Intégration segmentaire
(version quasi-achevée)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

1 Mise en jambe

Pour $\lambda \geq 0$, on pose $f(\lambda) := \lim_{n\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda i}{n}\right)}$. La fonction f est-elle bien définie ? Est-elle continue ?

Solution proposée.
À $\lambda > 0$ fixé, notons a_n le terme dont on cherche la limite (on a clairement $f(0) = 1$).
On prend le logarithme pour se ramener à une somme de Riemann :

$$\ln a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\lambda i}{n}\right).$$

On peut voir cette dernière comme une somme de Riemann de :

1. la fonction $\ln(1 + \lambda\cdot)$ intégrée entre 0 et 1, avec pas $\frac{1}{n}$, d'où
$$\ln a_n \overset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1 + \lambda\cdot) \ ;$$
2. la fonction $\ln(1 + \cdot)$ intégrée entre 0 et λ, avec pas $\frac{\lambda}{n}$, d'où
$$\ln a_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{n} \ln\left(1 + \frac{\lambda i}{n}\right) \overset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \ln(1 + \cdot) \ ;$$
3. la fonction ln intégrée entre 1 et $1 + \lambda$, avec pas $\frac{\lambda}{n}$, d'où
$$\ln a_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{n} \ln\left(1 + \frac{\lambda i}{n}\right) \overset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda} \int_1^{1+\lambda} \ln .$$

Ces trois démarches mènent au même résultat, la troisième étant la plus rapide – mais il faut faire attention au pas $\neq \frac{1}{n}$. Une fois calculée l'inégrale

$$\int_1^{1+\lambda} \ln = [x \ln x - x]_{x=1}^{1+\lambda} = (1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - (1 + \lambda) + 1,$$

on en déduit que $f(\lambda)$ a un sens pour tout $\lambda > 0$ et vaut

$$f(\lambda) = e^{(1+\lambda)\ln(1+\lambda)-\lambda} = \frac{(1 + \lambda)^{1+\lambda}}{e^{\lambda}} \text{ qui est continue en } \lambda.$$

Pour montrer la continuité en 0, on fait un DL :

$$\ln f(\lambda) = (1 + \lambda) \ln(1 + \lambda) - \lambda = (1 + \lambda)\left(\lambda + O\left(\lambda^2\right)\right) - \lambda = O\left(\lambda^2\right),$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} e^{O\left(\lambda^2\right)} = 1 = f(0).$$

Finalement, la fonction f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}^+$.

2 Amuse-gueule

Soit f une application réelle continue sur $[0, 1]$.

1. Trouver $\lim_{n\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx$.
2. Déterminer $\lim_{n\infty} \int_0^1 n x^n f(x)\, dx$

Solution proposée.

1. Il faut sentir ce qui se passe. Pour $x<1$ fixé, $x^n f(x)$ tend vers 0. Pour avoir une borne fixée <1, on prend un $\varepsilon>0$ et on l'intégrale sur $[0,1-\varepsilon]$: elle est majorée en module par $(1-\varepsilon)^n \int |f|$ qui tend toujours vers 0.

   Par ailleurs, le bout restant est majoré (en module) par $\varepsilon \max |f|$, lequel existe et est fini car f est continue sur un segment.

   On en déduit que, pour n assez grand, $\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ est majorée (en module) par $\varepsilon+\varepsilon \max|f|$, ce qui montre que la limite cherchée est 0.

2. On procède de même : sur $[0,1-\varepsilon]$, l'intégrale se majore (en module) par $n(1-\varepsilon)^n \int |f|$ qui est de limite nulle.

