Espaces vectoriels normés, le retour (version chantier)

Marc SAGE

12 décembre 2006

Table des matières

Les notations sont les mêmes que celles de la première feuilles, $\mathbb{B}$ pour la boule unité ouverte, $\mathbb{S}$ la sphère unité, $\mathcal{B}(a,r) = a + r\mathbb{B}$ pour la boule de centre a et de rayon r.

Les exercices qui suivent sont d'un niveau bien plus relevé que ceux de la première feuille, plus dans l'esprit de l'agrégation que de la taupe (ce qui ne doit pas pour autant décourager pour les chercher !).

On appelle *valeur absolue* sur un corps K toute application $|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ multiplicative sous-additive. On laisse le lecteur vérifier que la propriété de séparation $|\lambda| = 0 \iff \lambda = 0$ est valable ssi la valeur absolue n'est pas constamment 0 ou 1. Une telle valeur absolue est appelée *norme* et on parle alors de corps *normé*. Par exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont normés par la valeur absolue usuelle et le module.

Un *norme* sur un K-ev E est une application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés usuelles (la valeur absolue usuelle de $\mathbb{K}$ étant remplacée par la valeur absolue de K) . La propriété de séparation implique l'équivalence $(|\lambda| = 0 \iff \lambda = 0)$ si E n'est pas l'ev nul. Par exemple, si K est normé par $|\cdot|$, cette dernière est une norme[1] sur le K-ev K.

On définit comme dans les $\mathbb{K}$-ev les notions de suites convergentes, de Cauchy, ainsi que la complétude.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ est normé par la valeur absolue usuelle, mais également[2] ? ? ? par $|\cdot|_p : r \mapsto p^{v_p(r)}$ pour tout premier p. Il n'est complet pour aucune de ces normes.

Tout comme on peut compléter $\mathbb{Q}$ pour obtenir $\mathbb{R}$, on peut compléter tout corps K muni d'une valeur absolue en un corps complet $\widehat{K}$. Le complété de $\mathbb{Q}$ pour $|\cdot|_p$ se note $\mathbb{Q}_p$ (ensemble des nombres p-adiques) et peut se voir, en terme de développements décimaux, comme les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule mais un nombre infini à gauche.

1 Mise en jambe

1. *Soit E un evn. Montrer que deux normes N et N' sur E définissent la même topologie[3] ssi les applications $\frac{N}{N'}$ et $\frac{N}{N'}$ sont bornées sur $E\backslash\{0\}$, ou encore ssi les suites de limite nulle sont les mêmes pour N ou pour N'.*
2. *Contre-exemple pour les métriques ? On pourra montrer la formule*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in E,\ \forall r > 0,\ a + r\mathbb{B} = \bigcup_{0 \leq r' < r} \bigcup_{c \in a + r'\mathbb{S}} \left(c + \min\{\varepsilon, r - r'\} \mathbb{B}\right).$$

Solution proposée.

1. Supposons la topologie de N incluse dans celle de N'. La boule unité $\mathbb{B}$ de N est un ouvert de N', donc (puisque $0 \in \mathbb{B}$) il y a une boule $r\mathbb{B}'$ pour N' centrée en 0 qui reste incluse dans $\mathbb{B}$. En particulier, pour tout $x \neq 0$, le vecteur $\frac{r}{2} \frac{x}{N'(x)}$ tombe dans $r\mathbb{B}'$, donc dans $\mathbb{B}$, donc est ≤ 1 en norme N, ce qui implique $\frac{N(x)}{N'(x)} \leq \frac{2}{r}$. Par symétrie, on en déduit un sens $\Longrightarrow$.

   Supposons une égalité $N' \leq \alpha N$ pour un $\alpha \geq 0$. Les fermés de N' sont alors fermés pour N : en effet, si F est fermé pour N' et $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ converge pour N vers un $l \in E$, alors $N'(f_n - l) \leq \alpha N(f_n - l) \longrightarrow 0$, donc (f_n) converge pour N', donc $l \in F$. Par passage au complémentaire, on en déduit que les ouverts de N' sont des ouverts de N ; autrement la topologie induite par N' est incluse dans celle induite par N. Par symétrie, on déduit un sens $\Longleftarrow$.

   Supposons que les suites de limite nulle sont les mêmes. L'argument du paragraphe précédent montre que N et N' ont mêmes fermés, donc même topologie.

   Enfin, si $\frac{N}{N'}$ est bornée, il est clair qu'une suite de limite nulle pour N' sera de limite nulle pour N. Un argument de symétrie conclut.
2. Ce résultat devient faux pour les métriques : si d est une distance, on va montrer qu'elle définit la même topologie que $\frac{d}{1+d}$ et $\min\{1, d\}$. Si l'un des rapports $\frac{d}{\frac{d}{1+d}} = 1 + d$ ou $\frac{d}{\min\{1,d\}} = \max\{d, 1\}$ était borné, la distance d serait borné, ce qui n'a pas lieu d'être en général.

   Le point est que tout ouvert est réunion de boules de rayon $< \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé (c'est ce que nous dit la formule suggérée). Admettons cela un instant pour $\varepsilon = 1$. Alors, puisque les

[1] Noter la cohérence de la terminologie : si K est muni d'une valeur absolue, cette dernière est une norme sur l'ev K ssi elle est une norme sur le corps K.

[2] Un théorème (non trivial) dû à Ostrosgradskii ? ? ? montre que ce sont en fait les seules valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$.

[3] *i. e.* les mêmes ouverts

boules de rayon $r<1$ sont les mêmes pour d et $\min\{d,1\}$, les topologies de d et $\min\{1,d\}$ coïncident. Par ailleurs, une boule de rayon $r<1$ pour $\frac{d}{d+1}$ est une boule de rayon $\frac{r}{1-r}$ pour d, donc les ouverts de $\frac{d}{d+1}$ sont des ouverts de d, la réciproque étant immédiate (une boule de rayon r pour d est une boule de rayon $\frac{r}{r+1}$ pour[4] $\frac{d}{d+1}$).

