Théorèmes de STONE WEIERSTRASS
(version chantier)

Marc SAGE

15 novembre 2005

Table des matières

1 Stone Weierstrass

Lemme : il y a une suite de polynôme qui converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1,1]$.

Soit K un compact, $E := C^0(K,\mathbb{R})$, et $A \subset E$.
Montrer que A est dense dans E lorsqu'elle

1. est stable par min et max et interpole deux points quelconques distincts de K ;
2. est une algèbre contenant les constantes et séparant les points ;
3. est une algèbre séparante incluse dans aucun idéal maximal

1. Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Pour $a \neq b$ dans K, il y a un $\varphi_{a,b} \in A$ tel que $\varphi_{a,b}(a,b) = (f(a), f(b))$. En posant $\Omega_{a,b} = \left\{f > \varphi_{a,b} - \varepsilon\right\}$ ouvert de K contenant a et b, alors à a fixé on a $K = \bigcup_b \Omega_{a,b} = \bigcup_{\text{finie}} \Omega_{a,b_j}$ par compacité. Posons $\varphi_a := \min \varphi_{a,b_j}$. Alors $\Omega_a = \{f < \varphi_a + \varepsilon\}$ ouvert de K contenant a, donc $K = \bigcup_a \Omega_a = \bigcup_{\text{finie}} \Omega_{a_i}$ par compacité. Posons $\varphi := \max \varphi_{a_i}$.

   Fixons maintenant $k \in K$. D'une part, k est dans un Ω_{a_i}, d'où
$$\varphi(k) \geq \varphi_{a_i}(k) > f(k) - \varepsilon.$$
   D'autre part, $\varphi(k)$ vaut $\varphi_{a_{i_0}}(k)$ pour un certain a_{i_0}, et k est dans un $\Omega_{a_{i_0},b_j}$, d'où
$$\varphi(k) = \varphi_{a_{i_0}}(k) \leq \varphi_{a_{i_0},b}(k) < f(k) + \varepsilon.$$

2. Puisque $\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$, on va déjà montrer $\left[f \in A \implies |f| \in \overline{A}\right]$. Soit $f \in A$. D'après le lemme, $\|f\| P_n\left(\frac{f}{\|f\|}\right)$ c.u. vers f et reste dans $\overline{A}$, *CQFD*.

   Soit $a \neq b$ dans K. Puisque A sépare les points, il y a un $\sigma \in A$ tel que $\sigma(a) \neq \sigma(b)$. On cherche un $f = \lambda\sigma + \mu$ tel que $f(a,b) = (\alpha,\beta)$ avec α,β arbitraires. C'est dire $\left\{\begin{array}{c} \lambda\sigma(a) + \mu = \alpha \\ \lambda\sigma(b) + \mu = \beta \end{array}\right.$, système en (λ,μ) de déterminant $\sigma(a) - \sigma(b) \neq 0$, donc qui a une solution. Ainsi A interpole deux points quelconques distincts.

   Montrons enfin que $\overline{A}$ satisfait les hypothèses précédentes. Pour $f \in \overline{A}$, on a $f = \lim f_n$ avec $f_n \in A$, d'où $|f| = \lim \underbrace{|f_n|}_{\in \overline{A}} \in \overline{A}$, donc $\overline{A}$ stable par min et max. De plus, $\overline{A}$ interpole ce qu'il faut car A le fait.

3. Soit $a \neq b$ dans K. Il y a un $\sigma \in A$ tel que $\sigma(a) \neq \sigma(b)$. Supposons par symétrie $\sigma(a) \neq 0$ et même $\sigma(a) = 1$ (car A stable par homothétie). Les idéaux maximaux de E étant les $\{f \in E,\ f(a) = 0\}$ pour a décrivant K, on sait qu'il y a un α et un β dans A tels que $\alpha(a)\beta(b) \neq 0$; quitte à normaliser, on peut supposer $\alpha(a) = 1 = \beta(b)$. Cherchons alors $f = \lambda\alpha\sigma^n + \mu\beta$. On veut $\begin{pmatrix} 1 & \beta(a) \\ \alpha(b)\sigma(b)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = ?$. Le déterminant vaut $1 - \beta(a)\alpha(b)\sigma(b)^n$ qui est non nul pour un n, sinon $\sigma(b) = \sqrt[n]{\frac{1}{\beta(a)\alpha(b)}}$ tendrait vers $1 = \sigma(a)$.