   Sur le reste, f vaut environ $f(1)$ par continuité en 1, ce qui permet d'intuiter

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(x)\,dx \simeq \int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(1)\,dx = f(1)\frac{n}{n+1}\left[1-(1-\varepsilon)^n\right] \longrightarrow f(1).$$

   Pour justifier notre approximation, on regarde la différence

$$\left|\int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(x)\,dx - \int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(1)\,dx\right| \leq \int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n \left|f(x)-f(1)\right| dx.$$

   Par continuité de f en 1, il y a un $\delta>0$ tel que $|x-1|<\delta \implies |f(x)-f(1)|<\varepsilon$. En découpant rétrospectivement notre intégrale sur $[0,1-\delta]$ et $[1-\delta,1]$ (on s'est quand même donnée un $\varepsilon>0$), la différence ci-dessus est majorée par $\int_{1-\delta}^1 nx^n\varepsilon dx=\varepsilon\left[1-(1-\delta)^n\right]\leq\varepsilon$.

   Il en résulte

$$\int_0^1 nx^n f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{1-\varepsilon} nx^n f(x)\,dx}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(x)\,dx - \int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(1)\,dx}_{\longrightarrow 0} + \int_{1-\varepsilon}^{1} nx^n f(1)\,dx \longrightarrow f(1).$$

Aller plus loin dans le DA ? ? ? ?

3 Un classique incontournable : les intégrales de Wallis

Calculer $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$ *et en donner un équivalent.*

Solution proposée.

On commence par obtenir une formule de récurrence en intégrant par parties : (la flèche indique le sens de dérivation)

$$\left\downarrow \begin{array}{cc} \sin^{n-1} & \sin \\ (n-1)\cos\times\sin^{n-2} & -\cos \end{array}\right\uparrow.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n &= \left[-\sin^{n-1}\times\cos\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\times\cos^2 \\
&= 0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\times\left(1-\sin^2\right) \\
I_n &= (n-1)\left(I_{n-2}-I_n\right) \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}.
\end{aligned}$$

Sachant que $I_0=\frac{\pi}{2}$ et $I_1=1$, on trouve, selon la parité de n, et en complétant les factorielles :

$$\left\{\begin{array}{l} I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-3)\cdots 3} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!} \end{array}\right..$$

En utilisant la notation $n!! = n\,(n-2)\,(n-4)\cdots$, on peut abréger en

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1+(-1)^n}{2}}.$$

Pour obtenir l'équivalent, on observe déjà que la suite (I_n) est décroissante (l'intégrande est la puissance n-ième d'un truc positif ≤ 1), d'où $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$; comme de plus $I_{2n+1} \sim I_{2n-1}$, on a $I_{n+1} \sim I_n$, indépendamment de la parité de n. En introduisant le produit $I_{2n}I_{2n+1}$ (qui se simplifie bien), on trouve

$$I_{2n+1} \sim I_{2n} \sim \sqrt{I_{2n}I_{2n+1}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}}{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n+1)}},$$

ce qui se résume en l'unique formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Remarque. La connaissance des intégrales de Wallis aide à trouver un équivalent de la factorielle. Il s'agit de la *formule de Stirling*, démontrée dans la feuille sur les DLs :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Remarquer $I_n \sim I_{n+2}$, donc raisonnalbe que $I_n \sim I_{n+1}$ car monontone. On vérifie...

Autre idée : qd n pair, linéariser $\cos^n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos((2p-n)\,\cdot)$, tous les $\cos(2?\cdot)$ sont tués par $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ sauf $\cos(0)$, d'où le seul terme restant $\binom{n}{n/2}\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{2}$ et on retrouve formule ci-dessus.

Pour n impair, que donne linéarisation ? ? ? ?

4 Dérivabilité et sommes de Riemann

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0, et telle que $f(0) = 0$. On se donne un réel $\alpha > 0$. Étudier la limite de la suite

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right).$$

Solution proposée.

f étant dérivable en 0, on peut écrire $f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right) = f(0) + \frac{1}{n+i\alpha}f'(0) + o\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right)$. Or, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, il y a par définition du $o(\cdot)$ un n au-delà duquel

$$\sum_{i=1}^n \left|o\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right)\right| < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i\alpha}\varepsilon < \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\varepsilon = \varepsilon,$$

ce qui permet de négliger la somme mettant en jeu le $o(\cdot)$. Par ailleurs, la somme du milieu met en jeu une somme de Riemann :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}\alpha} \overset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x\alpha} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Il en résulte

$$\lim_{n\infty}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right) = f'(0)\,\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Proposer l'exo sous forme de deux doubles limites $\lim_{\substack{\alpha\to 0^+\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{n+i\alpha}\right)$. ? ? ? ?

