Espaces vectoriels normés
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

bord : dans 1935 *Topologie* (Alexandroff & Hopf) note K^* ou $\dot{K}$
dans 1934 *Lehrburch der Topologie* (Seifert & Threlfall) le note $\mathfrak{Rd}$ (der Rand) -> $\mathfrak{d}$ -> ∂ (source *la formule de Stokes* M. Audin p206)

Intution plane et spatiale cruciale (dessin en dim 2...)
Attentino : il n'est pas immédiat que S est compacte en dim finie, c'est un lemme pour le th "en dim finie nome sont eq", donc pas de preuve qui se mord la queue.

La compacité appelle les suites extraites....
th Heine Borel : compcat = ferém bornéé

Exemples de normes tordues : chercher sur les fonctions : lip, L^p, et toute combinaisons linéaire, voire pire : $\|x+iy\| = \int_{\alpha \in A} \sqrt[\alpha]{|x|^\alpha + |y|^\alpha} d\alpha$

Dans $E := \{\overrightarrow{u} \geq 0$ bornées tq $u_0 = 0\}$, comparer les normes $\sup |u_{n+1} - u_n|$ et $\|u\|_\infty$ (lip et infinies). On a lip$\leq 2\infty$, mais pas équivalentes : prendre u une suite de pente $\frac{1}{n}$ puis constante $= 1$.

La boule unité ouverte d'un evn sera génériquement notée $\mathbb{B}$, de sorte qu'une boule de centre a et de rayon r s'écrira

$$\mathcal{B}(a,r) = a + r\mathbb{B}.$$

On notera de même $\mathbb{S}$ la sphère unité. L'intérêt de ces notations est de s'habituer à visualiser des sommes de parties d'un evn. Le lecteur essaiera de voir (par exemple dans le plan complexe ou dans l'espace) pourquoi on a les relations

$$\begin{cases} \alpha\mathbb{B} + \beta\mathbb{B} = (\alpha+\beta)\mathbb{B} \\ \mathbb{S} + \mathbb{B} = 2\mathbb{B} \setminus \{0\} = \bigcup_{0<r<2} r\mathbb{S} \\ 2\mathbb{S} + \mathbb{B} = 3\mathbb{B} \setminus \overline{\mathbb{B}} = \bigcup_{1<r<3} r\mathbb{S} \end{cases}.$$

Tangente en un point a d'une partie A : droite D telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un $r > 0$ tel que $\forall x \in A \cap (a + r\mathbb{B})$, $d(x, D) < r\varepsilon$. Il revient au même de dire que le ssegment xy fait avec D un angle d'au plus ε (leçons de mathémtaiques d'autjoud'hui, volume 2, note de bas de page 202)

1 Corps normés, valués

IDée : ce qui permet de faire de l'analyse sur $\mathbb{R}$ est essentiellment sa valeur absolue, avec les trois prop $|a| \geq 0$ avec = ssi $a = 0$, multiplicativité, inégalité triangulaire. On généralise à un anneau (unitaire), les principales application seront pour des corps (surtout $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

on appelle *valeur absolue* sur un anneau A toute application $|\cdot|$ réelle définie sur A muliplicative telle que
$|a| \geq 0$ avec = ssi $a = 0$
$\exists C \geq 1$, $|a \pm b| \leq C \max\{|a|, |b|\}$.
On parle également de *norme* et on dit alors que l'anneau est *normé*.

PROP : puisque $|1|^2 = |1^2| = |1|$, on a $|1| = 0$ou1, mais 0 proscrit (sauf si anneau nul). De même, $|-1| = \pm 1$et la positivité exclu -1. On obtient donc

$$|\pm 1| = 1 \text{ et } |-a| = |a|.$$

EXO : *A intéègre :*
EXO *, il n'y qu'une façon de prolonger une norme au corps des fracations :*

$$\left|\frac{a}{b}\right| := \frac{|a|}{|b|}$$

(en effet, on doit avoir $|a| = \left|\frac{a}{b}b\right|$). On vérifie que indépendant du représentant et que prolonge axiomes.)

EG

l'application nulle est une norme ssi l'anneau est nul. C'est un cas particulier de la *norme triviale* qui vaut 1 partout hors de 0.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont normés par la valeur absolue usuelle. Sur $\mathbb{Z}$, vérifier que p^{-v_p} est une norme -> et c'est tout (th Ostrowski). Sur les sous-corps de $\mathbb{C}$, pas d'autre chose archimédien (th Ostrowski) ; mais la norme ultramétrique de $\mathbb{C}_p$ se transporte à $\mathbb{C}$ ($\mathbb{Q}$clotures alégbruqies) et induit par restriction une norme ultramétrique sur tout sous corps de $\mathbb{C}$

$\mathbb{F}_q[X]$ normé par $|a|_\infty = \operatorname{Card}\left({}^{A}\diagup_{(a)}\right)$ pour $a \neq 0$ (formule valide pour l'anneau $\mathbb{Z}$)

Quand $|\cdot|$ est une valeur absolue, il est clair que $|\cdot|^\alpha$ en est encore une pour tout réel $\alpha > 0$. On dit que $|\cdot|$ et $|\cdot|^\alpha$ sont *équivalentes*. La norme triviale est le poit limite d'équivalence de toutes les normes (faire tendre α vers 0).

EXO. *si l'on infirme l'axiome d'annulation, une "valeur absolue" est nécessairemnt* $\equiv 1$ (puisuqe $|0| = |0^2| = |0|^2$, on devrait avoir $|0| = 1$, d'où $|\cdot| = \frac{|0||\cdot|}{|0|} = 1$).

EXO (axiomatique) : dans les corps on peut lever les hyphtèses $|\cdot| \geq 0$ et $C \geq 1$, ne supposer que $|\cdot|$ s'annule quelque part mais pas partout et ne garder que

$$\forall a, b \in A,\ |a - b| \leq C \max\{|a|, |b|\}.$$

prendre un $|a| \neq 0$ donne $1 = \frac{|a|}{|a|} = \frac{|a1|}{|a|} = \frac{|a||1|}{|a|} = |1|$
prendre un $|a| = 0$ donne $0 = |a||0| = |a0| = |0|$
alors $1 = |1 - 0| \leq C \max\{|1|, |0|\} = C$
et $0 = |a - a| \leq C \max\{|a|, |a|\}$, d'où $|a| \geq 0$
enfin, $a \neq 0 \implies a$inversible $\implies 1 = |a|\left|\frac{1}{a}\right| \implies |a| \neq 0$.

