Séries entières
(version quasi-achevée)

Marc SAGE

22 avril 2007

Table des matières

page 14, on trouve effectivement : « Lorsqu'une fonction est continue, monotrope, et a une dérivée, quand la variable se meut dans une certaine partie du plan, nous dirons qu'elle est *holomorphe* dans cette partie du plan. Nous indiquons par cette dénomination qu'elle est semblable aux fonctions entières qui jouissent de ces propriétés dans toute l'étendue du plan. »

[1] Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques. 2e édition,
Gauthier-Villars, Paris, 1875.

développer un réel avec suite d'enteirs <—> dévelopepr une fonction avec suite de rélles
rappoart séries entière / séries de Fourier

Réciproquement, si f est une fonction harmonique à valeurs réelles, on peut prouver que f est localement la poartie réelle d'une fonction holomorphe : c'est pourquoi fonctions harmoniques et fonctions holomorphes possèdent souvent les mêmes propriétes : propriété de la moyenne, principe du maximum, ou principe du prolongement analytique.

Cercle de convergence : mauvaise terminologie –> *cercle d'incertitude* :-)

Pour définir le rayon de convergence, on s'attend à avoir $R = \sup\{r \geq 0 \ ; \ \sum a_n r^n \text{ cv a}\}$.
Prop : R est aussi le sup des ensembles $\{r \geq 0 \ ; \ a_n r^n = o(1)\}$ et $\{r \geq 0 \ ; \ a_n r^n = O(1)\}$
Dem : on a les inclusion $\subset\subset$ claires. Il suffit de montrer que $a_n r_0^n = O(1) \implies \forall r < r_0, \ \sum a_n r^n$ cva

1 Généralités

Définition.
On appelle série entière *sur* $\mathbb{C}$ *toute suite de fonctions* $\left(z \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On note usuellement* $\sum a_n z^n$ *quand il n'y a pas ambiguïté.*
On appelle rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *le nombre*

$$R(a_n z^n) = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \text{ tel que la suite } (a_n \rho^n) \text{ soit bornée}\}.$$

On appelle disque (ouvert) de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *l'ensemble des complexes* z *de module* $|z| < R(a_n z^n)$.

Remarquer que le rayon de convergence ne dépend pas de l'indice de commencement de la série entière, seul compte le comportement à l'infini. Noter également que $R(a_n z^n) = R(|a_n| z^n)$, seul le module des coefficients de la série entière intervient.
S'il n'y a pas ambiguïté, on notera $R(a_n)$ ou même R pour $R(a_n z^n)$.

Propriétés.
• Si z est un complexe tel que $|z| > R(a_n)$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
• Si z est un complexe tel que $|z| < R(a_n)$, alors $(a_n z^n)$ est bornée (et même tend vers 0).

Démonstration.
• Le premier point est trivial par contraposée et par définition du sup.
• Soit z un complexe tel que $|z| < R(a_n)$. Par propriété du sup, il existe un réel ρ tel que $|z| < \rho \leq R$ et $(a_n \rho^n)$ bornée, d'où $a_n z^n = a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n = O(1)\, o(1) = o(1)$, c'est-à-dire $(a_n z^n)$ tend vers 0.
Attention aux inégalités strictes, le fait étant qu'a priori on ne sait rien de la suite $(a_n z^n)$ quand $|z| = R$.

La proposition suivante justifie les termes de rayon et disque de convergence.

Proposition fondamentale.
• *Pour* $|z| < R(a_n)$, *la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*
• *Pour* $|z| > R(a_n)$, *la série* $\sum a_n z^n$ *diverge.*

Démonstration.

• Soit z un complexe de module $|z| < R$, et ρ un réel entre les deux $((|z| < \rho < R)$. On a $a_n z^n = a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n = O(1)\ \varepsilon^n$ avec $|\varepsilon| = \frac{|z|}{\rho} < 1$, donc la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

• Soit z un complexe de module $|z| > R$. Alors la suite $(a_n \rho^n)$ n'est pas bornée, donc ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n z^n$ ne peut converger.