Montrons la formule suggérée. Soit $x\in a+r\mathbb{B}$. Alors x est centre de la boule $c+\min\{\varepsilon,r-r'\}\,\mathbb{B}$ pour $r':=d(a,x)$ et $c:=x$, d'où l'inclusion $\subset$. Réciproquement, si $x\in c+\min\{\varepsilon,r-r'\}\,\mathbb{B}$ avec $c\in a+r'\mathbb{S}$, on a $d(x,a)\leq d(x,c)+d(c,a)<(r-r')+r'=r$, d'où $x\in a+r\mathbb{B}$, *CQFD.*

2 Evn sur un corps normé

Montrer que, sur un corps complet, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et complètes.

Solution proposée.
On raisonne par récurrence sur la dimension $n\geq 0$ de notre ev E.
Si $n=0$, tout est trivial
Soit $n\geq 1$. On considère une base $(e_1,...,e_n)$ de E et une norme $\|\cdot\|$. En écrivant

$$\left\|\sum\lambda_i e_i\right\|\leq\max\|e_i\|\sum|\lambda_i|\leq n\max\|e_i\|\max|\lambda_i|\,,$$

on obtient une inégalité $\|\cdot\|\leq M\,\|\cdot\|_\infty$ avec $M>0$, donc les suites de limite nulle $\|\cdot\|_\infty$ convergent toutes vers 0 pour $\|\cdot\|$. Soit par ailleurs (a_k) une suite de limite nulle pour $\|\cdot\|$. Décomposons $a_k=\sum\lambda_i^k e_i$. Si cette dernière ne converge pas pour $\|\cdot\|_\infty$, la suite $\max_i\left|\lambda_i^k\right|$ ne tend pas vers 0, donc (quitte à extraire) il y a un indice i_0 et un $\varepsilon_0>0$ tel que $\left|\lambda_{i_0}^k\right|>\varepsilon_0$ pour tout k. Alors $\sum\frac{\lambda_i^k}{\lambda_{i_0}^k}e_i=O(a_k)\longrightarrow 0$, donc e_{i_0} est dans l'adhérence de $\mathrm{Vect}_{i\neq i_0}\{e_i\}$; ce dernier étant complet par hypothèse de récurrence, il est fermé, donc e_{i_0} est lié aux $e_{i\neq i_0}$, contradiction.

Il reste à montrer la complétude de E. Soit (a_k) de Cauchy, mettons $a_k=\sum\lambda_i^k e_i$ pour tout k. Alors

$$\|a_q-a_p\|_\infty=\max_i|\lambda_i^q-\lambda_i^p|\,,$$

de sorte que les n suites $\left(\lambda_i^k\right)_k$ sont de Cauchy, donc convergent par complétude de K, d'où la convergence de (a_k) vers $\sum\left(\lim_k\lambda_i^k\right)e_i$.

3 Cas d'égalité triangulaire

On cherche ici deux CNS sur notre evn pour que le cas d'égalité $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ soit le même que pour une norme préhilbertienne (*i. e.* x et y portée par une même demi-droite), l'une géométrique, l'autre analytique.

Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes et énoncer la CNS voulue sous une forme géométrique :
i) pour tout vecteurs x et y, on a l'implication

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\implies(x,y)\text{ positivement coliénaires ;}$$

ii) pour tout vecteurs a et b,on a l'implication

$$\|a\|=\|b\|=\left\|\frac{a+b}{2}\right\|\implies a=b\ ;$$

iii) pour tout vecteurs a et b, pour tout scalaire $t\in[0,1]$, on a l'implication $\|a\|=\|b\|=\|ta+(1-t)\,b\|\implies a=b$ *;*

[4] c'est la croissance de $x\mapsto\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$

En déduire l'équivalence avec la CNS analytique suivante qui précise le cas d'égalité triangulaire continu : pour toute application f continue sur un segment à valeurs vectorielles, on a l'égalité $\left\|\int f\right\| = \int \|f\|$ ssi f est portée par une demi-droite.

Pour l'un des sens, on pourra montrer, en notant u le vecteur $\int f$, que l'intégrale de f sur tout ouvert du segment est portée par $\mathbb{R}^+u$, puis considérer une forme linéaire continue annulant u (qui existe par le théorème de Hahn-Banach).

Solution proposée.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* On applique *i)* à $x = \frac{a}{2}$ et $y = \frac{b}{2}$, ce qui montre que a et b sont positivement colinéaires ; comme ils ont même normes, ils sont égaux.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Il s'agit de montrer que l'application $f : t \longmapsto \|ta + (1-t)\,b\|$ est constante. Or, f est la composée d'une application affine par une application convexe (la norme), donc est convexe, et prend par ailleurs la même valeur en trois points distincts $(0, \frac{1}{2}, 1)$: elle doit donc être constante. Pour s'en convaincre, *faire un dessin* : le segment reliant les minima de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ doit être au-dessus du graphe de f, en particulier au-dessus de l'abscisse $\frac{1}{2}$, ce qui force ce segment à être sur la droite reliant $f(0)$ à $f(1)$.

iii) $\Longrightarrow$ *i)* On va exhiber deux vecteurs a et b de même normes pour appliquer le point précédent. Si x ou y est nul, il n'y a rien à faire. Sinon, on les normalise, mettons $a = \frac{x}{\|x\|}$ et $b = \frac{y}{\|y\|}$. On cherche alors un $t \in [0,1]$ tel que $\|ta + (1-t)\,b\| = 1$, *i. e.*

$$\left\| t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)\,\frac{y}{\|y\|} \right\| \stackrel{?}{=} 1.$$

Si possible un truc qui se symétrise bien en x et y. Par exemple $t = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$ fonctionne :

$$\|ta + (1-t)\,b\| = \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} = 1.$$

On en déduit $a = b$, d'où (x, y) positivement colinéaires.