5 Lorsque les sommes de Riemann ne suffisent plus

Trouver la limite de $\frac{n}{2} - \sum_1^n \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

$= n \times \left(\int_1^2 \frac{dx}{x^2} - S_n f \right)$, forme indéterminée.

6 Intégration, convexité, géométrie...

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue. Montrer que*

$$\sqrt{1 + \left(\int_0^1 f \right)^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + f^2} \leq 1 + \int_0^1 f,$$

préciser les cas d'égalité et donner une interprétation géométrique.

Solution proposée.
L'inégalité de droite est immédiate en écrivant

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f^2} \leq \int_0^1 (1 + f) = 1 + \int_0^1 f$$

(noter que l'on a utilisé $f \geq 0$).
Pour celle de gauche, on peut la réécrire sous la forme

$$\varphi\left(\int_0^1 f \right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f \text{ où } \varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

On va donc utiliser Jensen (inégalité de convexité)[1]. Vérifions que φ est convexe. La dérivée $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ varie comme son carré $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ qui est bien croissant, d'où le résultat.

On a égalité à droite ssi $\sqrt{1 + f^2} = 1 + f$, *i. e.* ssi $f \equiv 0$. À gauche, puisque φ est strictement convexe, on a égalité ssi f est constante.

Concernant l'interprétation géométrique, l'idée est de voir le $\int \sqrt{1 + f^2}$ comme

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int ds = L$$

la longueur du graphe d'une certaine fonction y. On pose $F(x) = \int_0^x f$ une primitive de f. Les inégalités à montrer se mettent sous la forme

$$\sqrt{1 + F(1)^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + (F')^2} \leq 1 + F(1).$$

L'inégalité de gauche nous dit maintenant que le plus court chemin de l'origine au point $(1, F(1))$ est la ligne droite, ce qui fournit au passage le cas d'égalité F linéaire $\implies$ f constante. L'inégalité de droite se voit en remarquant que F croît par positivité de f, et donc la longueur de son graphe ne saurait dépasser celle du chemin $(0,0) \longrightarrow (0, F(1)) \longrightarrow (1, F(1))$.

Remarque. Il était également possible de montrer l'inégalité de gauche sans recourir à la convexité. En effet, quelle inégalité digne de ce nom mettant en jeu des carrés ne pourrait tomber sous les coups de Cauchy-Schwarz ? En cherchant un peu, on trouve qu'appliquer ce dernier aux deux fonctions $\sqrt{\sqrt{1 + f^2} \pm f}$ conclut.

[1] Pour une démonstration du cas continu, *cf.* feuille sur les fonctions convexes.

7 Intégration contre un polynôme

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que* $\int_a^b f(x)\, x^p dx = 0$ *pour tout* p *dans* $\{0,...,n\}$*. Montrer que* f *a au moins* $n+1$ *zéros.*

Variante : soit $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que* $\int_0^\pi f(x) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (px)\, dx = 0$ *pour tout* $p = 0,...,n$*. Montrer que* f *s'annule au moins* $n+1$ *fois.*

Peut-on remplacer l'hypothèse par $\int_0^\pi f(x) \begin{pmatrix} \sin^p x \\ \cos^p x \end{pmatrix} dx = 0$ *pour tout* $p = 0,...,n$ *?*

Solution proposée.

$n = 0$: itégrale nulle, intégrande CO, donc intégrande s'annule

$n = 1$: si au plus un zéro λ, on ajuste le signe grace à $X - \lambda$.