On rencontre également l'axiome $|a + b| \leq |a| + |b|$, appelé *inégalité triangulaire*, qui est vérifié pour $C = 1$ et qui implique celui ci-dessus quand $C \geq 2$. On montrera qu'il équivaut en fait à l'axiome ci-dessus pour un $C \leq 2$: une telle norme sera dite *triangulaire*.

Lorsque $C = 1$, on parle d'inégalité et de norme *ultramétriques*. Donnons-en tout de suite une caractérisation exotique (pour des *anneaux commutatifs unitaires)*

Une norme est unltramétrique ssi $\mathbb{Z}$ *est borné, ou ssi* $\mathbb{Z}$ borné par 1
(dans le cas contraire, on parle de norme *archimédienne*)
3=>2 trivial
1=>3 par rec, $n \leq \max\{|1|\}$ pour $n \geq 1$, puis ok par parité
2=>1 $|a+b|^n = \left|\sum_{p+q=n} \binom{n}{p} a^p b^q\right| \leq \sum_{p+q=n} M |a|^p |b|^q = 2Mnc^n$ où $c := \max\{|a|, |b|\}$. Alors $\frac{|a+b|}{c} \leq \sqrt[n]{2Mn} \longrightarrow 1$
COR : *en carac positive, toute norme est ultramétrique.*

Le langage des valuations peut-être plus commode pour décrire les normes uultramétriques. Il lui est d'ailleurs équivalent.

DEF une *valuation* sur un anneau A est une application $v : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui vaut ∞ uniqemnet en 0, transforme produits en sommes, et vérifie l'*inégalité ultramétrique* $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$. On dit alors que l'anneau est *valué*.

EG : Pour p premier, $\mathbb{Q}$ est *valué* par $v_p(a)$ =l'exposant de p dans la décompositio de a. De meˆme, pour P irréductile, $\mathbb{F}_q[X]$ valué.

Rq : une valuation peut prendre des valeurs négatives. Par exemp, dans $\mathbb{Q}$, $v_3\left(\frac{5}{18}\right) = v_3\left(2^{-1}3^{-2}5^1\right) = -2$.

Rq : lien vlauation norme ne tient à une histoire de somme/produit, ie d'expoentielles.

PROP *v est une valuation ssi e^{-v} est une norme ultramétrique*
une norme $|\cdot|$ est ultramétrique ssi $-\ln|\cdot|$ est une valuation

DEM : les deux premiers aximes sont clairement équivalent. Si v valuation, alors e^{-v} ultramétrique, et si $|\cdot|$ norme ultramétrique, alors $-\ln|\cdot|$ ultramétrique par croissance deln.

RQ : l'ultra-métricité étant invariant par équivalence, on peut remplacer e par n'importe quel réel > 1. Pour les valuations p-adiques, il est d'usage de poser $|a|_p := p^{-v_p(a)}$ afin de disposer de la formule dite du *produit* $|a|_\infty \prod |a|_p = 1$ où produit sur les premiers. De même, pour les P-adiques sur $\mathbb{F}_q[X]$, on posera $|a|_P := q^{-v_P(a)\deg P}$, d'où (EXO !) $|a|_\infty \prod |a|_P = 1$ où produit sur les irrédutible unitaires

revoir avec Bourbaki, *Algèbre commuttaive*, chap 6. valuations

En fait, $\mathbb{RCH}$ nesont pas si généraux que ça !

Th Ostrowski page 127 : soit K corps (non nécesairment com) et v une valeur absolue archimédienne sur K. Alors il y a un unique réel $r>0$ et un iso φ de K sur un sous-corps partout dense de l'un des corps RCH tel que $v(x)=|\varphi(x)|^r$. De plus, v sera triangulaire ssi $r\leq 1$.

TH (Ostrowski) : *toute norme sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à $|\cdot|_\infty$ ou une $|\cdot|_p$* (ou alors triviale)

DEM : soit $|\cdot|$ une norme, que l'on peut supposer triangulaire. Pour la connaître, il suffit de la déterminer sur $\mathbb{Z}$ (dont $\mathbb{Q}$ est corps des fractions) et même sur $\mathbb{N}^*$ (par paritié)

Analyse : si equivalent à $|\cdot|_p$, ultramétrique, ie $|\mathbb{Z}|\leq 1$, avec $=$ ssi $\in p\mathbb{Z}$, donc on récupère p comme le généréteu de $\{|\cdot|<1\}$. Si pas ultramétrique, norme usuel, donc au contraire $|\mathbb{Z}^*|\geq 1$.

Synthèse : Si ultramétique, $|\cdot|\leq 1$, donc $\{|\cdot|<1\}$idéal de $\mathbb{Z}$, donc $=(p)$ (non nul sinon vp trvilae). Alors $a=p^{-v_p(a)}\frac{u}{v}$ avec u et v pas multiplie de p, ie de valuation 1, d'où $|a|=|p|^{-v_p(a)}=p^{-\frac{\ln|p|}{\ln p}v_p(a)}=|a|_p^{\frac{\ln|p|}{\ln p}}$ (bonus : avec un exposant $\frac{\ln|p|}{\ln p}<1$ car $|k|\leq k\ \forall k\in\mathbb{N}$)

Noter $|k|\leq k$ pour $k\in\mathbb{N}$. Pour $a,b,n\in\mathbb{N}^*$, on écrit a^n en base b : $a^n=\sum a_ib^i$ avec $c\leq\frac{\ln(a^n)}{\ln b}$chiffres, d'où

$$|a|^n\leq\sum|a_i|\,|b|^i\leq b\sum|b|^i\leq b2c\max\{1,|b|\}^c\leq 2bn\frac{\ln a}{\ln b}\left(\max\{1,|b|\}^{\frac{\ln a}{\ln b}}\right)^n\ ;$$

en prenant la racine n-ième, il vient $|a|\leq\max\{1,|b|\}^{\frac{\ln a}{\ln b}}$, ie

$$|a|^{\frac{1}{\ln a}}\leq\max\left\{1,|b|^{\frac{1}{\ln b}}\right\}.$$

Si $|\cdot|$ pas ultramétrique, il y a un $|a\in\mathbb{N}^*|>1$, donc $\forall b$, $\max\left\{1,|b|^{\frac{1}{\ln b}}\right\}\geq 1$, d'où $|b|\geq 1$. L'inégalité devient alors égalité par symétrie, donc $|a|^{\frac{1}{\ln a}}$ constante C, d'où $|a|=C^{\ln a}=a^C$ pour tout $a\in\mathbb{N}^*$. (bonus : $|k|\leq k$ $\forall k\in\mathbb{N}$implique $C<1$).

EXO : supposons inégalité avec $C\leq 2$.

