Suites d'applications
(version chantier)

Marc SAGE

22 avril 2007

Table des matières

1 intro : convergence poncutelle

quel sens à limite de f_n ? limite ponctuelle semble raisonnalbe (bien préciser le **domaine de convergence** : ca serait pareil pour la cn des séries)

Quel propréités passent à lim ponctuelle ?

monotonie, convexité, lip (pour la même cst : sinon x^n)

Mais limite ponctuelle de fonction C0 pas C0[1] : x^n sur $[0,1]$

Pire : lim ponc de fonctions C0 sur segment (donc bornée) n'est pas bornée : $x \mapsto \frac{1}{x}$ tronquée à n sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.

En plus, pas de th d'interversion de $\int$: prendre pic $\frac{1}{n} \times n$.

2 convergence uniforme

terminologie ***convergence uniforme*** de Weierstrass (1841 dans ses cours à Berlin, publié 1894, source bourbaki et Laurent Mazliak), introduite pour permettre interversion $\sum \int$, et surtout pour conserver la continuité à la limite.

CEG de Darboux : $f_n(x) := 2n^2xe^{-n^2x^2} - 2xe^{-x^2}$. Alors $\lim f_n(x) = -2xe^{-x^2}$, donc $\int_0^X \lim f_n = e^{-X^2} - 1$, mais $\lim \int_0^X f_n = \lim \left(e^{-X^2} - e^{-n^2X^2}\right) = e^{-X^2}$.

2.1 def eg

def $\|\cdot\|_\infty$, $B(X, \mathbb{C})$ sous alg de $\mathbb{C}^X$, $\|\cdot\|_\infty$ norme (rq : on peut parle de cu de fonctions pas bornées)

cu = interverision quantif, ou cv pour $\|\cdot\|$ (DESSIN du rouleau)

rq : critère pratique de cvu (stone par convolution ?) : il y a une suite $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ tq $\forall x,\ |f_n(x) - f(x) < \varepsilon_n|$

EG : $\frac{\operatorname{atn} nx}{n}$cu0, $e^{x^2+\frac{x}{n}}$cue^{-x^2} sur $[0,1]$

si f_n cu vers f bornée, alors f_n bornée apcr

limUni de CL ok, de produit ok **si fonctio limite sont bornées**

critère cauchy

EG : $n^\lambda xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$. cp 0, mais cu dépd de $\lambda - 1$

important : le pb est **localisé** en 0 –> en se plaçant sur $[a, \infty[$, on a cu (si $\lambda \geq 1$)

La Cu est une prop finiment locale (? ? ?)

EG : $\sum \frac{x^n}{n!}$ cu vers exp sur tout intervalle borné.

EG : $\sum \frac{x}{x^2+n^2}$ cu sur tout intervalle borné (majorer R_n)

EXO : f_n : $\begin{array}{ccc} R^+ & & R \\ t & & t^\alpha e^{-nt}\sin t \end{array}$ $(\alpha \in R)$ cu0 sur $\left[\frac{\pi}{2}, \infty\right[$, ailleurs on se débarrasse du sin à l'aide de $\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Id} \leq \sin \leq \mathrm{Id}$, donc cu0 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ssi $t^{\alpha+1}e^{-nt}$idem. En dérivant, c'est le cas ssi $\alpha > 1$

EXO : $\cos\left(\frac{\cdot}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow e^{-\cdot^2}$.

2.2 continuité de la limite

lim unif de fonctino CO est CO

(C0 en un point, sur tout segment, sur tout l'intervalle)

rq : $\sum f_n$ cp, R_n cu, alors $\sum f_n$ cu (écrire $|S - S_n| \leq R_n$)

Réciproque fausse : prendre pics de hauteur non bornée et de largeur tendant vers 0.

Il faudrait une notion de cv moins "serrée" (terme de Borel dans leçon ? ? ?), trouvée par Arzelà.

[1] Cauchy (cour d'analys de 1821) affirme que série de fns CO est CO. Abel donnenera un ceg cinq ans plus tad : $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{x}$ n'est pas continue.

On dit qu'une suite (f_n) ***converge quasi-uniformément*** (vers f) sur A (terminologie de BOrel, leçon ? ? ?, venant de Azelà, ***cu à traits***) si, d'une part elle converge ponctuellement, d'autre part si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $N > 0$, il y a un entier $N' > N$ tel que, pour tout a on peut trouver un $N \leq n < N'$ tel que $|f_n - f|(a) < \varepsilon$.

