matrices scalaires répondent au problème et sont les seules.

# 20 Matrices dont la classe de similitude est fermée

1. *Montrer que la classe de similitude d'une matrice $A$ diagonalisable est l'ensemble des matrices $B$ telles que* $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A = \mu_B \end{cases}$.
2. *Montrer qu'une matrice complexe est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée. (Pour le sens $\Longleftarrow$, on pensera aux matrices de dilatation.)*

**Solution proposée.**

1. Montrons qu'une matrice $B$ est semblable à $A$ ssi $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A = \mu_B \end{cases}$. Le sens direct est immédiat[6]. Soit maintenant $B$ vérifiant $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A = \mu_B \end{cases}$.

   Puisque $A$ est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé simple ; $B$ est ainsi annulé par $\mu_B = \mu_A$ scindé simple, donc est diagonalisable et de même spectre que $A$. La condition $\chi_A = \chi_B$ montre alors les valeurs propres de $A$ et $B$ ont même multiplicité, d'où la similitude de $A$ et $B$.
2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $A$ diagonalisable. On transforme la condition $\mu_A = \mu_B$ en $\mu_A(B) = 0$. En effet, le sens direct est clair, et si $\mu_A(B) = 0$, alors $\mu_B \mid \mu_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (X - \lambda)$, mais la condition $\chi_A = \chi_B$ implique $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B$, d'où l'égalité $\mu_B = \mu_A$.

   On peut donc écrire la classe de similitude de $A$ comme $\chi^{-1}(\{\chi_A\}) \cap \mu_A^{-1}(\{0\})$, la continuité de polynôme caractéristique et celle de $\mu_A$ assurant que ce que l'on vient d'écrire est fermé.

   Nous proposons une seconde approche plus directe. Soit $A_\infty$ une limite de matrices $A_k$ semblables à $A$. Pour $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, la suite $A_k - \lambda$ tend vers $A_\infty - \lambda$, d'où (par croissance locale du rang) $\operatorname{rg}(A_\infty - \lambda) \leq \operatorname{rg}(A_k - \lambda)$ pour $k$ assez grand. En notant $\omega_\lambda(M)$ l'ordre algébrique de $\lambda$ comme racine de $\chi_M$ et $\delta_\lambda(M) := \operatorname{corg}(M - \lambda)$ son ordre géométrique, on obtient (en passant au corang et en sommant sur $\lambda \in \operatorname{Sp} A$)

$$\sum_\lambda \delta_\lambda(A_\infty) \geq \sum_\lambda \delta_\lambda(A_k).$$

   Or, le terme de droite vaut $\sum \omega_\lambda(A_k) = n$ car $A_k$ est diagonalisable tandis que le terme de gauche est $\leq \sum \omega_\lambda(A_\infty) = n$. On en déduit l'égalité partout, en particulier $\delta_\lambda(A_\infty) = \omega_\lambda(A_\infty)$ pour tout $\lambda$, ce qui montre que $A_\infty$ est diagonalisable, *CQFD*.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons à présent que $\operatorname{Sim} A$ est fermée. On dilate $A$ de façon asymétrique, après l'avoir trigonalisée, en conjugant par la matrice diagonale $D = \operatorname{Diag}(1, 2, ..., n)$. Puisque $\left[D^k A D^{-k}\right]_{i,j} = \left(\frac{i}{j}\right)^k a_{i,j}$, la suite $D^k A D^{-k}$ tend vers $\operatorname{Diag}(a_{1,1}, ..., a_{n,n})$, et cette limite est semblable à $A$ par hypothèse, ce qui prouve que $A$ est diagonalisable.

[6] Lorsque $A$ et $B$ sont semblables, elles représentent un même endomorphisme $u$, donc ont le même idéal de polynômes annulateurs (ceux de $u$), donc ont même polynôme minimal (celui de $u$).

**Remarques.** Il aurait été tentant de conclure en affirmant que la classe de similitude de $A$ peut se décrire comme l'image réciproque du fermé $\{(\chi_A, \mu_A)\}$ par l'application continue $(\chi, \mu)$. Mais l'application « polynôme minimal » $\mu : A \mapsto \mu_A$ n'est pas continue ! Considérer par exemple

$$\mu_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}} = X\left(X - \frac{1}{n}\right) \text{ et } \mu_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = X.$$

Observer par ailleurs que la démarche pour le sens réciproque est la même que pour montrer que 0 est dans l'adhérence de $\operatorname{Sim} N$ pour $N$ nilpotente : on a simplement dilaté d'une autre manière.