Mq rec sur h que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\leq 2^h\implies|n|\leq 2^{h-1}$. Pour $h=0$ clair ($n=0<\frac{1}{2}$ ou $n=1\leq 2^0$), puis si $n\leq 2^{h+1}$, alors $n=n'+n''$ avec $n',n''\leq 2^h$, d'où $|n|\leq C\max\{|n'|,|n''|\}\leq 22^{h-1}\leq 2^h$. Ainsi, à n fixé, on encadre $2^{h-1}<n\leq 2^h$, d'où $|n|\leq 2^{h+1}\leq n$

Enfin, en développant le binome et en regroaupant de façon logathimique, on voit que

$$|a+b|^{n=2^{h-1}}\leq C^{\lg_2 n}\max_{p+q=n}\left\{\left|\binom{n}{p}\right||a|^p\,|b|^q\right\}\leq C^h\sum_{p+q=n}\binom{n}{p}|a|^p\,|b|^q=C^h\left(|a|+|b|\right)^n$$

d'où le résultat en faisant tendre $h\longrightarrow\infty$.

2 Normes et distances

axiomes :

séparation (la norme d'un vecteur non nulle est non nulle) ($a\neq 0\implies\|a\|\neq 0$) (on dit séparation car on peut séparer deux vecteurs en regardant la norme de leur différence (ie leur distance))

positive homogénéitisté (d'où $\|0\|=\left\|0\cdot\overrightarrow{0}\right\|=|0|\left\|\overrightarrow{0}\right\|=0$)

inég triangulaire (d'où $\|a\|=\left\|\frac{a}{2}\right\|+\left\|\frac{-a}{2}\right\|\geq\frac{1}{C}\|0\|=0$ et la positivité de la norme)

LOGIQUE

$\ln(1+\|\cdot\|)$ sépare, compTriang mais pas homo

$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}$	
(a,b)	$\max\{\lvert a\rvert,\lvert b\rvert\}$ si $b\neq 0$ $2\lvert a\rvert$ si $b=0$	sep, homo mais pas compTriang

$(a,b)\mapsto|a|$ homo compTriangl mais sépare pas def valeur absolue sur un corps (rq : si K "normé", alors sa norme en est bien une d'après les axiomes d'un evn, ce qui est cohérent. D'ailleurs, toutes les normes de l'evn K sont équivalentes à la norme choisie sur le corps K), puis norme (double Inégalité triangluaire –> dessin !) -> penser à R ou C en mettant $\|\cdot\|$ au lieu de $|\cdot|$

Algèbre normée : algèbre munie d'une norme sous-multplicative (même utilité que sous-additive : pouvoir découper). On montre que $\|1\| \geq 1$, donc on peut tojours supposer $\|1\| = 1$ quittte à diviser par cette constante.

eg : $\|\cdot\|_\alpha$ pour $\alpha \in [1, \infty]$ (norme d'algèbres), cas des vecteurs, des suites, des fonctions.

Sur R^n, on peut comparer les $\|\cdot\|_\alpha$ (cf croissance des moyennes d'ordre α) (DESSIN en dim 2 : boule incrite et circoscirte à deux carrés, boules pour $\alpha = 1, 2, 4, \infty$), mais pas sur les suites, ni sur $C^0(R, R)$: prendre 0 partout sauf pic de hauteur n sur voisinage de 0.

rq : $\|\emptyset\|_\infty = \sup_{R^+} \emptyset = 0$, ok car $E^\emptyset = \{0\}$

distance, *diamètre*, *boules*, *shpères*

toute boule est convexe (EXO : c'est équivalent à axiome inég triangul)

parties et applications *bornées*

application *lip*

une AL est lip ssi lip en 0

Norme *produit* sur $E_1 \times ... \times E_n$ par max (ou n'importe quoi d'autres, elles sont toutes équivalentes !), puis sur $\prod E_i$ par sup –> *convergence uniforme*

Rq : Boule produit = produit des boules (pour norme infinie)

On pourrait créer $\|(N_1, ..., N_n)\|_\alpha$ et combiner à l'infini –> plein de normes possibles.

cv coordonnée par coordonnée = *convergence simple* (ou *ponctuelle*)

Si nombre fini, cu = cs (dem : $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$) -> cas de la dim finie.

Faux sur produit infini : diracs de R^N, $x \mapsto x^n$ sur $[0, 1[$.

EXO : sur $C^1(S, R)$: $\|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty \sim |\cdot|(0) + \|\cdot'\|_\infty$.

PLus génralement, $\sum \left\|\cdot^{(k)}\right\|_\infty \sim \left\|\cdot^{(n)}\right\|_\infty + \sum_{k<n} \left|\cdot^{(k)}\right|(0)$

3 Suites convergentes

cadre est evn, ou alg n si un produit devait apparaitre

$a_n \longrightarrow a$ si $\|a_n - a\| \longrightarrow 0$: avec les ε, c'est comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en mettant $\|\cdot\|$ au lieu de $|\cdot|$.

sous-suites, valeurs d'adéhrences, unicité de la limite (écrire $\|l - l'\| \leq \|l - a_n\| + \|l' - a_n\| \longrightarrow 0$), linéarité (et produit) de la limite, $o(1)\,O(1)$ ou $O(1)\,o(1)$ est un $o(1)$.

Attention : cv dépend de la norme : $(x \mapsto x^n)$ cv vers 0 pour L^1 mais ne cv pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

On verra que indépend en dim finie.

Limite infinie

Si $E \neq R$, $a_n \longrightarrow \infty$ si $\|a_n\| \longrightarrow \infty$: la sutie devient très grande, sous-entedu en norme (car pas d'ordre hors de R pour parler de grand)

EG : dans C, $(1 + i)^n \longrightarrow \infty$

$\alpha \in \operatorname{Adh} u \iff \forall \varepsilon > 0,\ \{n\ ;\ \|u_n - \alpha\| < \varepsilon\}$infini

4 Topologie

voisinage (au *voisinage* de, aux *environs* de, *autour* de), séparation, *ouverts*, prop topologiques, ouverts produits (ouverts du produit ne sont pas tous des ouverst produits)

fermés par carac séquentiels, prop topo, fermes produits (fermés du produit ne sont pas tous des fermés produits)

EXO : F fermé de C : les polynôme (unitaires de deg$n$) s'annulant sur F foemen un fermé

normes équivalentes –> même cv, donc meême fermés, donc meme topologie.