La CNS géométrique cherchée est une reformulation de *iii)* :

"les sphères ne contiennent pas de segments",

ou encore

"les boules ne contiennent pas de plats".

C'est bien le cas des boules euclidiennes qui sont "bien rondes".

• Raisonnons par contraposée en niant la CNS géométrique : toute fonction (continue) à valeurs dans un "plat" $[a, b]$ fournit alors un contre-exemple. En l'écrivant

$$f = \lambda a + (1-\lambda)\,b$$

où λ est à valeurs dans $[0,1]$, $\|f\|$ est une constante $\|a\| = \|b\|$, d'où (en appelant L la longueur de l'intervalle d'intégration)

$$\frac{\int \|f\|}{L} = \|a\|.$$

De plus, on obtient $\int f = \left(\int \lambda\right) a + \int (1-\lambda)\,b$, d'où

$$\frac{\int f}{L} = \frac{\int \lambda}{L} a + \left(1 - \frac{\int \lambda}{L}\right) b$$

qui tombe dans $[a, b]$, d'où l'égalité $\left\|\int f\right\| = \int \|f\|$. Si f était portée par une demi-droite, elle serait constante car de norme fixe, ce qui n'est pas.

• Supposons à présent la CNS géométrique et soit f une application continue par morceaux sur un segment telle que $\left\|\int f\right\| = \int \|f\|$.

Suivons l'énoncé : en découpant notre intégrale selon un ouvert U du segment et son complémentaire F, on obtient

$$\left\| \int f \right\| = \left\| \int_U f + \int_F f \right\| \leq \left\| \int_U f \right\| + \left\| \int_F f \right\| \leq \int_U \|f\| + \int_F \|f\| = \int \|f\|\ ;$$

comme on a égalité, la CNS géométrique appliquée à la première inégalité nous dit que $\int_U f$ et $\int_F f$ sont portés par une même demi-droite, donc (en rajoutant $\int_U f$) de même pour $\int_U f$ et $\int f$. Ceci s'énonce aussi, :

$$\int_U f \text{ est portée par la demi-droite engendrée par } u$$

(si $u=0$, on doit avoir $\int \|f\| = \|u\| = 0$, d'où $f=0$ sauf peut-être en ses points de discontinuité).

En appliquant une forme linéaire φ comme suggéré dans l'énoncé, on en déduit $\int_U \varphi \circ f = 0$; en particulier pour l'ouvert où $\varphi \circ f > 0$, on trouve une contradiction si U est non vide. Même arguement pour $\varphi \circ f < 0$: l'ouvert où $\varphi \circ f \neq 0$ est donc vide, d'où f à valeurs dans $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}u$. Finalement, f s'écrit λu où λ est une application scalaire.

Il reste à montrer que λ garde un signe constant. Pour cela, on casse l'intégrale en deux bouts selon que λ soit positif ou négatif :

$$\int f = \int_{\lambda \geq 0} f + \int_{\lambda \leq 0} f = \left(\int_{\lambda \geq 0} \lambda\right) u + \left(\int_{\lambda \leq 0} \lambda\right) u = \left(\int_{\lambda \geq 0} |\lambda| - \int_{\lambda \leq 0} |\lambda|\right) u.$$

En prenant la norme, on en déduit

$$\left|\int_{\lambda \geq 0} |\lambda| - \int_{\lambda \leq 0} |\lambda|\right| = \frac{\|\int f\|}{\|u\|} = \frac{\int \|f\|}{\|u\|} = \int_{\lambda \geq 0} |\lambda| + \int_{\lambda \leq 0} |\lambda| .$$

Le premier terme se réécrit avec un signe $\pm$: selon ce signe, l'une des intégrales $\int_{\lambda \geq 0} |\lambda|$ ou $\int_{\lambda \leq 0} |\lambda|$ se simplifie et entraine immédiatement la mort de l'autre, *CQFD.*

4 Sur les enveloppes convexes

L'enveloppe convexe d'une partie A est par définition l'ensemble $\operatorname{Conv} A$ des barycentres de points de A à coefficients positifs, *i.e.* des $\sum \lambda_i a_i$ où les a_i sont dans A et les λ_i sont des réels dans $[0,1]$ de somme $\sum \lambda_i = 1$.

1. *Montrer que l'enveloppe convexe d'un précompact est précompacte*
2. *En déduire que, dans un Banach, l'enveloppe convexe d'un compact est d'adhérence compacte.*
3. *En déduire qu'en dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte. Contre-exemple ?*
4. *Nous allons montrer la réciproque du point précédent. Soit E un evn de dim infinie où l'enveloppe conevexe de tout compact est compacte. Construire à l'aide de Hanh-Banach une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ libre et une suite $(\varphi_n) \in (E')^{\mathbb{N}}$ tels que*
$$\begin{cases} \|x_n\| = \frac{1}{n} \\ \varphi_n(x_i) \text{ pour } i < n \\ \varphi_n(x_n) > \frac{3}{4n} \end{cases}.$$
Conclure en minorant les φ_n évalués sur la somme $\sum \frac{x_n}{3^n}$ et en considérant l'enveloppe convexe du compact $\{0, x_1, x_2, ...\}$.

Solution proposée.

1. Soit A une partie précompacte. Fixons un $\varepsilon > 0$: on peut recouvrir $A \subset \bigcup_{\text{finie}} (a_i + \varepsilon \mathbb{B})$. Considérons un entier n, à prendre assez grand au besoin. Pour un point $x = \sum \lambda_i x_i$ dans l'enveloppe convexe de A, chaque x_i est dans une boule $a_{\varphi(i)} + \varepsilon \mathbb{B}$. En posant $\mu_j = \sum_{\varphi(i)=j} \lambda_i$ et $n_j \in \{0,1,...,n\}$ tel que $\left|\mu_j - \frac{n_j}{n}\right| < \frac{1}{n}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left\|x - \sum_j \frac{n_j}{n} a_j\right\| &\leq \left\|\sum_j \sum_{\varphi(i)=j} \lambda_i x_i - \sum_j \mu_j a_j\right\| + \left\|\sum_j \mu_j a_j - \sum_j \frac{n_j}{n} a_j\right\| \\ &\leq \sum_j \sum_{\varphi(i)=j} \lambda_i \left\|x_i - a_{\varphi(i)}\right\| + \sum_j \left|\mu_j - \frac{n_j}{n}\right| \|a_j\| \\ &< \sum_i \lambda_i \varepsilon + \sum_i \frac{1}{n} \|a_i\| < \varepsilon + \varepsilon \text{ pour } n > \frac{\sum \|a_i\|}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Conv} A$ est recouvert par des boules de rayon 2ε et de centres les combinaisons linéaires des a_i à coefficients dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1-\frac{1}{n}, 1\right\}$, lesquelles sont en nombre fini ; la précompacité de $\operatorname{Conv} A$ en résulte.

