Séries d'applications
(version chantier)

Marc SAGE

22 avril 2007

Table des matières

quel sens à limite de $\sum f_n$? On se ramène à la suite des sommes partielles.

Nouveua type de onvergence : normal (ie numérique), très pratique. C'est l'analogue de la convergence dominée.

Attnetio, il ne veut rien dire qu'une **suite** de fonctions cn (on pourrait toutefois écrire $\sum \|f_n - f_{n-1}\| < \infty$)

def cn : c'est la ca pour la norme infinie.
(préciser le domaine de convergence, ponc comme normale)
D'où cn => cu
CEG : $\sum \frac{\chi_{[n,n+1]}}{n}$ cu mais pas cn sur R^+

lorsque E compelet, la cvu de $\sum f_n$ est équivalente à critère cauchy uniforme, d'où les théorème (double limte, CO local global, intégration, C1, Ck, Cinfini)

rq : on a les implications $\begin{matrix} & cu & \\ cn & & cp \\ & ca & \end{matrix}$

EG : ζ cu sur tout $[a, \infty[$ avec $a > 1$, mais pas sur $[1, \infty[$ (pareil sur le domaine $\{\text{Re} > 1\}$)
EG : $z \mapsto \sum \frac{(-1)^n}{n^z}$ cn sur tout $[a, \infty[$ avec $a > 1$, cu sur tout $[a, \infty[$ avec $a > 0$
Les deux fonctions ci-desuss sont donc alors Cinfini

EG : si $\left(n^k c_n\right)_n$ sommable à k fixé, alors $\sum c_n e^{in\cdot}$ cn et est Ck
COR : si $c_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ pour tout k, alors $\sum c_n e^{in\cdot}$ est Cinfini
On récupère alors $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$ (interversion série intégrale déjà vue ? ? ?)

DEf Série Taylor en un point pour les fonctions Cinfini
ATTETNTION : si cv, pas forcéméent vers f ! CEG : $e^{-\frac{1}{x^2}}$ en 0.
Prop : on a cv ssi le reste intégrale cu vers 0
EG : si $\frac{f^{(n)}}{n!}$ est localelemenet bonrée uniforément en n

EG ? ? ? série entirèe usuelles

CEG : $\sum \frac{e^{2^n ix}}{n!}$ cn sur R vesr une fonctions C^∞ dont série Taylor diverge en tout point non nul

rrgèel d'Abel uniforme : $\|V_n\|$ bornée sur I et u_n tend vers 0 en décroissant unifor => $\sum u_n v_n$ cu sur I
EG : si a_n tend vers 0 en décroasant, alors $\sum a_n e^{inx}$ cu sur tout $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$ avec $0 < \varepsilon < \pi$

EXO : mq $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right)$ qd s est grand

pour montrer la continuité d'une série de fonctions qui cn, on dit qu'on a cu de fonction c0 :-)

$\sum f_n$ cs => $f_n$cs0
$f_n$cs $\not\Longrightarrow$ $\sum f_n$ cs

EXO : *soit* $A = \bigcap \Omega_n$ *où* Ω_n *ouverts. Mq il y a une fonction réelle continue exacmtenet sur* A.
DEM : on peut supposer les Ω_n dcroissnt.
Soit f continue exactment sur Ω_n (prendre 0 sur Ω_n, 1 à la frontière et $\chi_{\|\cdot\|^{-1}(\mathbb{Q})}$ ailluers).

On pose alors $f = \sum \frac{f_n}{2^{n!}}$. CN, donc CO sur A. Soit $a \notin A$. Il y a un N min tq $a \notin \Omega_N$; puisque f_N pas continue, il y a un $(a_p) \longrightarrow a$ tq $f_N(a_p)$ ne tend pas vers $f_N(a)$, quitte à extraire OPS (vue la forme des f_N) $\|f_N(a_p) - f_N(a)\| = 1$. Alors $a \in \Omega_{N-1}$, donc les a_p aussi APCR, donc $f_n(a) = 0 = f_n(a_p)$ pour $n < N$, d'où

$$|f(a_p) - f(a)| = \sum_{n \geq n} \frac{f_n(a_p) - f_n(a)}{2^{n!}} \geq \frac{\|f_N(a_p) - f_N(a)\|}{2^{N!}} - \sum_{n > N} \frac{\|f_n(a_p) - f_n(a)\|}{2^{n!}}$$

La somme est majorée par $\sum_{n>N} \frac{1}{2^{n!}} \leq \sum_{n \geq (N+1)!} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{(N+1)!-1}}$, donc $|f(a_p) - f(a)|$ ets minoré par $\frac{1}{2^{N!}} - \frac{2}{2^{(N+1)!}} = \frac{2^{N+1}-2}{2^{(N+1)!}} \geq \frac{1}{2^{(N+1)!}}$ pour $N \geq 1$ (ce qu'on l'on peut toujours suppoesr quitte à décaler les indices dans la définito de f). Ainis f n'est pas continue en a.

DERIVatioN

ceg : $\sum \sin \frac{x}{2n(n+1)} \cos \frac{2n+1}{2n(n+1)}x = \sum \frac{1}{2}\left(\sin \frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n+1}\right) = \frac{\sin x}{2}$cs, mais pas CU : en effet la tranche de cauchy

$$2\sum_{p}^{q-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sin \frac{x}{n} - \sin \frac{x}{n+1}\right)\right] = \sin \frac{x}{p} - \sin \frac{x}{q}$$

vaut, à p fixé, pour $x = p\frac{\pi}{2}$et $q = 2p$: $\quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ onc ne suarait tendre vers 0.

Pourtant, la série des dérivées cu, puisque la meme tranche de cauchy s'écrit $\frac{1}{p}\cos\frac{x}{p} - \frac{1}{q}\cos\frac{x}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.