EXO Soient N et N' deux normes. Mq LASSE :

1. N et N' ont mêmes parties bornées $\bigstar$(<=6 : A bornée$\Longleftrightarrow \begin{array}{c}\forall a\in A^{\mathbb{N}}\\ \forall\varepsilon_n\longrightarrow 0\end{array}, \varepsilon a$ cv)
2. N et N' ont mêmes fonctions bornées (f est bornée ssi la partie $\operatorname{Im} f$ est bornée)
3. N et N' ont mêmes suites bornées (a est bornée ssi la fonction $n\mapsto a_n$ est bornée)
4. N et N' ont mêmes suites tendant vers 0 $\bigstar$($\longrightarrow 0$ ssi $=\varepsilon b$ où $\varepsilon \overset{\text{réelle}}{\longrightarrow} 0$ et b bornée)
5. N et N' ont même relation de tendance (a tend vers ℓ ssi $a-\ell\longrightarrow 0$)
6. N et N' ont mêmes suites convergentes (a cv ssi $\exists\ell,\ a\longrightarrow\ell$)
7. N et N' ont mêmes fermés (F fermé ssi $\begin{array}{c}\forall f\in F^{\mathbb{N}}\\ \forall\ell\in E\end{array},\ f\longrightarrow\ell\Longrightarrow\ell\in F$)
8. N et N' ont mêmes ouverts (O ouvert ssi ${}^cO$ fermé)
9. N et N' ont pour chaque a mêmes voisinages de a (V est voisinage de a si $\exists O$ouvert, $a\in O\subset V$)
10. chaque boule $a+r\mathbb{B}$ contient $a+r'\mathbb{B}'$ pour un certain r' (et réciproquement) ($a+r\mathbb{B}$ voisinage de a)
11. $\mathbb{B}'$ comprise (pour $\subset$) entre deux $\alpha\mathbb{B}$
12. N et N' sont équivalentes ($N'\leq\alpha N\Longleftrightarrow\mathbb{B}\subset\alpha\mathbb{B}'$)

DEM Mq chaine d'implications 1–>12 (sauter 6) et cycle 1,5,6. Sont non trivaux les deux $\bigstar$:

$\bigstar$pour5=>6 $\Longleftarrow$clair car $o(1)\,O(1)\longrightarrow 0$. $\Longrightarrow$ def $\varepsilon_n:=\|a_n\|$ puis $b_n:=\begin{cases}0 \text{ si } a_n=0\\ \frac{a_n}{\varepsilon_n} \text{ sinon}\end{cases}$

$\bigstar$pour6=>1 $\Longrightarrow$ clair (alors $\varepsilon a=o(1)\,O(1)$ cv vers 0). $\Longleftarrow$ contraposée : supp A non bornée, soit a tq $\|a_n\|\longrightarrow\infty$, def $\varepsilon_n:=\frac{1}{\sqrt{\|a_n\|}}\longrightarrow 0$, alors $\|\varepsilon_n a_n\|=\sqrt{\|a_n\|}$ non bornée, donc pas cv.

intérieur, *adhérence* ou fermeture[1], *frontière*/*bord*, *densité*, point isolé / d'accumulation / de condensation (dont tout voisinage est indénombrable, cf exo SG)

dense ssi rencontre tout voisinage, donc ssi complémentaire d'intérieur vide

ouvert ssi = intérieur

fermé ssi = adhérence

PROP : Int et Adh sont des idempotent croissants plus petits/grand que Id pseudo inverses l'un de l'autre (ce qui résoud le problème des empilements de "rond" et "barre")

EG : $\begin{array}{l}\mathring{I}=]\inf I,\sup I[\\ \overline{I}=[\inf I,\sup I]\end{array}$ –> (dim qcq) $\mathring{\overline{B}}=\mathring{B}$ et $\overline{\mathring{B}}=\overline{B}$.

$\mathring{Z}=\mathring{Q}=\overset{\circ}{\overline{R\backslash Q}}=\emptyset$

$\overline{Z}=Z$, $\overline{Q}=\overline{R\backslash Q}=R$

EG : $\{\operatorname{rg} A=r\}$ fermé ? non car adh=$\{\operatorname{rg} A\leq r\}$

EG : un sev est d'intéreieu vide, dense ou fermé

CEG : $\{f$ cO croissante sur $[0,1]\}$ fermé (carac séquentielle), mais pas ouvert car intérier vide (rajouter un petit crochet pour contredire monotonie)

CEG : $\{f$ cO sttt croissante sur $[0,1]\}$ pas fermé (pour $\|\cdot\|_\infty$) car adhrénce sont foncions croissantes (poser $f_n=f+\frac{1}{n}$), pas ouvert comme ci-dessus

EG : dans $C^1[0,1]$ normé par $\|f\|+\|f'\|$, la partie des f tq (f,f') jamis nulle est ouvert : passer au complémentaire, puis cacrc séquentielle férmée (+BW)

EG : $\{f(0)=0\}$ dense pour L_1, surement pas pour $\|\|_\infty$.

EG : l'adhérence des fonctions >0 pour $\|\cdot\|_\infty$ et L^1 est $\{f\geq 0\}$ pour les **deux**

Int et Adh stabilise les convexes.

topo *relative* / *trace*.

ouvert relatif = trace ouvert (def)

voisinage relatif = trace voisinage (prop)

fermé relatif = trace fermé (prop)

Dans un métrique, topo trace est celle de la distance induite.

[1] ne pas confondre l'ensemble des valeurs d'hrence d'une suite avec l'adhrence de l'ensemble de ses termes : l'ordre et la répétition sont en effet primordial pour le premier et absent pour l'autres (eg de $(-1)^n$)

ε-voisinage
EXO $A+\Omega$ ouvert
COR : toute partie A est intersection de ses ε-voisinage, donc dénom d'ouverts : $A=\bigcap\limits_{n\geq 1}\left(A+\frac{1}{n}\mathbb{B}\right)$

5 Limite continuité

5.1 limites

$f\in F^{A\subset E}$ tend vers $a\in\overline{A}$ –> comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en mettant $\|\cdot\|$ au lieu de $|\cdot|$ –> ON RETROUVE TOUT
unicité limite, cv => bornée au voisinage, carac séquentielle, linéaitié de lim, $a_n\longrightarrow a\implies\|a_n\|\longrightarrow\|a\|$, $o(1)\,O(1)=o(1)$.
Un vecteur a une limite (produit) ssi il cs.
Rq : $\lim_a f\in\overline{f(A)}$.
Rq : si $a\notin\overline{A}$, n'importe quelle limite satifisait la définition

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\ |x-a|<\delta\implies|f(x)-l|<\varepsilon$$

(prendre $\varepsilon<d\left(a,\overline{A}\right)$)

ATTETNTION : soit $f:E\longrightarrow F$
si $E\neq R$, on note $\lim_\infty f=a$ pour $\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty}f(x)=a$ (pour x assez grand, sous-entendu en norme)
si $F\neq R$: $\lim f=\infty$ veut dire $\lim|f|=\infty$ (pour f assez grand, sous-entendu en norme)

Les limites sont locales. A cette fin, on peut définir des germes, puis montrer que la limite est le seul morphisme d'algèbres des germes convergeant.