BIEN PLUS COURT : $A \subset \bigcup_{\text{finie}} (a_i + \varepsilon\mathbb{B})$, donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Conv} A &\subset \operatorname{Conv}\left(\bigcup (a_i + \varepsilon\mathbb{B})\right) \\ &= \underbrace{\operatorname{Conv}\left(\bigcup a_i\right)}_{\text{compact, donc } \subset \bigcup_{\text{finie}} (b_i + \varepsilon\mathbb{B})} + \varepsilon\mathbb{B} \text{ avec } b_i \in \operatorname{Conv}\left(\bigcup a_i\right) \subset A.\end{aligned}$$

2. Soit K un compact. K est clairement précompact (extraire un sous-recouvrement fini de $K \subset \bigcup_{k\in K} (k + \varepsilon\mathbb{B})$), donc $\operatorname{Conv} K$ est précompacte, a *fortiori* $\overline{\operatorname{Conv} K}$ (doubler le rayon des boules pour s'en convaincre). Or, $\overline{\operatorname{Conv} K}$ est un fermé dans un complet, donc complet. $\overline{\operatorname{Conv} K}$ est donc compacte d'après le premier point.

3. Soit K notre compact et (c_k) une suite dans l'enveloppe convexe $\operatorname{Conv} K$. Carathéodory permet d'écrire $c_k = \sum_{i=0}^n \lambda_i^k x_i^k$ où n est la dimension de notre ev normé, les λ_i^k étant dans $[0,1]$ et de somme $\sum_{i=0}^n \lambda_i^k = 1$ pour tout k. On extrait alors de la suite $\left(\lambda_0^k, ..., \lambda_n^k, x_0^k, ..., x_n^k\right)$ du compact $[0,1]^{n+1} \times K^{n+1}$ une sous-suite convergente vers un $(\lambda_0, ..., \lambda_n, x_0, ..., x_n) \in [0,1]^{n+1} \times K^{n+1}$, d'où une valeur d'adhérence $c = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ par passage à la limite et $\lambda_i \in [0,1]$.

BEACOUP PLSU COURT : meême si c'es dire la même chose, $\operatorname{Conv} A$ est l'image continue de $\left\{\lambda \in R_+^{n+1} ; \sum \lambda_i = 1\right\} \times A^{n+1}$ par $(\lambda, a) \mapsto \sum \lambda_i a_i$.

Pour un contre-exemple, il faut aller chercher en dimension infinie, donc typiquement dans des espaces fonctionnels. Si l'on considère l'espace E des fonctions continues par morceaux normé par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et l'application

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & \chi_{[a,1]} \end{array}\right. ,$$

on voit que l'image de Φ (qui est continue car 1-lipschitzienne) est un compact de E. Son enveloppe convexe contient donc les "escaliers" $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\chi\left[\frac{i}{n}, 1\right]$ qui tendent vers l'application identité, laquelle n'est clairement pas dans $\operatorname{Conv} \operatorname{Im} \Phi$.

4. Prenons un vecteur x_1 unitaire et supposons construits $x_1, ..., x_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Hanh-Banach nous donne alors une forme linéaire continue $\varphi_n \in E' \setminus \{0\}$ nulle sur $\operatorname{Vect}(x_1, ..., x_{n-1})$, que l'on peut toujours normaliser, d'où un vecteur unitaire u_n tel que $\varphi_n(u_n) > \frac{3}{4}$. On pose alors $x_n = \frac{u_n}{n}$.

Notons K le compact formé des termes de la suite (x_n) union leur limite 0. Le 0 permet de montrer que la série $\sum \frac{x_n}{3^n}$ est à valeurs dans $\operatorname{Conv} K$, compact par hypothèse, donc complet, donc la série $\sum \frac{x_n}{3^n}$ y converge par absolue convergence. Sa somme S appartenant à $\operatorname{Conv} K$, elle s'exprime comme barycentre d'un nombre fini de x_n, donc réside dans un certain $\operatorname{Vect}(x_1, ..., x_{n_0})$.

Évaluons nos formes linéaires sur les séries partielles :

$$\varphi_n\left(\sum_{i=0}^N \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=n}^N \frac{\varphi_n(x_i)}{3^i}.$$

Le premier terme $\frac{\varphi_n(x_n)}{3^n}$ se minore par $\frac{\frac{3}{4n}}{3^n} > \frac{1}{4n3^n}$, tandis que le second $\sum_{i=n+1}^N \frac{\varphi_n(x_i)}{3^i}$est minoré brutalement par

$$\sum_{i>n}^N \frac{-\|\varphi_n\| \|x_i\|}{3^i} = -\sum_{i>n}^N \frac{1}{i3^i} = -\frac{1}{n}\sum_{i>n}^N \frac{1}{3^i} = -\frac{1}{n3^{n+1}}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{3^i} > -\frac{1}{n3^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2n3^n}.$$

On en déduit

$$\varphi_n\left(\sum_{i=0}^N \frac{x_i}{3^i}\right) > \frac{1}{4n3^n} - \frac{1}{2n3^n} = \frac{1}{4n3^n} \overset{\varphi_n \text{ continue}}{\Longrightarrow} \varphi_n(S) \geq \frac{1}{4}\frac{1}{n3^n} > 0,$$

ce qui pose problème pour n assez grand car φ_n doit s'annuler sur $\operatorname{Vect}(x_1, ..., x_{n-1})$ qui contient S.