# 21 Matrices $2 \times 2$ dont la classe de similitude est connexe

*Soit $A$ une matrice réelle de taille $2 \times 2$. Montrer que $A$ est diagonalisable ssi sa classe de similitude est connexe. On pourra, pour l'un des sens, montrer que la classe de similitude de $A$ contient une matrice symétrique à l'aide d'une application continue gentille.*

*Qu'en est-il des matrices de taille plus grande ? Des matrices complexes ?*

**Solution proposée.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A$ semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$ et soit $P\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ dans sa classe de similitude.

Si $\det P > 0$, par connexité de $GL_n^+(\mathbb{R})$, on relie $P$ à $I_n$.

Si $\det P < 0$, on conjugue par $D := \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ :

$$P\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}P^{-1} = PD\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -(-\mu) \end{pmatrix}D^{-1}P^{-1} \text{ avec } \det PD > 0,$$

ce qui nous ramène au cas précèdent.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Essayons de suivre l'énoncé : une bonne application est celle qui à une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ semblable à $A$ associe $b - c$. Son image est l'image continue d'un connexe, donc un connexe de $\mathbb{R}$, symétrique (car toute matrice est semblable à sa transposée), donc contient 0, ce qui correspond à une matrice symétrique donc diagonalisable, *CQFD.*

Pour $n \geq 3$, le premier sens fonctionne toujours, mais le second tombe en défaut : il suffit de considérer une matrice non diagonalisable pour laquelle le raisonnement du premier sens s'applique, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Si le corps de base est $\mathbb{C}$, alors le groupe linéaire devient connexe par arcs, donc toutes les classes de similitudes également. Et l'argument précédent ne fonctionne évidemment plus, puisqu'on y utilise le fait que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ce qui est faux dans $\mathbb{C}$).

# 22 Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{K})$

Soit $G$ un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Le but du problème est de montrer que $G$ est un sous-groupe d'un certain groupe orthogonal.

On admettra que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte en dimension finie (conséquence du théorème de *Carathéodory*[7]).

On admettra qu'une application affine stabilisant un corps convexe $K$ (compact convexe non vide) a un point fixe sur $K$ (théorème de *Markov-Kakutani*[8]).

[7] *cf.* feuille sur les espaces affines
[8] *cf.* feuille sur les evn

1. *Montrer que le problème revient à trouver une matrice $S$ symétrique définie positive telle que $\forall g \in G,\ g^*Sg = S$.*

   On va chercher $S$ sous la forme $g^*g$, et plus généralement dans l'enveloppe convexe $K$ de tels éléments.

2. *Pour $g \in G$, on définit $\widehat{g} : S \mapsto g^*Sg$. Montrer que $\widehat{G} := \{\widehat{g}\}_{g\in G}$ est un sous-groupe compact de $GL(S_n(\mathbb{R}))$ qui stabilise $K$.*

   Le problème revient à présent à chercher un point (de $K$) fixe par tous les $\widehat{g}$.

3. *On définit une application sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par $\|S\| = \sup_{g\in G} \|\widehat{g}(S)\|_2$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme $\widehat{G}$-invariante*[9] *et étudier le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.*
4. *En raisonnant par l'absurde, trouver des $g_1, ..., g_k \in G$ n'admettant pas de point fixe commun dans $K$. Notons $F_g := \operatorname{Fix} \widehat{g}_{|K}$. En utilisant Markov-Kakutani, obtenir une contradiction.*

**Solution proposée.**

1. Un groupe orthogonal est un groupe d'applications préservant un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur $M_n(\mathbb{R})$, un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ étant la donnée d'une matrice $S$ symétrique définie positive – pour laquelle $\langle a, b\rangle = a^*Sb$. Le problème revient donc à trouver un $S$ tel que

$$\begin{array}{rl} & \forall g \in G,\ \forall a, b \in M_n(\mathbb{R}),\ \langle ga, gb\rangle = \langle a, b\rangle \\ \iff & \forall g \in G,\ \forall a, b \in M_n(\mathbb{R}),\ (ga)^* S (gb) = a^*Sb \\ \iff & \forall g \in G,\ \forall a, b \in M_n(\mathbb{R}),\ a^* (g^*Sg) b = a^*Sb \\ \iff & \forall g \in G,\ g^*Sg = S. \end{array}$$

2. $\widehat{G}$ est clairement un groupe pour la loi $\widehat{g}\widehat{h} = \widehat{gh}$, de neutre $\widehat{I_n} = \mathrm{Id}$, donc un sous-groupe de $GL(M_n(\mathbb{R}))$. Les applications

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & S \mapsto A^*S \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R})) \\ u & \longmapsto & S \mapsto u(S)A \end{array} \right.$$

   sont linéaires donc continues (on est en dimension finie), donc l'image $\widehat{G}$ du compact $G$ par leur composée est un compact de $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$. En remarquant que $\widehat{G}$ stabilise $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a finalement que $\widehat{G}$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. Montrons que $\widehat{G}$ stabilise $K$ : pour $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g^*g$ dans $K$ et $g_0$ dans $G$, on a

$$\widehat{g_0}(a) = g_0^* a g_0 = \sum_{g\in G} \lambda_g (gg_0)^* (gg_0) = \sum_{g\in G} \lambda_{gg_0^{-1}} g^*g \in K.$$