DEF. on définit l'esapce des ***germes*** au voisinafes d'un point $a\in E$ par les fonctions définies au voisinae de a (pas forcément le même voisinage) avec les opérations définies sur l'intersections des voisinages.

EXO *Montrer que le seul morphisme d'albègres des germes admettant une limite en a vers R est la limite en a.*
DEM. un tel morphisme est surjectif (car 1 est attient), son noyau est un idéal maximal (car son quoeitn R est un corps) : or, si $f(a)\neq 0$, par continuité f reste $\neq 0$ autour de a, donc est inversible, donc n'est dans aucun idél max ; par contraposée, tout idéal max est inclus dans $\operatorname{Ker}\operatorname{eval}_a$, donc lui est égal.

5.2 continuité

continue en a si admet lim en a (si déf en a, cette limite est nécessairment $f(a)$)
continue => borné
critère séqutiel–> TOUT RETROUVER AVEC SUITES
fonction vectorielle continue (pour produit) ssi toutes composantes continues

carac topolog avec ouverts et fermés
APP : si $f,g:X\longrightarrow Y$ métriques continus, alors $\{f=g\}$ est fermée comme préimage de la diagonale par (f,g)

Comme dans R, les points de continuité formeent une intesction dénombrable d'ouverts
PROP (culture)
Soit f de A dans F. L'ensmble des points de continuité est l'intersection des

$$\left\{a\in A\ ;\ \exists\delta>0,\left\{\begin{array}{c}|x-a|<\delta\\|y-a|<\delta\end{array}\right.\implies|f(x)-f(y)|<\frac{1}{n}\right\}$$

Réciproquemen, on peut montrre qu'une telel intersection est l'ensemgledes poits de contonuité d'une application (cf. séries)

sont cotinues : projection canonique, lip, polynome.
EG : tr, det, ${}^t\cdot$, $GL_n = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ ouvert, $\cdot^{-1} = \frac{\operatorname{Com} A}{\det A}$, $\|\cdot\|$ 1-lip (même cvx), $d(A,\cdot)$ 1-lip donc CO
EXO : F et G fermé disjoint => $\exists f$CO =1 sur F et 0 sur G : poser $f = \frac{d_F}{d_F + d_G}$.

uc : PAS TOPO : comme on le voit avec le lien avec Cauchy (on peut en parler dans evt, toutefois)
critère séqu, image uc de suite de cauhcy est de cauchy
CEG : $\frac{1}{n}$ de cauchy mais son image continue par $\frac{1}{x}$ n'est pas de cauchy

définition *homéo* / *bicontinue*

CEG
$f(a,b) = \frac{|a|^\alpha |b|^\beta}{a^2+b^2}$ où $\alpha, \beta > 0$ (0 en 0). On regarde $f(r\cos, r\sin)$, CO en 0 ssi $\alpha + \beta > 2$.
$g(a,b) = \frac{b^2}{a}$ (0 en 0) est CO sur toute droite en 0, mais pas CO en 0.

lip, *holder*

5.3 continuité des AL

REVIENT à DES INEGALITE.

plein d'équivalences, notation $L_c(E,F)$, norme triple (=plus petite constante de lipschizt), prop évidentes
En dim finie, tout AL est continue.
EG : $\|P'\| \leq c_n \|P\|$ sur $R_n[X]$
CEG : Diracs $C0$ pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour L^1

RQ : lanorme triple est comme la résistance en physiqe : on a génrélrmen aucune idée de comment on la trouve, et on s'en tape puiqu'on nous la donne, ce qui permet de relier x et ux (comme R relie U et I)

appl multilinéaire : continue (produit) ssi bornée sur boule unité ssi $\exists C, \|f(\overrightarrow{a})\| \leq C \prod |a_i|$.
En dim finie, tout AML est continue.
EG : $(\lambda, a, b) \mapsto \lambda a + b$

eg du produit sur une algèbre : continue ssi $\exists A,\ A\|\cdot\|$ sous-multiplicative.
Donc polynome continue sur une algèbre normée.

appplication p-linéaire : continue ssi
Co en 0, bornée sur $\mathbb{S}^p$ ou $\mathbb{B}^p$, "lipschitzinn" en 0 : $\|f(\overrightarrow{a})\| \leq C \prod \|a_i\|$
(tout marche pareil, sauf une jonction où il faut découper en deux termes comme pour la continuité du produit)

5.4 Dérivalibilité

TRès briveement : défintion identique (doite/gauche) si Domaine est un ouvert de R ou C, D1=>C0, la dérivation est linéaire, si à valeur dans une algèbre normée meme formule pour le produit (d'où les dérivées polynomiales).
f k-lip ssi $\|f'\| \leq k$.

En revnahce, plus de Rolle ni TAF. Mais l'inégalité reste
IAF $\quad f$ C^0sur $S := [a,b]$ et D^1 sur $\mathring{S}$ Alors $\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\| \leq \|f'\|$.
DEM : OPS D^1 sur S en passant à la limite (f, θ continue)
Notons $A := \|f'\|_\infty$. Le cas $\|f'\| \leq A$ s'obtenant par passage à la limite de $\|f'\| < A + \varepsilon$, OPS $\|f'\| < A$. Alors $\tau_a f < A$ autour de a. Soit s le sup de ce voisinage, que l'on veut $= b$. SInon, à **droite** de s il y a un voiinage où $\tau_s f < A$, d'où $\tau_a f = \frac{f - f(s) + f(s) - f(a)}{\cdot - a} \leq \frac{A(\cdot - s) + A(s-a)}{\cdot - a} = A$, contredisant la maximalité de s.
COR 1 : th limite dérivée.
COR 2 : $f' = 0 \implies f$ cste

COR : f, θ C^0sur $S := [a,b]$ et D^1 sur $\mathring{S}$. Alors $\|f'\| \leq \theta' \implies \|\Delta f\| \leq \Delta\theta$.

DEM : reprendre la même. Si Banach, $\Delta f = \int f'$ est justifié car la déivé de $f - \int_a^{\cdot} f'$ est nulle : d'où $\|\Delta f\| = \left\|\int_S f'\right\| \leq \int_S \|f'\| \leq \int_S \theta' = \Delta\theta$.

TL saute mais restse son inégalité

TY valide

TI valide (si arrivée Banahch)

Attention : etre dérivable sur C est très très fort, on y reviendra

Si domain pas dans$R$ou C, on ne peut pas diviser par un vecteur –> on va remplacer la dérivée (en fait l'applcation tangente $x \mapsto f'(a)\,x$) par la différetielle.