5 Tout les compact convexes d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes

Soit C et D deux compacts convexes d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Quitte à les translater, on peut supposer que 0 est dans leurs intérieurs. On regarde alors $\varphi := \frac{j_C}{j_D}\operatorname{Id}$ (avec $0 \mapsto 0$) et idem en échangeant C et D. Ces applications échangent bien Cet D car commutent avec les jauge. Il reste à établr la coninuité en 0. Par équivalences des normes, i lsuffit de montre que $\forall a, j_C(a) \leq M j_D(a)$ pour un certain M, ce qui vient encore de l'équivalance des normes (les jauge en sont).

6 Tout G_δ d'un complet est topologiquement complet

1. *Soit G (gebeit = domaine = ouvert) un ouvert de E. On pose $f(a) := \frac{1}{d(a, {}^cG)}$. Montrer que la distance $d^G\binom{a}{b} - d\binom{a}{b} := |f(a) - f(b)|$ est une distance sur G topologiquement équivalente à d rendant G est complet lorsque E Banach.*
2. *Soit $I := \bigcap G_n$. On pose $d^I\binom{a}{b} - d\binom{a}{b} := \sum \min\left\{d^{G_n}\binom{a}{b} - d\binom{a}{b}, \frac{1}{2^n}\right\}$. Montrer que d^I est une distance sur I topologiquement équivalnet à d et rendnat I cimplet.*

Solution proposée.

1. f ets continue sur G. Symétrique claire. Séparation vient de $d^G \geq d$. Ineg triang vient en sommant celle de d et celle de $|f(a) - f(b)|$

   topo éq ? un sens trivialissé par $d^G \geq d$. Supposons $d\binom{a}{a_n} \longrightarrow 0$. Alors $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ par continuité, d'où par somme $d^G\binom{a}{a_n} \longrightarrow 0$.

   Soit (a_n) de Cauchy pour d^G. Puisque $d \leq d^G$, c'est une suite de Cauchy pour d et donc cv dans E (pour d, ied pour d^G). IL reste à mq la limite a reste dans G. On a $|f(a_q) - f(a_p)| \leq d^G\binom{a_p}{a_q} + d\binom{a_p}{a_q}$ de Cauchy, donc $f(a_n)$ bornér, ie $d(a_n, {}^cG) \geq ? > 0$, donc à la limite $a \in G$.
2. Mêmes idées, avec plus travail technique.

   Dist ? on a toujours $d^I \geq d$. Inég triang ? si t la vérirife, alors $\min\{t, cst\}$ aussi, donc une somme de tels trucs aussi.

   topo equ ? Il suffit de mq $\binom{a}{b} \mapsto \sum f_n\binom{a}{b}$ avec $f_n\binom{a}{b} := \min\left\{\left|f^{G_n}(a) - f^{G_n}(b)\right|, \frac{1}{2^n}\right\}$. Mais c'est une série normalement convergente ? ? ? donc de limte continue

   cmplet ? une suite (a_n) de Cauchy pour d^I l'est pour d, donc converge (pour les deux) vers un a. Mq $a \in I$: pour k fixé on a $\left|f^{G_k}(a_q) - f^{G_k}(a_p)\right| \leq f_k\binom{a_p}{a_q} \leq \sum f_n\binom{a_p}{a_q} = d^I\binom{a_p}{a_q} - d\binom{a_p}{a_q}$de C, donc $f^{G_k}(a_n)$ bornée donc $a \in G_k$.

7 Partition de l'unité

Soit E un evn recouvert par un nombre fini d'ouverts $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Exhiber des applications continues φ_i de E dans $[0,1]$ tels que $\operatorname{Supp}\varphi_i \subset \Omega_i$ *et* $\sum \varphi_i = 1$.

On rappelle que le support *d'une application f est par définition*

$$\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in E \ ; \ f(x) \neq 0\}}.$$

Solution proposée.

L'énoncé demande deux choses : une restriction des supports et une normalisation.

Concernant les supports, peut-on déjà trouver un φ_i tel que $\operatorname{Supp}\varphi_i \subset \Omega_i$? Une condition plus maniable (mais plus faible) est que φ_i s'annule en dehors de Ω_i : on pense alors à la distance δ_i au complémentaire ${}^c\Omega_i$

de Ω_i (qui est continue car 1-lipschitzienne). Malheureusement, les conditions sur les supports ne seraient pas vérifiées :

$$\Omega_i \subset \{x \in E \ ; \ \delta_i(x) \neq 0\} \implies \overline{\Omega_i} \subset \operatorname{Supp} \delta_i.$$

On va par conséquent *réduire* le support de δ_i à l'aide d'une perturbation : on pose

$$\varphi_i := \max\{\delta_i - \varepsilon, 0\}$$

où l'application ε sera à choisir convenablement.

Il est naturel d'imposer $\varepsilon > 0$ pour *vraiment* réduire les supports :

$$\operatorname{Supp} \varphi_i = \overline{\{x \in E \ ; \ \delta_i(x) > \varepsilon(x)\}} \subset \{x \in E \ ; \ \delta_i(x) \geq \varepsilon(x)\} \subset \{x \in E \ ; \ \delta_i(x) > 0\} \subset \Omega_i.$$

Voyons à présent les problèmes liés à la normalisation. Ce que l'on souhaite, c'est que $\sum \varphi_i$ ne s'annule jamais (pour pouvoir diviser par $\sum \varphi_i$), autrement dit que pour tout x il y ait un indice i tel que $\varphi_i(x) > 0$, *i. e.* $\delta_i(x) > \varepsilon(x)$. Si cela était faux, il y aurait un x_0 tel que $\sum \delta_i(x_0) \leq n\varepsilon(x_0)$, ce qui incite, afin d'exclure ce cas, à poser

$$\varepsilon = \lambda \sum \delta_i$$

où $\lambda > 0$ est un scalaire tel que $\lambda n < 1$. En effet, le cas pénible impliquerait alors (sous réserve de la condition $\varepsilon > 0$)

$$\varepsilon(x_0) = \lambda \sum \delta_i(x_0) \leq \lambda \, n\varepsilon(x_0) < \varepsilon(x_0), \text{ \textit{absurde.}}$$

Est-ce que ce choix de ε est bien toujours > 0 ? Tout vecteur x étant dans un des Ω_i puisque ces derniers recouvrent E, on a $x \notin {}^c\Omega_i$ pour ce i, *i. e.* $\delta_i(x) > 0$ puisque ${}^c\Omega_i$ est fermé, *CQFD*.