On montre aisméent (en réinjectant N' à la place de N) que cela équivaut à : il y a une extraction φ et famille d'extraction $(\varphi_a^\varepsilon)_{a\in A}$ entrelacées ($\varphi^\varepsilon(n) \leq \varphi_a^\varepsilon(n) < \varphi^\varepsilon(n+1)$) telles que $\left|f_{\varphi_a^\varepsilon(n)} - f\right|(a) < \varepsilon$ pour tout n, a.

EXO : *montrer qu'on ne peut se passer de la condition $n_a < N'$ à l'aide de la suite $f_n(x) = x^n - \frac{1}{n(1-x)+1}$.*

DEM cs vers 0 sur $[0,1]$, mais $f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$. AInsi,

$$\exists \varepsilon_0\left(=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right), \exists N\,(=0), \forall N' > N,\ \exists a\left(=1-\frac{1}{N'}\right), \forall n \geq N',\ |f_n(a)| > \varepsilon_0$$

EXO : *justifier la terminologie, ie montrer que cu => cqu*

DEM fixer $\varepsilon > 0$, ily a un N tel que blabla, alors $\varphi = \varphi_a$ =translation de N convient

EXO *montrer qu'une limite quasiuniforme de fonctions CO est CO*

DEM soit $\varepsilon > 0$, il y a φ et φ_a tel que blabla. Alors

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{\left|f(x) - f_{\varphi_x(n)}(x)\right|}_{<\varepsilon \text{ par cqu}} + \underbrace{\left|f_{\varphi_x(n)}(x) - f_{\varphi_x(n)}(a)\right|}_{<\varepsilon \text{ par continuité des } (f_k)_{\varphi(n)\leq k<\varphi(n+1)}} + \underbrace{\left|f_{\varphi_x(n)}(a) - f(a)\right|}_{<\varepsilon \text{ par cs de } f_n(a)}$$

(on fixe n par cs, puis un δ par continuité)

Rq : on peut supposer la cqu seulement sur tout compact car continuité est "locale". On a alors la réciproque.

EXO : *soit (f_n) CO qui cs vers une fonction CO. Montre que la cv est qu sur tout compacte*

DEM OPS $f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $N > 0$, et $a \in K$. En eécrivant

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a)|,$$

on prend par cs un $n > N$ tq $|f_n(a)| < \varepsilon$, puis par continuité de f_n un δ tq $|x-a| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$. On recouvre ainsi K par des ouverts centrées en ses points, d'où par compacité un sous-recouvrement fini. On peut donc considérer $\max n$ et $\min \delta$, CQFD.

2.3 intégration de la limite

TH (primitivation) : soient f_n localement réglééś sur I BORNé qui CUf loc réglée (hypothése importante : une limite uniforme de Cpm n'est pas forcémentCpm : le nombre de discontinuité peut devenir infini) *: alors $\forall a \in I,\ \int_a^\cdot f_n\, CU \int_a^\cdot f$*

COR : si f_nCU sur $[a,b]$, alors $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Idée CEG : $f - f_n$ ets limité par deux murs, une barre horizontale écrase la masse vers 0. Si on retire un mur ou la barre, la mase peut s'échapper.

CEG : si I pas bornée, prendre f_n =rectangle plat $n \times \frac{1}{n}$; ou encore $\frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}CU\frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$.

CEG : si pas cu, prendre même eg en verticale (pic s'envolant en 0 vers un Dirac)

2.4 interversion limite

unique théo inter lim : $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \overline{I}$. Si $f_n$cv en a, si $f_n$cu$f$ sur vois de a, alors $\lim_a \lim_n f_n = \lim_n \lim_a f_n$.

EG : $a = \infty$ et $\lim f_n$ fixé.

CEG si que cp : pallier 1 sur $[0,n]$ et 0 sur $[n+1,\infty]$

2.5 dérivée de la limité

controle de la drivée ? aucun via $\|f\|$, et d'ailleurs $\frac{\sin n^2 x}{n}$cu0, mais dérivée pas cu (pas bornée !) Dessin
TH : si $f_n$cp en un point, f_n'cu, alors $f_n$cu et $(\lim f_n)' = \lim f_n'$
(dem : $\int_a^{\cdot} f_n'$CU$\int_a^{\cdot} \lim f_n'$, ie f_nCUf avec $f' = \lim f_n'$)

TH C^k :
f_n C^k cp en un point
$f_n^{(i)}$CU loc $\forall 0 < i \leq k$
Alors $\lim f_n$ C^k et $[\lim f_n]^{(i)} = \lim f_n^{(i)}$.