6 Compactié

6.1 BW

Rq : def très bien (on veut avoir deslimites), mais difficle de se passer des extractions : les parties où toute suite converge sont les singletons !

compact =>fermé borné

fermé d'un compact => compact

EG : bord d'un compact est compact.

image continue d'un compact => compact

produit (fini) de compact => compact

EG : boule unité infinie de K^n, donc sphère unité aussi.

f continue sur compact => bornée et atteitn ses bornes (soit $f(a_n) \longrightarrow \sup f$. or $f(K)$ fermé)

réciproque vrai (dans métriques) : soit a_n d'adhénce vide. Tout point est donc isolé des a_n, en pariculier ceux-là, d'où une suite d'ouvert U_n deux à deux disjoints contenat chacun un a_n. Alors la fonction $\sum nd\left(\cdot, {}^c U_n\right)$ est continue mais non bornée.

(d'où terminoligie *extrémal* utilisé par Fréchet dans sa thèse en 1906)

EG : points de Fekete : si K compact alors $\prod_{i<j} \|a_i - a_j\|$ admet un max (pas unique : cf deux point sur le cercle).

En dim finie, toutes normes équival (on norme E par la norme ∞ transportée de K^n apèrs choix d'une base : alors toute norme N est lip donc CO, donc atteint ses ext sur le compact shère unité, ces valeurs étant non nulles car un élément de la sphère a une norme non nulle)

En dim finie, compact = fermés bornés[2]

En dim finie, toute AL est continue (prendre norme infine)

RQ : dans un compact, $a_n \longrightarrow l$ ssi $Adh(a) = \{l\}$ (une suite cv ssi don adh est un singleton)

EXO : soit K compact et $f : K \longrightarrow K$ continue et $k_n := f^{\circ n}(k)$ avec $k \in K$. On suppose que k_n possède une valeur d'adhérence a isolée des autres (et fixe par f). Mq $k_n \longrightarrow a$.

Dem k_n étant bornée, il suffit de montrer que a est la seule valeur d'ahrédence. Soit b une autre. IL y a une boule autour de a (de rayon ε) ne contenant aucune valeur d'adhérence. Puisque a est vadh, l'ensemble A des n tq $|k_n - a| < \varepsilon$ et $|k_n - b| > \varepsilon$ est inifni. Puisque b est vadh, idem Ben échangena a et b. On regarde alors les entier n de A tq $n+1 \in B$. Il est infini car B infini. Soit un tel n : on a $\varepsilon > |k_{n+1} - b| = |f(k_n) - b| \longrightarrow |f(a) - b| = |a - b|$ absrude.?????

EXO : $f : R^n \longrightarrow R$ tq $\lim_\infty f = \infty$ atteint son inf (plus général que cas réel)

[2] terminologie relativement compacte = d'adhrence compact = compact si je rajouter l'hypothèse fermé, ce que je préfère faire toute le temps

COR : la distance à un sev de dim fini eest atteinte

EXO : un bijection continue d'image un compact est automatiquement bicontinue

TH : point fixe pour application $\|f(a) - f(b)\| < \|a - b\|$? ? ?

CEG : φforme linéaire sur $C^0([-1,1], R)$ qui $f \mapsto \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$ est CO pour $\|\cdot\|_\infty$, mais le sup n'est pas un max (prendre 1 sur R^-, -1 sur R^+, reliés par un très petit bout de droite de pente très grande)

CEG : dans $C^0(R, R)$, B non compacte : si f_n nullle et pic de hauter 1 entre n et $n+1$, alors $\|f_b - f_a\| = 1$ et Cuachy est nié

Plus génralement th Riesz -> trois démo

par les suites randé

par tosel : en dim infinie, on constrit $d(x_{n+1}, \langle x_1, ..., x_n \rangle) \geq 1$, empechant toute suite extraite de converger par Cauchy

6.2 BL

Riesdz par les boules (petrelis)

cu local sur compact => Cu global

$l(\bigcup I_n) \leq \sum l(I_n)$ si $I_n \subset [0,1] \forall n$ (clair si union finie)

$\{u_n\} \cup \{\lim u\}$

Nullstellensatz : iédaux max de $C^0(K)$ (généralise le cas de $K = [a, b]$)

APP : *les morphismes d'algèbres $C^0(K) \longrightarrow R$ sont les évalutions*

DEM : le noyau d'un tel morpshime est un idéal max, donc un ker éval, donc le morphisme est colinéaire à un eval, puis multiplicativité entrain l'égalité.

On peut retrouver le fait que l'opérateur lim est le seu morsphime d'algèbre $R_{cv}^N \longrightarrow R$ invariant par extracction : il suffti de voir $R_{cv}^N = C^0\left(\widehat{\mathbb{N}}, \mathbb{R}\right)$, que le noyau du morphisme est un idéal max, donc correpond à l'évalutaion en un point de $\widehat{\mathbb{N}}$, l'hypohtèse d'extratction empeche ce point d'être entier

.

EXO Idem en remplacnat K par $\mathbb{N}$ discret, ie en reamplcar $C^0(K)$ par R^N

DEM ? ? ?

Rq : si E pas compact, pas toujours vrai. Il y a un compactifé βE (de **Stone Čech**), tout idéal max de $C^0(E)$ correspondant à un point de βE, mais même si le corps résiduel est $\mathbb{R}$ (cas d'un morphisme d'algère réél), le point n'est pas forcément dans E.

preuve Randé / Tosl

1. *mq un compact est précompact* :
2. **(lemme recouvrment Lebesgue)** *soit O_i un recouvrement d'ouverts. Mq il y a un $\varepsilon > 0$ tq tout $a \in E$ admet un i* tq $a + \varepsilon\mathbb{B} \subset O_i$ (le sup de ces ε est le ***nombre de Lebesgue*** du recouvrement) : par l'absurde, pour tout $\frac{1}{n}$ il y a un a_n tq la boule $a_n + \frac{1}{n}\mathbb{B}$ n'est incluse dans aucun O_i. Soit a valeu rd'ahrédhnce de a_n, qui tombe dans un O_{i_0}, mettons $a + \frac{3}{n_0}\mathbb{B} \subset O_{i_0}$. Alors $a_{n_0} + \frac{1}{n_0}\mathbb{B} \subset a + \frac{3}{n_0}\mathbb{B} \subset O_{i_0}$, absude.
3. *conclure* : soit O_i recouvrement ouvert. On lui associe son nombre de Lebesgue ε, puis on le recouvre par un nb fini de boules de rayon ε. Par def du nombre de Lesbesgue, toute boule est incluse dans un O_i, lesqueles conviennt.