C'est terminé !

8 Une description des compacts d'un evn

On sait que l'ensemble des termes d'une suite convergente d'un evn union sa limite est un compact. On montre par ailleurs (*cf.* exercice 5) que l'enveloppe convexe $\operatorname{Conv} K$ d'un compact K d'un Banach est d'adhérence compacte. Nous allons montrer qu'en fait tous les compacts d'un evn peuvent être recouverts de cette manière.

Soit K un compact d'un evn E, que l'on supposera inclus dans $\mathbb{B}$ quitte à composer par un homothétie.

1. *Construire par récurrence des parties finies $A_1, ..., A_n$ de E telles que*

$$A_n \subset \frac{\mathbb{B}}{2^n} \text{ et } K \subset \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2^2} + ... + \frac{A_n}{2^n} + \frac{\mathbb{B}}{4^{n+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

2. *En déduire l'existence d'une suite (x_n) telle que $K \subset \overline{\operatorname{Conv}\{x_n\}}$.*

Solution proposée.

1. Pour $n = 0$, la seule condition à vérifier est $K \subset \mathbb{B}$, ce qui est présupposé.

   Supposons à présent construits $A_1, ..., A_n$ avec les conditions de l'énoncé[5]. Tout vecteur $k \in K$ s'écrit donc

$$k = \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} + \varepsilon \text{ avec } \|\varepsilon\| < \frac{1}{4^{n+1}}.$$

   Montrer que $\varepsilon \in A + \frac{1}{4^{n+2}}\mathbb{B}$ pour une certaine partie finie $A \subset \frac{1}{4^n}\mathbb{B}$ indépendante de $k \in K$: cela conclura puisqu'en posant $A_{n+1} = 2^{n+1}A$ on aura alors

$$\begin{aligned} K &\subset \frac{A_1}{2} + ... + \frac{A_n}{2^n} + \frac{A_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}}\mathbb{B} \\ \text{avec } A_{n+1} &= 2^{n+1}A \subset 2^{n+1}\frac{1}{4^n}\mathbb{B} = \frac{1}{2^{n+1}}\mathbb{B}, \text{ \textit{CQFD}} \end{aligned}$$

[5] Les coefficients devant les parties ne tombent pas du ciel, on s'est arrangé pour qu'ils marchent et il n'est pas bien dur de retrouver la démarche qui nous y a amené.

Or, en isolant ε, on observe que $\varepsilon = k - \frac{a_1}{2} - ... - \frac{a_n}{2^n}$ appartient à la partie

$$K' := \left(K - \frac{A_1}{2} - ... - \frac{A_n}{2^n}\right) \cap \frac{1}{4^{n+1}}\overline{\mathbb{B}}.$$

Les A_i étant finis, ils sont compacts, de sorte que la somme du compact K et du compact $\sum_{i=1}^{n} \frac{-A_i}{2^i}$ est compacte, d'où la compacité de K' dans $\frac{1}{4^{n+1}}\overline{\mathbb{B}}$. K' est en particulier précompact, donc on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{4^{n+2}}$ et de centre dans K', mettons $K' \subset A + \frac{1}{4^{n+2}}\mathbb{B}$ où A est fini et inclus dans $K' \subset \frac{1}{4^{n+1}}\mathbb{B}$. Puisque ε est dans K', il est dans $A + \frac{1}{4^{n+1}}\mathbb{B}$ comme souhaité, ce qui conclut la récurrence.

2. Décrivons les parties A_n par extension, disons $A_n = \left\{a_1^n, ..., a_{p_n}^n\right\}$, et posons

$$(x_0, x_1, x_2, ...) = \left(0, a_1^1, ..., a_{p_1}^1, a_1^2, ..., a_{p_2}^2, ..., a_1^n, ..., a_{p_n}^n, ...\right)$$

(on met les A_n bout à bout en commençant par un 0). Il est alors clair, au vu de la condition $A_n \subset \frac{1}{2^n}\mathbb{B}$, que $x_n \longrightarrow 0$. D'autre part, tout $k \in K$ s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$k = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} x_{k_i}\right) + \frac{1}{2^n} 0}_{\in \operatorname{Conv}\{x_n\}} + \varepsilon_n$$

pour certains $x_{k_i} \in A_i$ et avec $\|\varepsilon_n\| < \frac{1}{4^{n+1}} \overset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre l'inclusion $K \subset \overline{\operatorname{Conv}\{x_n\}}$ cherchée.

9 Théorème du point fixe de Schauder par Brouwer, théorème de Cauchy-Peano

On admettra le théorème du point fixe de Brouwer qui affirme qu'une application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe. On le démontre dans la feuille de combinatoire, grâce à l'élégant lemme de Sperner.

On admettra de même l'existence d'une projection orthogonale (continue) sur un corps convexe d'un Hilbert (*cf.* feuille sur les Banach).

1. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue stabilisant K. Montrer à l'aide de Brouwer que f admet un point fixe dans K.*
2. *Soit C un convexe fermé non vide d'un evn et f une application continue stabilisant C. Si $f(C)$ est d'adhérence compacte, montrer que f admet un point fixe sur C.*

Solution proposée.