Dans le cas où $R = \infty$, la série entière est donc définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.

La propostion ne dit pas ce qui se passe sur la frontière du disque de convergence ; c'est là que réside toute la difficulté des séries entières.

On peut cependant trouver de nombreuses propriétés à l'intérieur du disque, en particulier sur la continuité de la série entière.

2 Caractère $\mathcal{C}^\infty$ des séries entières

On utilisera la notation $u_n \preccurlyeq v_n$, qui signifie juste $u_n = O(v_n)$.

Beaucoup des démonstrations qui suivent sont basées sur un même schéma, qu'il est donc important de retenir au-delà des résutats eux-mêmes : pour montrer que $R(a_n) \leq R\ (b_n)$, on prend un complexe z de module $|z| < R(a_n)$, on bidouille pour obtenir $|z| \leq R(b_n)$, puis on passe au sup sur les z considérés.

Lemme 1.

Si (γ_n) est une suite de coefficients complexes vérifiant

$$1 \preccurlyeq \gamma_n \preccurlyeq \theta^n \text{ pour tout complexe de module } |\theta| > 1,$$

alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est inchangé par pondération des coefficients a_n par les γ_n, i.e.

$$R(\gamma_n\ a_n) = R(a_n).$$

Démonstration.

• Soit z un complexe de module $|z| < R(\gamma_n a_n)$. Alors $a_n z^n = a_n\ 1\ z^n \preccurlyeq a_n\ \gamma_n\ z^n \preccurlyeq 1$, d'où $a_n z^n$ bornée, et $|z| \leq R(a_n)$. Il en résulte $R(\gamma_n a_n z^n) \leq R(a_n z^n)$ en prenant le sup sur les $|z| < R(\gamma_n a_n)$.

• Soit z un complexe de module $|z| < R(a_n)$, et ρ un réel entre les deux $(|z| < \rho < R)$. Alors $\gamma_n a_n z^n = \gamma_n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n a_n \rho^n \preccurlyeq \left(\frac{\rho}{z}\right)^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n 1 = 1$, d'où $\gamma_n a_n z^n$ bornée, et $|z| \leq R(\gamma_n a_n)$. Il en résulte $R(a_n) \leq R(\gamma_n a_n)$ en prenant le sup sur les $|z| < R(a_n)$.

Lemme 2.

Le rayon d'une série entière reste inchangé par translation des coefficients, i.e.

$$R(a_n z^n) = R\left(a_n z^{n-1}\right).$$

Démonstration.

Soit z un complexe de module $|z| < R(a_n z^n)$. Alors la suite $(a_n z^n)$ est bornée, donc ou bien $z = 0$, ou bien $\left(a_n z^{n-1}\right)$ est bornée, et dans les deux cas on en tire $|z| \leq R\left(a_n z^{n-1}\right)$. Il en résulte $R(a_n z^n) \leq R\left(a_n z^{n-1}\right)$. L'autre sens de fait de manière strictement analogue.

Corollaire.

Quand on dérive terme à terme une série entière, le rayon reste inchangé :

$$R(a_n z^n) = R\left(n a_n z^{n-1}\right).$$

Démonstration.
Puisque $1 \preccurlyeq n \preccurlyeq \theta^n$ pour tout complexe de module $|\theta| > 1$, on a $R(a_n z^n) = R(na_n z^n) = R\left(na_n z^{n-1}\right)$ en appliquant les deux lemmes.

Proposition.
La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque de convergence.

Démonstration.
Soit K un compact du disque de convergence de $\sum a_n z^n$ (par exemple, un disque fermé de rayon $r < R$). Puisque K est compact, il atteint son sup r_0 (pour la norme euclidienne), lequel est a fortiori dans le disque de convergence, d'où $r_0 < R$. On a ainsi montré que K est inclus dans un disque fermé de rayon $r_0 < R$.

