Séries de Fourier

Marc SAGE

<2015

Table des matières

1 TF discrète **2**

2 "Noyau" d'un opérateur **2**

3 Problème de Cantor **3**

4 Opérateurs compacts **3**

histoire : intérêt pour chaleur, loin des controverses métaphisques, d'où équatio de newton pour chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = Cste\ \Delta T$. Lien avec cordes vibrantes : "Si l'ordre qui s'établit dans tous les phénomènes de propagation de la chaleur pouvait être saisi par nos sens ces phénomènes nous causeraient une impression comparable à celle des résonances harmoniques."

intro TF discrete, en parle sur R, sur Z, puis finalment sur le cercle (groupe loc compact)
Seul problème, dans les deux premiers cas on a l'idée fausse que les fréquences vivent dans le même espace que la variable de "temps". On peut circonvenir au problème en ne démontrant qu'incidemment qu'un groupe fini a le même cardinal que son groupe des fréquences (en insistant sur le fait que l'isomorphisme entre les deux n'est pas unique).

Th Carleson : tout fonction périodique L^2 vaut sa série de Fourier en presque tout point

intro Randé/Tosel bien sur les hilbert

poser $a_0' = \frac{a_0}{2}$ et $\omega := \frac{2\pi}{T}$ joliifie les formules ($e_n\left(t\right) = e^{in\omega t}$)

prendre des séries de Fourier à valeurs dans un banach / hilbert ? ? ? ?

1 TF discrète

cf Monasse :
parle aussi du produit de convolution.
neutre $= \left|G\right| \delta$ tend vers un gros Dirac lorsque $\left|G\right| \longrightarrow \infty$
$\widehat{\widehat{f}}$?

2 "Noyau" d'un opérateur

Disons que quand tu as deux espaces E_1 et E_2 (par exemple deux variétés différentielles), tu te donnes une distribution K sur $D_1 \times D_2$, tu peux définir un opérateur T comme :

$$\begin{array}{ccc} D\left(E_1\right) & \longrightarrow & D'\left(E_2\right) \\ u & \longmapsto & \int_{D_1} K\left(x,\cdot\right) u\left(x\right) dx \end{array}.$$

Il me semble que l'on peut montrer que tous les opérateurs de $D(E_1)$ dans $D'(E_2)$ sont de cette forme. Ainsi, on peut toujours parler du noyau d'un opérateur.
Dans une telle situation, tu dis que K est le noyau de l'opérateur.
Quand le noyau est de la forme $K(x;y) = h(x-y)$ (ce qui est le cas des noyaux que tu cites), on parle de noyau de convolution.

20 04 2006, 03h07

3 Problème de Cantor

Citation de Dieudonné (pages 209-10) où l'on adapte le langage réel->complexe et les périodes

Il se peut qu'une série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} c_n e^{inx}$ soit *convergente* (mais non absolument convergente) pour tout $x \in \mathbb{R}$; mais sa somme $f(x)$ n'est pas nécessairement continue, et les intégrales $\int f(x)\, e^{inx} dx$ peuvent n'avoir aucun sens ; c'est par exemple le cas de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{\sqrt{\ln n}}$. La notion de série trigonométrique est donc plus générale que celle de série de Fourier. Ele fut considérée d'abord par Riemann, qui put prouver le théorème suivant : si la série $\sum_{n\geq 0} c_n e^{inx}$ converge pour tout x et a pour somme 0, alors les coefficients c_n sont tous nuls. Cantor se demanda si cette concluion est ncore vrie lorsqu'on supose que la série $\sum_{n\geq 0} c_n e^{inx}$ converge et a pour somme 0 *sauf aux points d'un ensemble* E ; c'est ce qui l'amena à l'étude des parties quelconques de $\mathbb{R}$, en particulier du point de vue de leur structure d'ordre ou de leur topologie. Mais il abandonna très vite son problème initial, qui n'est toujours pas complètement résolu.

4 Opérateurs compacts

Soit u un opérateur continu tel que

$$\begin{aligned} H &= \overline{\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u}^{\perp} H_\lambda} \\ \forall \lambda &\in \operatorname{Sp} u,\ \dim H_\lambda < \infty \\ \forall \varepsilon &> 0,\ \{\lambda \in \operatorname{Sp} u \ ;\ |\lambda| > \varepsilon\} \text{ fini} \end{aligned}$$

Montrons que u est autoadjoint et compact.

Montrons déjà que u est autoadjoint sur $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} H_\lambda$; la continuité de u permettra de passer à H tout entier. Soit $\begin{array}{c} a = \sum \alpha_\lambda \\ b = \sum \beta_\lambda \end{array}$ deux éléments de $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} H_\lambda$. Alors $\langle u(a) \mid b \rangle = \sum \lambda \alpha_\lambda \beta_\lambda = \langle u(a) \mid b \rangle$ car la somme $\bigoplus H_\lambda$ est orthogonale, CQFD.

Soit (a^n) une suite bornée, mettons par M. Montrons que l'on peut extraire de $u(a^n)$ une sous-suite convergente.