Par linéarité, l'hypothèse peut se réécrire $\int fP = 0$ pour tout polynôme de degré $\leq n$. Si f s'annule au plus n fois, on peut considérer les zéros $\xi_1,...,\xi_m$ où f change de signe, avec $0 \leq m \leq n$. Mais alors la fonction $f(x) \prod_{i=1}^m (x - \xi_i)$ est de signe constant, d'intégrale nulle et continue, donc est nulle partout : *contradiction.*

Autre solution[2] : intégrer par parties l'égalité $\int_a^b f(x)\, x^p dx = 0$ fait intervenir des primitives sucessives de f. Plus précisément, pour $k \geq 1$, si f_k désigne la k-ième primitive de f dont les dérivées d'ordre $0,1,2,...,k-1$ s'annulent en a, alors la formule de Taylor-Young avec reste intégral entre a et un $x \in [a,b]$ montre que $f_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)\, dt$. En développant et en utilisant les hypothèses, on voit que $f_k(b) = 0 = f_k(a)$ pour tout $1 \leq k \leq n+1$. Ainsi, pour un tel k, en intégrant $k-1$ fois par parties le produit $f \times 1$, tous les crochets sont nuls et il reste l'intégrale de f contre un monôme de degré $\leq n$, donc nulle. En particulier, f_{n+1} est d'intégrale nulle, donc s'annule entre a et b strictement (en plus de a et b). Le théorème de Rolle aini qu'une récurrence descendante sur $1 \leq k \leq n+1$ permet d'obtenir $n-k+3$ zéros pour f_k, d'où[3] $n+1$ zéros pour f, *CQFD.*

Même idée : si f ne s'annule pas, f reste de signe constant par continuité, tout comme sin sur $[0,\pi]$, donc l'intégrale $\int_0^\pi f \times \sin$ ne peut s'annuler. Maintenant, si f s'annule exactement en $a \in [0,\pi]$, alors la combinaison linéaire $\int f(x) \sin(x-a)\, dx$ est nulle, mais comme $\sin(\cdot - a)$ change de signe comme f, l'intrégrande reste de signe constant, donc est nulle. (!!!bien vérifier que $\sin(\cdot - a)$ a le même signe que $\mathrm{Id} - a$ sur $[-\pi,\pi]$, c'eest là qu'intervient la taille de l'intervalle d'intégration)

Cas général : si f change de signe au plus n fois, disons en a_i, on forme le produit $f(x) \prod \sin(x - a_i)$ qui garde signe constant. En développant et linéarisant, on obtient une intégrale nulle (mq par récurrence qu'un tel polynome avec $k \leq n$ facteurs est cobinaison linéaire de $\cos px$ et $\sin px$ avec $0 \leq p \leq k$), donc f est nulle.

Essayns de retrouver les $\begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (px)$ en linéarisant. Une récurrence mq $\cos^p x$ est somme de termes $\cos(px)$ (contrib non nulle), $\cos((p-2)x)$, $\cos((p-4)x)$, ... (on a plus précsment $\mathbb{R}_n[\cos] = \bigoplus_{p=0,...,n} \mathbb{R}\cos(px)$) ; idme pour $\sin^p x$ avec p impair, mais pb pour p pair (donne idem que $\cos^p x$, comme on s'en convainc pour $p = 2$). Ainis, on a

$$\operatorname*{Vect}_{k=0,...,n} \left\{\cos^k, \sin^k\right\} = \bigoplus_{p=0,...,n} \mathbb{R}\cos(px) + \bigoplus_{p \text{ impair}} \mathbb{R}\sin(px)$$

et il semble qu'on ne pourra pas y récupérer les $\sin(2px)$.

A-t-on pouur autant un CEG????

8 Étude de deux sommes

1. *Déterminer la limite de la somme* $\sum_{i=1}^n \sin\frac{i}{n} \sin\frac{i}{n^2}$.
2. *Pour* f,g *réelles continue sur* $[0,1]$*, trouver la limite de* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i+1}{n}\right)$.

Solution proposée.