1. K est compact, donc borné, donc inclus dans une boule $r\mathbb{B}$. Supposons $r \leq 1$ dans un premier temps. En considérant la projection orthogonale p sur le corps convexe K du Hilbert $\mathbb{R}^n$, l'application continue $f \circ p$ envoie $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$, donc admet un point fixe a par Brouwer. On a alors $a = f(p(a)) \in K$ car f est à image dans K, d'où $p(a) = a$ et $f(a) = a$.

   Pour $r > 1$, on applique ce qui précède à $\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{K}{r} & \longrightarrow & \frac{K}{r} \\ x & \longmapsto & \frac{f(rx)}{r} \end{array} \right.$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. $f(C)$ est d'adhérence compacte, donc précompacte, donc on peut la recouvrir par des boules de rayon ε, disons $f(C) \subset \bigcup_{i=1,...,n} a_i + \varepsilon\mathbb{B}$. Pour se ramener à la dimension finie, on considère l'application continue

$$p_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\overrightarrow{a_i x}\|}{\sum_{j=1}^{n} \|\overrightarrow{a_j x}\|} a_i$$

à image dans $C \cap \operatorname{Conv}\{a_1, ..., a_n\}$, intersection d'un fermé convexe non vide et d'un corps convexe, donc un corps convexe K_ε. Le fait d'être inclus dans $\operatorname{Vect}\{a_1, ..., a_n\}$ assure à K_ε de pouvoir être vu comme un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Observer de plus que pour tout vecteur x on a

$$\|p_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\overrightarrow{a_i x}\|}{\sum_{j=1}^{n} \|\overrightarrow{a_j x}\|} a_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\overrightarrow{a_i x}\|}{\sum_{j=1}^{n} \|\overrightarrow{a_j x}\|} x \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\overrightarrow{a_i x}\|}{\sum_{j=1}^{n} \|\overrightarrow{a_j x}\|} \underbrace{\|a_i - x\|}_{<\varepsilon} < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, l'application continue $p_{\frac{1}{n}} \circ f$ stabilise $K_{\frac{1}{n}}$, donc admet un point fixe a_n par le premier point, lequel doit vérifier

$$\|a_n - f(a_n)\| = \left\|p_{\frac{1}{n}}(f(a_n)) - f(a_n)\right\| < \frac{1}{n}.$$

Quitte à extraire dans le compact $\overline{f(C)}$, on peut supposer $f(a_n)$ convergente dans C vers un $a \in C$. Alors $a_n \longrightarrow a$ par l'inégalité ci-dessus, d'où par continuité $a = \lim f(a_n) = f(a)$.

Remarque. Schauder permet d'affirmer que toute application continue d'un corps convexe dans lui-même admet un point fixe. Ce résultat est utilisé dans l'exercice suivant.

10 Théorème de Cauchy-Peano par Schauder

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue où $\left\{ \begin{array}{l} I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \\ \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \end{array} \right.$.

Étant donné $(t_0, \omega_0) \in I \times \Omega$, on veut montrer que l'équation $X'(t) = f(t, X(t))$ admet une solution $X : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \Omega \\ t_0 & \longmapsto & \omega_0 \end{array} \right.$ définie au voisinage de t_0.

Quitte à translater, on prendra $(t_0, \omega_0) = (0, 0)$.

1. *Montrer que, pour tout $r > 0$, on peut choisir un $M > 0$ tel que, en notant* $\left\{ \begin{array}{l} B := r\overline{\mathbb{B}} \\ J := \left[-\frac{r}{M}, \frac{r}{M}\right] \end{array} \right.$ *, on ait*

$$J \subset I \text{ et } \sup_{J \times B} \|f\| \leq M.$$

On note $\mathcal{K} := \left\{ X : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & B \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array} \right. M\text{-lipschitzienne} \right\}$ et on pose

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ X & \longmapsto & t \mapsto \int_0^t f(\cdot, X(\cdot)) \end{array} \right. .$$

2. *Montrer que F est bien définie*
3. *Montrer que F est continue.*
4. *Conclure.*

Solution proposée.

1. Fixons un $r > 0$. On choisit un $M > 0$ tel que $\left[-\frac{r}{M}, \frac{r}{M}\right] \subset I$. Si $M' := \sup_{J \times B} \|f\|$ est $\leq M$, on ne fait rien, sinon on remplace M par M' : cela rapetisse J, donc fait diminuer le supremum sur $J \times B$.
2. Soit $X \in \mathcal{K}$ et $t, u, v \in J$.
   Il est déjà clair que $F(X)(0) = 0$.
   Ensuite, l'image de $F(X)$ tombe bien dans B :

$$\|F(X)(t)\| \leq \int_0^t \|f(\cdot, X(\cdot))\| \leq \int_0^t M = Mt \leq r.$$

   Enfin, le caractère M-lipschitzien s'établit aisément :

$$\|F(X)(u) - F(X)(v)\| \leq \int_u^v \|F(?)\| \leq M|u - v|.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $J \times B$, donc il y a un $\delta > 0$ pour lequel
$$\|X - Y\|_\infty < \delta \implies \|f(\cdot, X(\cdot)) - f(\cdot, Y(\cdot))\| < \varepsilon.$$
Pour de tels X, Y, on aura pour tout $t \in J$
$$\|F(X)(t) - F(Y)(t)\| \leq \int_0^t \underbrace{\|f(\cdot, X(\cdot)) - f(\cdot, Y(\cdot))\|}_{<\varepsilon} \leq \varepsilon t \leq \varepsilon r,$$
d'où, quitte à remplacer rétrospectivement ε par $\frac{\varepsilon}{r}$, l'inégalité voulue en faisant varier t :
$$\|F(X) - F(Y)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

4. Pour conclure, il suffit (afin d'appliquer le théorème de Schauder) de montrer de $\mathcal{K}$ est un corps convexe. Il est non vide car contient la solution nulle. Il est convexe car, d'une part l'ensemble d'arrivée B est convexe, d'autre part la M-lipschitzianité et la propriété $0 \mapsto 0$ passent au barycentre. Par ailleurs, K est clairement fermé et équicontinu, donc compact par Ascoli.