Il suffit de montrer le résultat pour toute suite restant dans $\bigoplus H_\lambda$. En effet, si on peut le faire, alors a^n s'approche par un b^n dans $\bigoplus H_\lambda$ à $\frac{1}{n}$ près avec une sous-suite $u\left(b^{\varphi(n)}\right) \longrightarrow l$. Alors

$$\left\| u\left(a^{\varphi(n)}\right) - u\left(b^{\varphi(n)}\right) \right\| \leq |||u||| \left\| a^{\varphi(n)} - b^{\varphi(n)} \right\| \leq \frac{|||u|||}{\varphi(n)} \longrightarrow 0, \text{ d'où } u\left(a^{\varphi(n)}\right) \longrightarrow l, \text{ CQFD.}$$

Les hypothèses permettent d'écrire

$$\operatorname{Sp} u = \{0\} \cup \bigcup_{n\geq 1} \underbrace{\left\{\lambda \in \operatorname{Sp} u \ ;\ |\lambda| > \frac{1}{n}\right\}}_{\text{fini}}$$

donc $\operatorname{Sp} u$ est dénombrable, mettons $\operatorname{Sp} u = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$. Mieux : $\lambda_n \longrightarrow 0$, sinon il y aurait une sous-suite (donc une infinité de λ_i) hors d'un petit disque centré en 0.

Chaque a^n se décompose alors comme une somme finie

$$a^n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + ... + \alpha_{k_n}^n$$

avec $\alpha_i^n \in H_{\lambda_i}$ pour tout n et pour tout $i \leq k_n$. Quitte à rajouter des termes nuls, on peut prendre (k_n) strictement croissante. On voit poindre un argument diagonal...

En prenant la norme, il vient

$$\forall n,\ \forall i \leq k_n,\ \|\alpha_i^n\| \leq \sqrt{\|\alpha_1^n\|^2 + \|\alpha_2^n\|^2 + ... + \left\|\alpha_{k_n}^n\right\|^2} = \|a^n\| < M,$$

majoration uniforme en n et i. Comme par ailleurs chaque H_{λ_i} est de dimension finie, on peut extraire $\alpha_1^{\varphi_1(n)} \longrightarrow \alpha_1$, puis $\alpha_2^{\varphi_1\varphi_2(n)} \longrightarrow \alpha_2$, etc..., et on pose $\psi(n) = \varphi_1 ... \varphi_n(n)$. Puisque $u(a^n)$ s'écrit

$$u(a^n) = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + ... + \lambda_{k_n} a_{k_n}^n,$$

on intuite que $u\left(a^{\psi(n)}\right)$ va converge vers $\sum_{i\geq 1} \lambda_i \alpha_i$.

Déjà, cette dernière expression a un sens car la série vérifie le critère de Cauchy (on est dans un complet !) :

$$\left\| \sum_{p\leq i\leq q} \lambda_i \alpha_i \right\|^2 = \sum_{p\leq i\leq q} |\lambda_i|^2 \|\alpha_i\|^2 \leq M \sup_{i\geq p} |\lambda_i|^2 \overset{p\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque $k_n \longrightarrow \infty$, on a $\lambda_{k_n} \longrightarrow 0$, donc il y a un rang N tel que $n > N \implies |\lambda_{k_n}| < \varepsilon$. On a alors,

$$\begin{aligned} u\left(a^{\psi(n)}\right) &= \lambda_1 \alpha_1^{\psi(n)} + \lambda_2 \alpha_2^{\psi(n)} + ... + \lambda_{k_{\psi(n)}} \alpha_{k_{\psi(n)}}^{\psi(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \alpha_i^{\psi(n)} + \sum_{i>N}^{k_{\psi(n)}} \lambda_i \alpha_i^{\psi(n)}. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $\sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha_i$, tandis que la norme du second vaut

$$\sqrt{\sum_{i>N}^{k_{\psi(n)}} |\lambda_i|^2 \left\|\alpha_i^{\psi(n)}\right\|^2} \leq \varepsilon \cdot \sqrt{\sum_{1}^{k_{\psi(n)}} \left\|\alpha_i^{\psi(n)}\right\|^2} = \varepsilon \left\|a^{\psi(n)}\right\| < \varepsilon M.$$

On en déduit

$$\left\| u\left(a^{\psi(n)}\right) - \sum_{i\geq 1} \lambda_i \alpha_i \right\| \leq \underbrace{\left\| u\left(a^{\psi(n)}\right) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \alpha_i \right\|}_{<\varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}} + \underbrace{\left\| \sum_{i>N} \lambda_i \alpha_i \right\|}_{<\varepsilon \text{ pour } N \text{ assez grand}}$$

Général : si f linéiare continue admet une base hilbertienne (e_n) de vecteurs propres, son spectre est exactement les λ_n, et les sep associés sont les $H_\lambda = \mathrm{Vect}_{\lambda_n=\lambda}\, e_n$ (qui sont de dim finie si $\lambda_n \longrightarrow 0$). Soit en effet λ vp, $fx = \lambda x$. On décompose $x = \sum x_n e_n$. Alors $0 = fx - \lambda x = \sum x_n (\lambda - \lambda_n) e_n$, d'où un n tel que $\lambda = \lambda_n$ (sinon $x = 0$).

Exemple : opérateur de convolution L^2. (cf. bouquin archi classique, noyau compact, Fredholm, tout ça...)

Les e_n sont une base hilbertienne de vecteurs propres pour $f * \cdot$, de valeurs propres associées $c_n(f) \longrightarrow 0$. On a donc $\overline{\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}\, u} H_\lambda} = \overline{\bigoplus_n R \cdot e_n} = H$. Cela suffit à montrer que $f * \cdot$ est auto-adjoint de spectre $c_n(f)$, d'où le nom des coefficients de Fourier (spectre) !