[2] l'idée directrice vient de Nicolas MATET

[3] a et b ne sont plus compatibilisés comme zéros de f

1. On sent que pour n grand le terme $\sin \frac{i}{n^2}$ va se rapprocher rapidement de $\frac{i}{n^2}$, ce qui permettra d'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i}{n} \sin \frac{i}{n^2} \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n} \sin \frac{i}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 \mathrm{Id} \times \sin = [\mathrm{Id} \times (-\cos)]_0^1 + \int_0^1 \cos = \sin 1 - \cos 1.$$

Formalisons cela, en se rappelant que $\sin x = x + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ autour de 0 :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i}{n} \sin \frac{i}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \sin \frac{i}{n}\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i}{n}\left|\sin \frac{i}{n^2} - \frac{i}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^4} \varepsilon\left(\frac{i^2}{n^4}\right) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\left(\frac{i^2}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

La quantité $\frac{i^2}{n^4}$ dans le ε est majorée par $\frac{1}{n^2}$, donc pour n assez grand tous les $\varepsilon\left(\frac{\iota^2}{n^4}\right)$ pour $1 \leq i \leq n$ sont plus petits qu'un $\delta > 0$ arbitrairement fixé. Il en résulte que la différence étudiée tend vers 0, ce qui permet de conclure :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\left(\frac{i^2}{n^4}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta = \delta.$$

2. Même idée : le $\frac{i+1}{n}$ se comporte comme $\frac{i}{n}$, ce qui donne envie d'écrire

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i+1}{n}\right) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 fg$$

car fg est continue donc Riemann-intégrable.

Il nous faut évaluer la différence

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right)\right| \\
\leq \; & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|f\|_\infty \left|g\left(\frac{i+1}{n}\right) - g\left(\frac{i}{n}\right)\right|.
\end{aligned}$$

La fonction g étant uniformément continue sur $[0,1]$ par Heine, à $\varepsilon > 0$ donné il y a un $\delta > 0$ tel que $|x-y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. En particulier, puisqu'on a pour tout $1 \leq i \leq n$

$$\left|\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

il suffit de prendre n assez grand pour majorer la différence ci-dessus par $\frac{\|f\|_\infty}{n} n\varepsilon$. Quitte à diviser rétrospectivement notre ε par $\|f\|_\infty$, on a montré que la différence ci-dessus tendait vers 0, *CQFD*.

9 Étude d'une limite

Soient a et b deux réels > 0. On définit une suite $u_n = a + bn$. Étudier la limite du quotient

$$\frac{\frac{u_0 + \cdots + u_n}{n}}{\sqrt[n]{u_0 \cdots u_n}}.$$

Solution proposée.

On reconnaît le quotient d'une moyenne arithmétique par une moyenne géométrique. Les inégalités classiques nous disent que la limite cherchée doit être ≥ 1.

On observe également que l'expression étudiée est homogène en a et b, ce qui permet, quitte à diviser par b, de supposer $b=1$.

Regardons tout d'abord le numérateur :

$$\frac{u_0+\cdots+u_n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a}{n}+\frac{i}{n}\right)=a+\frac{n+1}{2}.$$

Si le quotient doit converger, puisque le numérateur divisé par n converge (vers $\frac{1}{2}$), alors le dénominateur divisé par n doit converger. Comme l'on a un produit et une racine, on passe au logarithme, ce qui donne

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{u_0\cdots u_n}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{u_0}{n}\cdots\frac{u_n}{n}}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{a}{n}+\frac{i}{n}\right)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\ln\left(\frac{a}{n}+\frac{i}{n}\right).$$

On reconnaît là presque une somme de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)\longrightarrow\int_0^1\ln=[x\ln x-x]_0^1=-1.$$

Pour s'y ramener, on compare ce que l'on a avec ce que l'on veut :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\ln\left(\frac{a}{n}+\frac{i}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{n}\left|\ln\frac{a}{n}\right|+\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\frac{a}{n}+\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}}\right|=\frac{1}{a}\underbrace{\left|\frac{a}{n}\ln\frac{a}{n}\right|}_{\longrightarrow 0}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{a}{i}\right).$$

Or, $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\longrightarrow 0$, donc Cesàro nous dit que le second terme ci-dessus tend vers 0. Le dénominateur (divisé par n) tend finalement vers $\exp(-1)$.