Soit maintenant ρ un réel tel que $r_0 < \rho < R$, et M un majorant de $a_n \rho^n$. En se restreignant à K, on a $\sum_{n \geq 0} \|z \mapsto a_n z^n\|_\infty = \sum_{n \geq 0} |a_n| r_0^n \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| \rho^n \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \leq \sum_{n \geq 0} M \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n < \infty$, d'où la convergence normale sur K.

Attention à ne pas faire dire plus à cette proposition qu'elle n'en dit. En particulier, **il n'y a pas convergence normale sur le disque de convergence tout entier (même ouvert) !**
(notre intuition croit vicieusement que la convergence normale passe à la réunion mais cela est faux).

Corollaire 1.
La somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur son disque de convergence.

Démonstration.
En se plaçant sur un disque fermé de rayon $r_0 < R$, la série de fonctions continues $\sum (z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement, donc uniformément, donc la limite est continue. Le résultat étant vrai pour tout $r_0 < R$, la série entière est continue sur le disque de convergence tout entier.

Corollaire 2.
La somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ pour $|x| < R$, et on peut dériver/intégrer terme à terme.

Démonstration.
Identique à ci-dessus : on a convergence normale sur tout compact de $]-R, R[$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, donc les théorèmes sur les séries de fonctions s'appliquent.

3 Détermination pratique du rayon de convergence

Propriétés.
- *Si $a_n \preccurlyeq b_n$, alors $R(a_n) \geq R(b_n)$.*
- *Si $a_n \sim b_n$, alors $R(a_n) = R(b_n)$.*

Démonstration.
- Pour z complexe de module $|z| < R(b_n)$, on a $a_n z^n \preccurlyeq b_n z^n \preccurlyeq 1$, d'où $|z| \leq R(a_n)$. Il en résulte $R(b_n) \leq R(a_n)$.
- $a_n \sim b_n$ implique $a_n \preccurlyeq b_n$ et $b_n \preccurlyeq a_n$, et on applique le premier point.

Par la suite, on utilisera la convention $\frac{1}{0} = \infty$.

Propriétés.
- $R\left(\frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{1}{R(a_n)}$ *(si $a_n \neq 0$ pour n assez grand)* .

• $R\left(a_n z^{2n}\right) = \sqrt{R\left(a_n z^n\right)}$.
• *Si* $\coprod_{i\in I} X_i$ *est une partition* finie *de* $\mathbb{N}$*, alors*

$$R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right) = \min_{i\in I}\left\{R\left(\sum_{n\in X_i} a_n z^n\right)\right\} ;$$

En d'autres termes, si l'on découpe la série entière $\sum a_n z^n$ *en un nombre fini de (sous-)séries entières* $\sum_{n\in X_i} a_n z^n$*, la série de départ converge ssi toutes ses sous-séries convergent.*