11 Les applications préservant la convergence des séries sont celles linéaires continues autour de l'origine

Soit E evn.

1. *Montrer qu'une application linéaire continue préserve la convergence des séries :*
$$f \in L_c(E) \Longrightarrow \left[\left(\sum a_n \text{ converge}\right) \implies \left(\sum f(a_n) \text{ converge}\right)\right].$$
Même question si f n'est linéaire continue que sur un voisinage de l'origine – c'est-à-dire s'il y a un voisinage V de 0 tel que
$$\sup_{\substack{a \in V \\ a \neq 0}} \frac{\|f(a)\|}{\|a\|} < \infty \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall a, b \in V,\ \lambda a + b \in V \Longrightarrow f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b).$$

2. *Montrer que de toute suite de limite nulle on peut extraire une sous-suite convergeant en série :*
$$a_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \left(\exists \varphi \text{ extractrice}, \sum a_{\varphi(n)} \text{ converge}\right).$$

3. *Montrer qu'une application préservant la convergence des séries est linéaire continue sur un voisinage de l'origine.*

Solution proposée.

1. $\sum a_n$ cv vers S. Alors $\|f(S) - \sum_1^n f(a_i)\| = \|f(S - \sum_1^n a_i)\| \leq |||f|||\ \|S - \sum_1^n a_i\| \longrightarrow 0$

Même idée mais il faut ruser pour pouvoir utiliser l'additivité de f. APCR N le TG et le reste est dans V. Montrons que $\sum f(a_n) \longrightarrow \sum_1^N f(a_i) + f\left(\sum_{i>N} a_i\right)$:

pour $n > N$, on a $\left\|f\left(S - \sum_1^N a_i\right) - \sum_{i>N}^n f(a_i)\right\| = \left\|f\left(S - \sum_1^n a_i\right)\right\| \leq |||f|||\ \left\|S - \sum_1^N a_i\right\| \longrightarrow 0$, *CQFD.*

2. Notons (a_n) une suite de limite nulle.

Si les a_n engendrent un sev de dimension finie, ce dernier est complet : on extrait alors une sous-suite $a_{\varphi(n)}$ sommable (par exemple telle que $\|a_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{n^2}$), d'où par complétude la convergence de la série $\sum a_{\varphi(n)}$.

Dans le cas contraire, on peut quitte à extraire supposer les a_n libres. Alors la suite $b_n := \frac{1}{n}\frac{a_n}{\|a_n\|}$ converge (vers 0), donc la série $\sum \underbrace{b_n - b_{n-1}}_{:=c_n}$ converge (vers 0). On extrait à nouveau de sorte que $\|a_{\varphi(n)}\| < \|c_n\|$. Puisque les b_n sont libres, les c_n le sont aussi : on peut donc définir une application linéaire f qui envoit c_n sur $a_{\varphi(n)}$ et qui est nulle sur un supplémentaire de $\operatorname{Vect} a_n$. La dernière inégalité montre que f est continue (de norme ≤ 1), d'où (d'après 1) la convergenc de la série $\sum f(c_n) = \sum a_{\varphi(n)}$, ce qui conclut. ? ? ?Récrire dans le sens recherche ? ? ?

3. Mq $f(0) = 0$. PUisque $\sum 0$ cv, on a $\sum f(0)$ cv, donc le TG $f(0)$ tend vers 0, ce qui montre $f(0) = 0$.

Mq f continue en de 0 Soit apr l'absurde $a_n \longrightarrow 0$ avec $\|f(a_n)\| > \varepsilon_0$. Quitte à extraire (d'après 2), OPS $\sum a_n$ cv, donc $\sum f(a_n)$ cv, donc le TG $f(a_n)$ tend vers 0, abs.

Mq f impair autour de 0. Soit par l'absudre $a_n \longrightarrow 0$ tq $f(a_n) + f(-a_n) \neq 0$. On considère la série de terme général $(a_n, -a_n)$ répété N_n fois de sorte que $N_n \|f(a_n) + f(-a_n)\| > 1$. La série des sommes partielles paire est nulle, celle de terme impair vaut a_n (avec répétition) qui tend vers 0, donc la série converge (vers 0), donc la série image converge, donc (par extraction) la série des paquest images converge, donc son TG $N_n(f(a_n) + f(-a_n))$ tend vers 0, or il est de norme > 1, absurde.

Mq f additive autour de 0, ie $\exists V,\ \forall^2 a, b \in V,\ a + b \in V \implies f(a+b) = f(a) + f(b)$. Supp absurde $\forall V_n, \exists a_n, b_n \in V, a_n + b_n \in V_n$ et $f(a_n + b_n) \neq f(a_n) + f(b_n)$, ied $\exists^3 a_n, b_n, a_n + b_n \longrightarrow 0$ tq $f(a_n + b_n) \neq f(a_n) + f(b_n)$. OPS V_n assez petit où f impaire. On considère alors la série de TG $(a_n + b_n, -a_n, -b_n)$ répétée N_n fois. On montre de même une contradiction.

De l'additivité découle $f\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{f(a)}{n}$ pour a assez petit et n entier, puis f $\mathbb{Q}$linéaire autour de 0, d'où par continuité f $\mathbb{K}$-linéaire autour de 0, *CQFD*.

12 Connexité

Connectité de Q^2, $(R \setminus Q)^2$, $R^2 \setminus Q^2$. Le premier est séparé en deux bouts par $y = \sqrt{2}$, le second par $y = 0$, le troisième est connexe par ligne brisée (et même horitale verticales)

est-ce que $\left\{(a,b) \in C\ ;\ \chi_Q(a) + \chi_Q(b) = 0\right\}$ est cpa ?
oui, étoilé par lignes brisées infinies en 0

13 Chemin CPA injectif

cf D&D, cas C^1 ne nécesite pas Zorn