2.6 approximation uniforme

TH : toute fnction C0pm (donc les C0 aussi) est limU de fonction en escalier / C0 affine par morceaux.
fontions *réglées* : sous-algèbre de $B([a,b], \mathbb{K})$, stable par limU.
réglée équivaut à $f(a^{\pm})$ eiste en tout a
rélgée stalbe par $|\cdot|$

EXO : *CNS sur* $A \subset R$ *pour que* $\sup_A |P|$*nomrle ?* -> A infinie bornée
TH weistrass (qui convolait par gaussienne)
Dem : convolutoin par *noyau de Landau* $\frac{(1-t^2)^n}{a_n}$
CEG : pas deWieistrass sur intervalle I non nbornée : $K[X]_I$ est fermé !
EXO : $C^0[a,b]$ est adhrénece de $\mathbb{Q}[X]$ (ou de $D[X]$ où D dense dans R)
approximation de $|\cdot|$ sur $[-1,1]$par Vincent Pilaud : on pose $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X^2 - P_n^2\right)$. Alors $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq |\cdot|$ (dem par récurrence : $0 \leq P_n \leq P_{n+1} = |X| - (|X| - P_n)\left(1 - \frac{1}{2}(|X| + P_{n+1})\right) \leq 1$), donc par dini $P_n$cu$|\cdot|$
EXO $C^0[a,b]$ est adhrénece de $\mathbb{R}[\varphi]$ ssi $\varphi : [a,b] \longrightarrow R$ est injective
EXO : fixons $a_1, ..., a_n$. Alors toute fonction CO est limi uniform de poly ayant même valeur que f en les a_i
APP : exo intégrale périodiodque Sylvain Carré
APP : si f C^k, alors f est lim uuni de f_n dont toutes les déréivés CU (th intégation)
EXO : $\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x_1 ... x_n}\right) dx_1 ... dx_n \longrightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)$ (monomes, poynomes, puis densité)

3 divers

réciproqe cp => cu ? On montre déjà que f_nCU => f_n équicontinue (terminologe de Ascoli & Arzelà : *également continues*)
Cela est suffisant : Si f_n équicontinue, alors cp => cu.
EG : équi-lip, dérivée uniformément bornée

EXO : caractères de $C^0(S,R)$: il sont positifs, tq $|\chi(f)| \leq \|f\|$, et en fait $\chi = \mathrm{eval}_a$ (Weistrass !)

il y a une suite cv L_1 mais nulle part cp : salve de n créneaux de largeur $\frac{1}{2^n}$, puis incrémenter n

Th Ascoli - Arzelà sur compacité : équiCO + bornée

On montre que la fonction [redacted] vérifie aussi l'équation fonctionnelle suivante pour z prenant ses valeurs dans $\mathbb{C} \setminus Z^{-*}$:

$$\zeta(1-z) = \frac{2}{(2\pi)^2} \cos \frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z).$$

d'où pour $z = 2$, $\zeta(-1) = \frac{-1}{12}$!

4 Pour aller plus loin

Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui cs. Alors la limite est continue sur un ensemble dense de réels.

démo : csqce de Baire, cf http ://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_la_limite_simple_de_Baire (source pdf Gilles Godefroy)

Le grand théorème de Baire donne la réciproque : une fonction $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite simple de fonctions continues ssi elle a un point de continuité sur tout fermé (non vide). Le sens réciproque nécessite l'intervention des ordinaux (induction transfinie).

EG : toute fonction dérivée est continue sur un ensemble dense. Réciproquement,si $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite simple d'app continue et est Darboux, alors il y a un homéo croissant φ tq $f \circ \varphi$ soit une dérivée (théorème dû à Choquet, prouvé à la fin de sa thèse)

Quels sont les conditions sur une topologie pour que le résultat suivant soit vrai ?

Soient l un élément de mon ensemble et a_k^n une famille d'éléments indexés par $\mathbb{N}^2$ telle que $\forall k,\ a_k^n \overset{n\infty}{\longrightarrow} l$. Alors il existe une application $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_k^{\varphi(k)} \overset{k\infty}{\longrightarrow} l$

C'est vrai si l'espace est métrisable, et faux en toute généralité. Qu'est-ce qu'on peut dire entre les deux ?

(ok si il y a une base dénombrable de voisinages ? ? ?)

Je signale par exemple que c'est faux pour la convergence simple des fonctions réelles : $\chi_{\mathbb{Q}}$ est limite simple de limites simples de fonctions continues (c'est assez facile à construire, genre avec la fonction $\frac{p}{q} \mapsto \frac{1}{q^r}$ et ${}^c\mathbb{Q} \longrightarrow 0$) mais n'est pas limite simple de fonctions continues (par Baire).