Démonstration.
• Pour $z \neq 0$ complexe de module $|z| < R\left(\frac{1}{a_n}\right)$, la suite $\left(\frac{1}{a_n} z^n\right)$ tend vers 0, donc le terme $\left(|a_n| \left|\frac{1}{z}\right|^n\right)$ tend vers ∞ et a fortiori n'est pas borné, d'où $\left|\frac{1}{z}\right| \geq R(a_n)$, *i.e.* $|z| \leq \frac{1}{R(a_n)}$. Il en résulte $R\left(\frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{1}{R(a_n)}$.
• Pour z complexe de module $|z| < R\left(a_n z^{2n}\right)$, la suite $\left(a_n \left(z^2\right)^n\right)$ est bornée, donc $\left|z^2\right| \leq R(a_n)$ et $|z| \leq \sqrt{R(a_n)}$. Il en résulte $R\left(a_n z^{2n}\right) \leq \sqrt{R(a_n)}$.
D'autre part, pour z complexe de module $|z| < \sqrt{R(a_n)}$, on a $\left|z^2\right| < R(a_n)$, d'où $a_n \left(z^2\right)^n$ borné et donc $|z| \leq R\left(a_n z^{2n}\right)$. Il en résulte $\sqrt{R(a_n)} \leq R\left(a_n z^{2n}\right)$.
• Pour z complexe de module $|z| < R(a_n)$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée, donc pour tout $i \in I$ la suite $(a_n z^n)_{n\in X_i}$ est bornée, d'où $|z| \leq R\left((a_n z^n)_{n\in X_i}\right)$ pour tout $i \in I$, et $|z| \leq \min\left\{R\left((a_n z^n)_{n\in X_i}\right)\right\}$. Il en résulte $R(a_n) \leq \min\left\{R\left((a_n z^n)_{n\in X_i}\right)\right\}$.
Dans l'autre sens, soit z complexe de module $|z| < \min\left\{R\left((a_n z^n)_{n\in X_i}\right)\right\}$. Pour $i \in I$, la suite $(a_n z^n)_{n\in X_i}$ est bornée par un M_i, donc le terme $a_n z^n$ est bornée sur $\mathbb{N}$ par $\max M_i$ (car I fini), d'où $|z| \leq R(a_n)$. Il en résulte $\min\left\{R\left((a_n z^n)_{n\in X_i}\right)\right\} S \leq R(a_n)$.

On ne peut rien dire de plus de façon générale dans le premier cas.

Proposition importante.
• *Si* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *admet une limite* l*, alors* $R(a_n) = \frac{1}{l}$ *(critère de* D'Alembert*).*
• *Si* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *admet une limite* l*, alors* $R(a_n) = \frac{1}{l}$ *(critère de* Cauchy*).*

Démonstration.
• Pour z complexe quelconque, on a $\lim\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = l\,|z|$; on applique alors le critère de D'Alembert pour les séries numériques. Si $|z| > \frac{1}{l}$, *i.e.* $l\,|z| > 1$, la série $\sum |a_n z^n|$ diverge, donc $|z| \geq R(a_n)$, et il en résulte $\frac{1}{l} \geq R(a_n)$.Si $|z| < \frac{1}{l}$, *i.e.* $l\,|z| < 1$, la série $\sum |a_n z^n|$ converge, donc $a_n z^n$ est bornée, d'où $|z| \leq R(a_n)$, et $\frac{1}{l} \leq R(a_n)$.
• Même chose en applicant le critère de Cauchy pour les séries numériques.

Ces deux dernières critères sont en pratique les plus utilisés pour calculer des rayons de convergence.
Cependant, il peut arriver que les limites considérées n'existent pas ; on peut alors avoir recours à une formule explicite du rayon de convergence, ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

On rappelle que la *limite supérieure* d'une suite (a_n) d'élements de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est le sup dans $\overline{\mathbb{R}}$ des valeurs d'adhérence de la suite (a_n), noté $\overline{\lim}\,(a_n)$, que l'on peut définir de manière équivalente comme le nombre $\lim_{n\infty} \sup_{k>n} a_k$ (qui existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$ car $\sup_{k>n} a_k$ décroît en n).
On rappelle également que tout minorant d'une suite est inférieur à la limite supérieure de cette suite ($x \geq u_k$ pour tout $k \implies x \geq \sup_{k>n} u_k$ pour tout $n \implies x \geq \lim_{n\infty} \sup_{k>n} u_k = \overline{\lim} u_n$), et que deux suites équivalentes ont même limite supérieure (car elles ont mêmes valeurs d'adhérence).

Proposition.
Le rayon de convergence d'une série entière est donné par

$$R(a_n) = \frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Démonstration.