preuve Seb Gouezl / Xav Caruso

1. *mq un compact métrique est séparable* : on recouvre par précompactité par des boules de rayon $\frac{1}{n}$ dont les centres conviennent
2. *mq qu'un métrique séparble admet une base dénombrable d'ouverts* : soit a_n dense, alors les boules $a_n + \frac{1}{m}\mathbb{B}$ conviennent (soit U ouvert et U' la réunion de telles boules incluses dans U : clair que $U' \subset U$, mq $U \subset U'$: soit $u \in U$, il y a un m tq $u + \frac{3}{m}\mathbb{B} \subset \mathbb{U}$, puis il ya un n tq $d(u, a_n) < \frac{1}{m}$, d'où $u \in a_n + \frac{2}{m}\mathbb{B} \subset U$)
3. **(th Lindelöf)** *mq dans un métrique séparable on peut de toute receouvret ouvert extraire un sous-receouvrment dénombrable* : soit (O_i) recouvrment d'ouverts. Pour tout n, ou bien l'ouvert de base B_n est inclus dans un $O_{i(n)}$, ou bien non et on pose $i(n)$ arbitraire. Mq les $O_{i(n)}$ conviennent. SOit $a \in E$ et i tq $a \in O_i$ et n tq $a \in B_n \subset O_i$. Alors $B_n \subset O_{i(n)}$, CQFD

4. *conclure* : d'après 1 et 3 on peut prendre un recouvrement *dénombrable* (O_n). Quiite à remplacer $O_n \leftarrow \bigcup_1^n O_i$, OPS O_n croissant. Posons $F_n = {}^c O_n$. Alors les F_n sont des fermés décroissant de limite vide (car $\cap F_n \subset \cap {}^c O_n = {}^c \cup O_n \subset {}^c E = \emptyset$), mq l'un est vide (ce qui conclura $E = O'_n$) : sinon une valeur d'adhérence d'un suite f_n serait dans $\cap F'_{\varphi(n)} = \cap F'_n = \emptyset$.

Asocoli : soit F fermé borné dans $C^0(K)$. Alors F compact si de plus F équicontinue.

7 Complétude

Banach
pas notion topo ! $|\operatorname{atn} b - \operatorname{atn} a| \sim |b-a|$ mais première distance possède (n) de Cauchy
complet => fermé
fermé d'un complet => complet
produit (fini) de complets => complet
compact => complet
critère de Cauchy pour applications à valeurs dans un banach
th fermés emboités
CEG : (pas bornés) $\bigcap [n, \infty[= \emptyset$
CEG : (pas bornés) dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$ pour L^∞, $F_n = \left\{f \text{ nulles sur } \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \text{ et tq } f(1) = 1\right\}$.
TOut $\mathbb{K}$-ev de dim fine est complet
en dimfinie, les complets sont les fermés.

Prolongeent application uc à leur adhérence
Soit $a \in \overline{A}$, mettons $a = \lim \alpha_n$. La siute $f(\alpha_n)$ est de Cauhcy, donc cv vers un l. Mq définir $f(a) = l$ est ok.. Soit $a_n \longrightarrow a$. Alors la suite shuffle a_n, α_n cv vers 1, donc est de cuachy, donc son image cv. Comme $f(\alpha_n)$ en est une ss, la limite est l. Comme $f(a_n)$ en est une autre ss, $f(a_n) \longrightarrow l$, CQFD.

EG : $C^0(K, B)$ est Banach pour L^∞
CEG : $C^0([-1,1], \mathbb{R})$ pas Banach pour L^1 : prendre 1 sur R^-, -1 sur R^+, reliés par un très petit bout de droite de pente très grande
EG : $C^k(K, B)$ est Banach pour $\sum_0^k \left\|f^{(i)}\right\|_\infty$

EG : une *algèbre de Banach* est une algère normée complète.
Dans une algèbre de Banahc, tout idéal maximal est fermé, $A^\times$ est ouvert, donc $\operatorname{Sp} a = [a - \cdot 1]^{-1}({}^c A^\times)$ est fermé

th Banach Picard
Rq : f contractant => $\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\|$ avec = ssi $a = b$
(recirpoque fausse : $f = \sin$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

EXO : Id+contractino = homéo (en dim finie) (dans Banach ?)
COR : auto CO + lip petit est homéo $\left(a + l = a\left(\operatorname{Id} + a^{-1} l\right)\right)$

Baire : lesC^0 jamais $D1$ sont denses (cf GN agreg)
lemme Cantor Lebesgue : (a_n) et (b_n) suites de réels, $\omega_n \longrightarrow \infty$, si $a_n \cos(\omega_n \cdot) + b_n \sin(\omega_n \cdot)$ cs 0 sur un intervalle infini, alors a_n et b_n tendent vers 0 (formuler avec $c_n \cos(\omega_n \cdot - \varphi_n)$)

PRECOMPACITE : équivauet à "on peut extraire une sous-suite de Cauchy" $\|$ compact = "on peut extraire une sous-suite cv"
=>on prend des boules en nb fini de rayon 1, l'une de ces boules contient une infinité de termes ; on recommence avec rayon $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... puis extraction diagonale
<= soit $\varepsilon > 0$ tq pas de recouvrmeent fini par boule de rayon ε. On consturuit alors $x_{n+1} \in B_{n+1} \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$, de sorte que $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon$ et x_n pas de Cauchy

Alors clair que *compact* <=> *précompact* et *complet*. (vérifier que la limite reste bien dans la partie ! ! ok car complet donc fermé)

8 Connexité

tout faire par arcs, puis conexxité topo après.

connexe = toutte fonction loc constante est constante (caract du gourdon)
COR : *l'adhérence d'un connexe reste connexe* (prolongement par continuité...)

Composante connexe d'un point : union des connexes le contenan (c'est connexe commr réinon de connexes d'intesrction no nvide, c'est fermé car d"adhérence connexe plus grande contenant le point)
cpa => connexe : fixons a. pour tout x, il y a un chemin γ_x de a à x. Alors $X = \bigcup \mathrm{Im}\,\gamma_x$ union de conenxe d'intersection nnon vide

Dans evn, ouvert ets cpa (et meme lignes brisée) ssi connexe.