3. $\widehat{G}$ étant compact, à $S$ fixé l'application continue $\widehat{g} \mapsto \|\widehat{g}(S)\|_2$ atteint son supremum, donc $\|S\|$ s'écrit $\|\widehat{g_S}(S)\|_2$ pour un certain $g_S \in G$. Ainsi, on a toujours, en allégant $g := g_{S+T}$ :

$$\|S + T\| = \|\widehat{g}(S + T)\|_2 = \|\widehat{g}(S) + \widehat{g}(T)\|_2 \leq \|\widehat{g}(S)\|_2 + \|\widehat{g}(T)\|_2 \leq \|S\| + \|T\|,$$

   et le cas d'égalité force le cas d'égalité pour la norme euclidienne, *i. e.* $\lambda\widehat{g}(T) + \mu\widehat{g}(S) = 0$ avec $\lambda\mu \leq 0$, d'où $\lambda T + \mu S = 0$ par injectivité de $\widehat{g}$. Les deux autres propriétés d'une norme sont immédiates. Comme de plus $\widehat{G}$ est stable par composition, $\|\cdot\|$ est $\widehat{G}$-invariante.
4. Supposons que $\bigcap_{g\in G} F_g = \emptyset$. Par compacité de $K$, on en extrait une intersection finie $F_{g_1} \cap \cdots \cap F_{g_k} = \emptyset$. On pose $f = \frac{1}{n}(\widehat{g_1} + \cdots + \widehat{g_k})$, application affine stabilisant $K$ par convexité de ce dernier. Pour appliquer Markov-Kakutani à $f$, il faut prouver que $K$ est un corps convexe. Il est trivialement non vide et convexe, et c'est un compact comme enveloppe convexe du compact $\{g^*g\ ;\ g \in G\}$ (le voir par exemple en extrayant des suites). $f$ admet donc un point fixe $a \in K$, et en prenant la norme introduite précédemment on trouve

$$\|a\| = \|f(a)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{g_i}(a)}{n} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \|\widehat{g_i}(a)\| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \|a\| = \|a\|.$$

[9] *i. e.* telle que $\|\widehat{g}S\| = \|S\|$ pour tout $g \in G$

Le cas d'égalité impose à tout le monde d'être sur la même demi-droite, mettons $\widehat{g_i}(a) = \lambda_i \widehat{g_1}(a)$ avec $\lambda_i > 0$ (observer que $a$ est non nul car dans $K$). En reprenant la norme, on obtient $\|a\| = \lambda_i \|a\|$, d'où $\lambda_i = 1$ pour tout $i$. On a donc $\widehat{g_i}(a) = \widehat{g_j}(a)$ pour tous $i, j$, d'où $a = f(a) = \sum_j \frac{1}{n} \widehat{g_i}(a) = \widehat{g_i}(a)$, ce qui montre que $a \in F_{g_1} \cap \cdots \cap F_{g_k}$, *contradiction.*

**Remarque.** Il est clair que les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{C})$ sont des sous-groupes d'un groupe unitaires, la même démonstration s'appliquant en rajoutant des barres de conjugaison au besoin.

On a finalement décrit tous les sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{K})$ : ce sont les groupes orthogonaux/unitaires.

## 23 Sur le rayon spectral

$\rho$ est continu, pas lipschitzien, $\frac{1}{n}$-holdeirne (avec plus petit constante)

## 24 Cayley-Hamilton par les intégrales

Donner un sens à et évaluer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(re^{i\theta}\right)^k}{re^{i\theta}\,\mathrm{Id} - A} \frac{d\theta}{2\pi}$.

## 25 Polynômes dont les zéros matriciels forment un compact

*Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer les polynômes $P$ de $K[X]$ tels que $Z(P) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \ ; \ P(A) = 0\}$ soit compact.*

Pour $n = 1$, tout polynôme convient, l'ensemble $Z(P)$ s'identifiant alors à l'ensemble (fini) des racines de $P$. On peut supposer $n \geq 2$.

Les poynômes $X - \lambda$ conviennent car n'annulent que la matrice scalaire $\lambda$. Montrons que ce sont les seuls.

Soit un tel $P$.

$Z(P)$ est stable par conjugaison, donc ne peut contenir que des matrices dont la classe de similitude est bornée, à savoir des matrices scalaires. Or la matrice compagnones de $P$ est annulée par $P$, ce qui force $n = 1$.