Pour z complexe non nul de module $|z| < R(a_n)$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée par un $M > 0$, mettons $|a_n z^n| \leq M$ pour tout n, d'où (pour tout n) $\left|\frac{1}{z}\right| \geq \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{\frac{1}{M}}$. En utilisant les rappels fournis, on en déduit $\left|\frac{1}{z}\right| \geq \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{\frac{1}{M}}\right) = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ (car $\lim_{n\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{M}} = 1$), d'où $|z| \leq \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$, puis $R(a_n) \leq \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ en passant au sup.

Pour z complexe de module $|z| > R(a_n)$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc on peut extraire $a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}$ telle que $\left|a_{\varphi(n)} z^{\varphi(n)}\right| \geq 1$ pour tout n, d'où $\left|\frac{1}{z}\right| \leq \sqrt[\varphi(n)]{\left|a_{\varphi(n)}\right|} \leq \sup_{k\geq\varphi(n)}\sqrt[k]{|a_k|}$. Ceci tenant pour tout n, en prenant l'inf sur les n, on obtient $\left|\frac{1}{z}\right| \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$, d'où $|z| > \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$, puis $R(a_n) \geq \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ en passant à l'inf sur les z.

EG à gogo de calcul de RC

4 Autre points

DSE et calcul : plein dEG dans les deux sens (cf cours TOSEL)
l'inverse d'un DSE nonul en 0 est DSE
composition de SE est SE (si la premièe s'annule en 0)
relation équadiff / SE (le faire ausside de manière formelle)

DSE de $\sum P(n) z^n$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ facile sur la bas des $X^{\downarrow n}$

Proposition (formule de Cauchy).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On note $f(z) = \sum a_n z^n$ pour $|z| < R$. Alors pour tout complexe z de module $|z| < R$, on a

$$a_n z^n = \int_0^{2\pi} f\left(ze^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Démonstration.

On écrit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \overset{?}{=} \int_0^{2\pi}\sum_p a_p\left(ze^{i\theta}\right)^p e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_p\int_0^{2\pi} a_p\left(ze^{i\theta}\right)^p e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\\ &= \sum_p a_p z^p\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}\right)^{p-n}\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_p a_p z^p\delta_p^n\\ &= a_n.\end{aligned}$$

Pour justifier l'interversion, il suffit de montrer la convergence de

$$\sum_p\int_0^{2\pi}\left|a_p\left(ze^{i\theta}\right)^p e^{-in\theta}\right|\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_p\int_0^{2\pi}|a_p z^p|\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_p|a_p z^p|,$$

ok pour $|z| < R$.

Proposition (formule de Parseval).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On note $f(z) = \sum a_n z^n$ pour $|z| < R$. Alors pour tout complexe z de module $|z| < R$, on a

$$\sum_{n\geq 0} a_n^2 z^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(ze^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta.$$

Démonstration.
Soit θ un réel, z un complexe de module $|z| < R$. On a

$$\begin{aligned}\left|f\left(ze^{i\theta}\right)\right|^2 &= \left|\sum_p a_p \left(ze^{i\theta}\right)^p\right|^2 = \sum_p a_p \left(ze^{i\theta}\right)^p \overline{\sum_q a_q \left(ze^{i\theta}\right)^q} \\ = \sum_p a_p z^p e^{pi\theta} \sum_q \overline{a_q} \overline{z}^q e^{-qi\theta} &\overset{?}{=} \sum_{p,q} a_p z^p e^{pi\theta} \overline{a_q} \overline{z}^q e^{-qi\theta} \\ &= \sum_{p,q} a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta} = \sum_p |a_p|^2 z^{2p} + \sum_{p \neq q} a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta},\end{aligned}$$

l'inversion étant permise par la sommabilité de $\left(a_p z^p e^{pi\theta} \overline{a_q} \overline{z}^q e^{-qi\theta}\right)_{p,q}$ pour $|z| < R$, puisque