étoilé par arcs : pour faire nantes lyon, on passe par paris
(rq : convexe = étoilé en tout point : o**n peut voir tout le convee depusi n'imrote que point**)
image continue d'un cpa est cpa

COR : Cercle pas homéo à droite
droite pas homéo à carré
pas de racines carré continu dansC^* ; sinon $z \mapsto \frac{r(-z)}{r(z)}$ est de carré -1, donc arive dans $\{\pm i\}$; comme l'image doit etre cpa, elle est constante. Alors $r(z) = r(--z) = \varepsilon r(-z) = \varepsilon^2 r(z) = -r(z)$, doù $r \equiv 0$ exclu.
Ainsi, pas de continuité gloable des racines : $X^2 - a = (X - r(a))(X + r(a))$ impossible. Mais locale possible ! (et voià le pb du passage du local au global)

EG
composantes cpa des projecteurs complexe ? tr continue, donc 2proj reliés ont même rang ; réciproque ok car $GL(C)$ cpa
EG
S cpa : si $0 \notin [ab]$, on normalise le chemine $[ab]$, sino on passe par un troisime point (ok si sphère de dim ≥ 1)
les composantes cpa d'un ouvert sont ouvertes (car les boules sont cpa)
CEG : ci-dessus : les composantes cpa sont de traces fixe, donc incluse dans un sev strict, lequel est d'intérieur vide.

EG
un sea A d'un Rev de dim fnie est de complémentaire cpa ssi $\mathrm{codim}\, A \geq 2$

EG : $GL_n(C)$: on relie tout le monde à l'identité :
DEM1 On trigonalise $P^{-1}TP$, on étouffe les coef hors diag de T, et on envoie les coef de la diag sur 1 (possible dans$C$)
DEM2 on étouffe les tranvections et on relie le det à 1 dans C
On a le meˆme résultat sur R : il suffit de monre que tout proj est sembale à J_r avec matrice de passsage à det > 0 (on conjugue par que des 1 et un -1)

EXO
le plan privé d'une partie dénombrable est cpa : soit a et b dans $C \backslash A$ et $D = med[ab]$. On regarde tous les chemins de a à b formé de deux lignes droites se joignant sur D : si A contient un point dans chaque, A contieunt le continue, absurde.

EXO
les polynôme ($\mathbb{K}$) dont l'imag contient un point donné est cpa.
Soit $A(a) = \lambda = B(b)$ et $n := \max\{\deg A, \deg B\}$. On interpole en rajoutant n point a_i, on fait vaier $a_0(t) = (1-t)a + tb$ et $\lambda_i(t) = (1-t)A(a_i) + tB(a_i)$, puis $\sum \lambda_i(t) L_i(t)$ relie A à B

attention : les ouvert de R sont $\bigcup$ dénomrable, mais pas forcément ordonneé naturllepent : envoyer une salve en zéro
PLus généralement : ouverts de R^n sont réunino dénombrable de boules ouvertes

EXO : dans le plan, une partie connexe non bornée contient deux points à distance arbitraire.

DEM Une fois fixé un point x dans la partie, l'image de cette dernière, onnexe, par la fonction distance-à-x, est un connexe, donc un intervalle de R, qui contient 0 et qui n'est pas borné, donc contient d

La connexité ne passe pas au bord : prendre un anneau

TH : les ouvert fermés d'un cpa sont trivaux
–> vers la connexité

QUESTION : si x et y ne peuvent être séparés par des ouverts disjoints de X (ie si y est dans tout voisinage fermé de x dans X), alors x et y sont-ils nécessairement dans la même composante connexe de X ?

C'est **faux**. Contre-exemple : {1/n, n in N^*} \/ {0_a, 0_b}, avec la topologie qu'on pense. Les composantes connexes sont réduites à des singletons, mais 0_a et 0_b ne peuvent être séparés par ouverts disjoints.

9 Cas de la dim finie : $\mathbb{C}$

Les normes (en dim finie ?) sont caractérisées par leur boule unitié : convexe symétrique dont 0 est à l'intérieur. Donc pas de conjecture fumeuse.

TOUTES LES NOTIONS TOLOGIQES SONT LES MEMES : ouverts, fermés, bornés...

Pas d'TAC, mais une IAG (en intégrant)

10 Métriques

Fréchet disait *écart* dans sa thèse (1906)

axiomes d'une distances : la positivité est impliqué par symétrie et inégg :
$ac \leq ab + ba + ac \implies 2ab \geq 0$.

De plus, si $ab = 0$, on a $ac \leq ab + bc = bc$, d'où par sym $ac = bc$, donc d passe au quotient où l'on a l'axiome de séparabilité

$\overset{\circ}{\overline{B}} = \overset{\circ}{B}$ et $\overline{\overset{\circ}{B}} = \overline{B}$ FAUX : prendre distance dicrete, ou alors celle sur Z : $\overline{B}(0) = \{-1, 0, 1\}$

dsitances équivalentes (en termes d'inégalités) => unifor éq (Id est uC dans les deux sens) => topo eq
$d \sim \frac{d}{d+1}$: en effet, $d \longrightarrow 0 \iff 1 - \frac{1}{1+d} \longrightarrow 0$, donc fermé identiques
être bornée n'est pas une notion topologique :

plongment arenfelles ? oui ! intuition des evn bonne pour les métriques.

11 Normes ultramétriques et valuations

cf. hellgouach : def de v.abs sur anneau par $|a + b| \leq C(|a| + |b|)$, traingulaire ssi $C \leq 2$ (? ?), ultramétrique ssi $C = 1$ (ou encore ssi Z borné : developep $|(a + b)^n| \leq n \max\{|a|, |b|\}^n |\mathbb{Z}|$) avec égalité dès que $|a| \neq |b|$.

truc bizarrz : tout triangle est isocèle, tout point d'une boule est son centre, deux boules sont disjointes ou concentriques.

eg : des valuations aux normes ultramétriques, cas des $|\cdot|_p$ sur $\mathbb{Q}$. Complétion $\longrightarrow \mathbb{Q}_p$, qui est localement compact (comme $\mathbb{R}$), et dont l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers (ie de vp ≥ 0) est compact (c'est aussi sa sphre unité). rigolo : $\mathbb{N}$ est dense

PROP : ${}^{\mathbb{Z}_p}\!/\!_{p^n\mathbb{Z}_p} \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p^n\mathbb{Z}}$ pour tout n

PROP : $\mathbb{Z}_p$ stable par $\binom{\cdot}{n}$ (vrai sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ dense, $\binom{\cdot}{n}$ continu car poly)

Comme pour $Q \hookrightarrow R \hookrightarrow \mathbf{C}$, on fait $Q \hookrightarrow Q_p \hookrightarrow \overline{Q_p}$, mais ce dernier plus complet. En le recomplétant, il reste alg clos : on le note $\mathbb{C}_p$. C'est un corps isom à $\mathbb{C}$.

12 Cantor

tu as meme la caracterisation suivante des ensembles de Cantor dans R^n ce sont les ensembles compacts totalement discontinus sans points isoles.

IL est facile de voir que la reunion de deux cantor est encore un cantor