Topologie sur les matrices
(version chantier)

Marc SAGE

11 avril 2006

Table des matières

Tout se passe coef par coef.
On peut prendre la norme qu'on veut (dim finie).
interaction avec réduction importante.

χ continue : chacune de ses applications composantes est continue, *i.e.* ssi chacun des coefficients devant les différentes puissances de X dans χ_A est une fonction continue en les coefficients de A. Or, cela est clair car un déterminant n'utilise que des opérations polynomiales (on a plus précisément

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{|I|=k} \det A_I \right) X^{n-k}$$

où A_I est la matrice extraite de A en ne prenant que les termes indicés par une partie $I \subset \{1, ..., n\}$, mais il n'est nul besoin d'établir la formule ci-dessus – dont une preuve se trouve dans les feuilles sur le déterminant et la réduction – pour comprendre ce qui se passe).

μ pas continue !

rg pas continue, sinon matrices de rang r fermées : $2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \not\longrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} = 1$.

Y at-til une norme invariante par conjugaison ? Non si $n \geq 2$, sinon $\|AB\| = \|BA\|$ sur GL_n, donc par densité sur M_n, et ça ce n'est pas possible si $AB = 0 \neq BA$.

Autre idée : la classe de similitude d'une matrice non scalaire n'est pas bornée !

$|||\cdot|||_{\infty,\infty} = \max_{L \text{ligne}} \sum_L$, $|||\cdot|||_{1,1} = \max_{C \text{collone}} \sum_C$
COR $|||A^*|||_{\infty,\infty} = |||A|||_{1,1} = \max_{C \text{collone}} \sum_C$. Peut-on généraliser à p, q conjugués ?

La norme $|||\cdot|||_{p,q}$ est d'algèbre ssi $p \leq 2$, ie ssi $p \leq q$, cf exo

On montre que $\rho = \inf |||\cdot|||$ est-il atient ? Non, car ρ n'est pas une norme perndre un nilpotent non nul.

contre exemple à $e^{a+b} = e^a a^b$: $a = \begin{matrix} 1 & \\ & \end{matrix}$ et $b = \begin{matrix} & 1 \\ & \end{matrix}$.

On a $e^a = \begin{matrix} e & \\ & 1 \end{matrix}$, $e^b = \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}$, donc $e^a e^b = \begin{matrix} e & e \\ & 1 \end{matrix}$ et $e^b e^a = \begin{matrix} 1 & e \\ & e \end{matrix}$ et en plus $e^{a+b} = \begin{matrix} e & 1 \\ & e-1 \end{matrix}$