$$\begin{aligned}\sum_{p,q} \left|a_p z^p e^{pi\theta} \overline{a_q} \overline{z}^q e^{-qi\theta}\right| &= \sum_{p,q} \left|a_p z^p \overline{a_q} \overline{z}^q\right| = \sum_{p,q} \left|a_p z^p\right| \left|\overline{a_q} \overline{z}^q\right| \\ &= \sum_p |a_p z^p| \sum_q |a_q z^q| = \left(\sum_p |a_p z^p|\right)^2 < \infty.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|f\left(ze^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_p |a_p|^2 z^{2p} + \sum_{p \neq q} a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta}\right) d\theta \\ &= 2\pi \left(\sum_p |a_p|^2 z^{2p}\right) + \int_0^{2\pi} \sum_{p \neq q} a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta} d\theta.\end{aligned}$$

Or, sous réserve de sommabilité, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \sum_{p \neq q} a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta} d\theta \overset{?}{=} \sum_{p \neq q} \int_0^{2\pi} a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta} d\theta \\ &= \sum_{p \neq q} a_p \overline{a_q} z^{p+q} \int_0^{2\pi} e^{(p-q)i\theta} d\theta \\ &= \sum_{p \neq q} a_p \overline{a_q} z^{p+q}\ 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. Il reste à vérifier que

$$\begin{aligned}\sum_{p \neq q} \int_0^{2\pi} \left|a_p \overline{a_q} z^{p+q} e^{(p-q)i\theta}\right| \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{p \neq q} \int_0^{2\pi} \left|a_p \overline{a_q} z^{p+q}\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{p \neq q} \left|a_p a_q z^{p+q}\right| \\ &\leq \sum_{p,q} |a_p z^p| |a_q z^q| = \left(\sum_p |a_p z^p|\right)^2 < \infty.\end{aligned}$$

5 Pour aller plus loin

th abel –> cv sur secteur angulaire ?
(récirpoque fausse : $\sum (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ cv en -1 mais la série diverge)
(récirpoque vraie si tout est positif)

th taubérien faible et fort (adapter exo agreg)

le cercle d'incertitude !
eq $\sum \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{n!} x^n$ en ∞
eq $\sum \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) x^n$ en 1
$\sum_1^n a_i \sim n \implies \sum a_n x^n \sim \frac{1}{1-x}$(récripoque vraie si tout es positif, th hardy littlewood)

EXO (régularité des coeff) Quitte à suposer $R = 1$, nontant $S(z) := \sum a_n z^n$, on a lles implications

$$S(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|^\alpha}\right) \implies a_n = O(n^\alpha)$$
$$a_n = O(n^\alpha) \implies S(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|^{\alpha+1}}\right)$$

En particulier, si on a tout pour tout n, on a une équivalence.

EXO : f DSE sur $R\mathbb{B}$ ssi $\forall |z| \leq r < R$, $f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-\frac{z}{re^{i\theta}}} \frac{d\theta}{2\pi}$, ie ssi $\forall a = re^{i\theta_0}$, $f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-e^{i(\theta_0-\theta)}} \frac{d\theta}{2\pi}$
COR : la limite d'une suite de fns DSE cv sur tout compact est DSE

5.1 topologie du cercle d'incertitude

Bon, alors j'ai consulté le livre de Zygmund (*Trigonometric Series*, chez Cambridge University Press, 2e édition de 1959), et voici ce qu'on trouve pour répondre à ta question :

Chapitre IX théorème 5.1 : Si E est un fermé 2pi-périodique de l'axe réel, il existe une série trigonométrique, dont les coefficients tendent vers zéro, qui converge sur E et diverge ailleurs.

Ibid, théorème 5.2 : Si E est un fermé du cercle unité, il existe une série entière dont les coefficients tendent vers zéro qui converge sur E et diverge ailleurs sur la circonférence.

Il est facile de voir que l'ensemble des points de convergence d'une série de fonctions continues doit être un Π_2 (c'est-à-dire une intersection dénombrable de F_σ, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'unions dénombrables de fermés) ; il est bien connu (et pas très difficile) que tout Π_2 s'obtient de cette forme. À l'époque d'écriture du livre de Zygmund (1959, donc, si ce point a été revérifié à la seconde édition), la question de savoir si n'importe quel Π_2 est l'ensemble des points de convergence d'une série trigonométrique ou a fortiori entière était un problème ouvert.

Donc il faut chercher entre Π_2 et fermé.

6 Fonctions holomorphes

Définition.
Une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe *(ou* analytique *ou* développable en série entière*) autour de $z_0 \in \mathbb{C}$ si on peut écrire*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout z dans un voisinage de z_0.

Proposition.
La somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence.

Démonstration.

Soit z_0 dans le disque de convergence de $\sum a_n z^n$, et h assez petit pour que $z := z_0 + h$ reste dans le disque. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_n z^n &= \sum_{n\geq 0} a_n (z_0+h)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{p\geq 0} \binom{n}{p} z_0^{n-p} h^P \\
&\overset{?}{=} \sum_{p\geq 0} \left(\sum_{n\geq 0} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} \right) h^n
\end{aligned}$$

sous réserve de la sommabilité de

$$\begin{aligned}
\sum_{n,p\geq 0} \left| a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} h^p \right| &= \sum_{n\geq 0} |a_n| \sum_{p\geq 0} \left| \binom{n}{p} z_0^{n-p} h^P \right| \\
&\leq \sum_{n\geq 0} |a_n| \sum_{p\geq 0} \binom{n}{p} |z_0|^{n-p} |h|^P \\
&= \sum_{n\geq 0} |a_n| (|z_0| + |h|)^n \\
&< \infty \quad \text{pour } |z_0| + |h| < R.
\end{aligned}$$

Proposition.
Soit f holomorphe en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors f est $\mathcal{C}^\infty$ autour de x_0, et dans ce voisinage on a

$$f(x_0+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

Démonstration.
La caracatère $\mathcal{C}^\infty$ a déjà été établi ci-dessus. Quant aux coefficients du développement, il suffit de remarquer que $\sum_{n>n_0} a_n z^n = o(z^{n_0})$ (déjà établi ci-dessus) et d'invoquer l'unicité du déloppement limité à tout ordre.

COR : l'ensembles des points d'holomorphie est ouvert

Proposition (principe des zéros isolés).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $f(z) = \sum a_n z^n$ pour $|z| < R$. Si f s'annule une infinité de fois autour de l'origine, alors $f \equiv 0$.

Démonstration.
Si $(a_n) \neq (0)$, soit n_0 le plus petit entier tel que $a_n \neq 0$. Alors pour tout complexe z de module $|z| < R$, on a

$$f(z) = z^{n_0}(a_{n_0} + \varepsilon(z))$$

où $\varepsilon(z)$ est la somme de la série entière $\sum_{n>n_0} a_n z^{n-n_0}$. Or, ε a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$ (les coefficients sont juste translatés), donc ε est continue sur le disque de convergence de $\sum a_n z^n$. Puisque $\varepsilon(0) = 0$ et $a_{n_0} \neq 0$, on en déduit que $a_{n_0} + \varepsilon(z)$ est non nul au voisinage de l'origine, absurde par hypothèse.

FAUX pour les fonctions C^∞ (on a vu que n'importe quel fermé est les zéros d'une applicatino C^∞), c'est une rigidité des fonc holomorphes.

EXO : soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. si l'ensemble des x tq $\int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$ a un point d'accumultation, alors f est nulle

EXO : soit f C^∞ sur I. Alors homoloprhe ssi $\forall S$segment$\subset I$, $\exists A > 0$, $\left\| \frac{f_{|S}^{(n)}}{n!} \right\|_\infty = O(A^n)$.

PPe maximem : deux demos
1 : classsiqu d'alembre en regardant la valuation de la SE
2 : propriété de la moyenne