La limité cherchée vaut donc $\frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}}=\frac{e}{2}$, qui est bien >1 comme prévu.

10 Une inégalité avec des carrés

Soit f $\mathcal{C}^1:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $f(a)=0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2\leq\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f'^2$$

et préciser le cas d'égalité.

Solution proposée.

Une inégalité, des intégrales, des carrés... Le nom de Cauchy-Schwarz doit venir sans même y penser. Il y a plusieurs façons de démarrer, nous en proposons une qui aboutit rapidement

On part de l'idée suivante : pour aller du terme de gauche au terme de droite, il faut faire apparaître du f' à partir de f ; on fait par conséquent apparaître f comme une primitive de f' :

$$\int_a^b f^2=\int_a^b\left(\int_a^x f'\right)^2dx\leq\int_a^b\left(\int_a^x 1\int_a^x f'^2\right)dx\leq\int_a^b\left((x-a)\int_a^b f'^2\right)dx=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f'^2.$$

Pour le cas d'égalité, la seconde inégalité impose $f'=0$ sur $[x,b]$ pour tout $x\in[a,b]$, *i. e.* $f'=0\iff f\equiv f(a)=0$.

Remarque. Au lieu de la seconde inégalité ci-dessus, on aurait également pu conclure avec une IPP en dérivant $\int_a^x f'^2$ et intégrant $\int_a^x 1=(x-a)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_a^x 1\int_a^x f'^2\right)&=\left[\frac{(x-a)^2}{2}\int_a^x f'^2\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^2}{2}f'(x)^2\,dx\\&=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2-\int_a^b(?)^2\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2,\ \textit{CQFD.}\end{aligned}$$

Pour le cas d'égalité, la dernière inégalité impose la nullité de l'intégrande, donc la constance de f, ce qui revient à sa nullité.

11 Une formule close pour la n-ième primitive d'une fonction réelle

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue et $n\in\mathbb{N}$ un entier. Montrer que la $(n+1)$-ième primitive de f dont les $n+1$ dérivées s'annulent en a peut s'exprimer à l'aide d'une seule intégrale de la forme

$$x\mapsto\int_a^x P_n(x,\cdot)\,f$$

où P_n est un polynôme à coefficient rationnels de degré total n.

En calculant les premières valeurs, donner une formule simple pour P_n.

Solution proposée.

Pour $n=0$, on sait que la primitive de f s'annulant en a est donné par la formule $x\mapsto\int_a^x f$, d'où le résultat en posant $P_0=1$.

Soit maintenant $n\geq 1$. Contruisons P_{n+1} à l'aide de P_n en dérivant la formule recherchée. Pour ce faire, on commence par écrire notre polynôme selon la première variable (qui est constante vis-à-vis de l'intégration), mettons

$$P_{n+1}(x,t)=\sum_{i=0}^n P_{n+1}^i(t)\ x^i.$$

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x P_{n+1}(x,\cdot)\,f=\sum_{i=0}^n\frac{\partial}{\partial x}\left(x^i\int_a^x f\ P_{n+1}^i\right)=\sum_{i=1}^n ix^{i-1}\int_a^x f\ P_{n+1}^i+f(x)\sum_{i=0}^n x^iP_{n+1}^i(x)$$

que l'on aimerait être une $(n+1)$-ième primitive de f évaluée en x. On en connaît une par récurrence : $\sum_{i=0}^{n-1}x^i\int_a^x f\ P_n^i$. Il reste à calquer. Une manière de faire est de calquer les intégrales

$$\sum_{i=1}^n x^{i-1}\int_a^x f\ i\ P_{n+1}^i\text{ et }\sum_{i=1}^n x^{i-1}\int_a^x f\ P_n^{i-1},$$

ce qui peut se faire en calquant chaque degré, mettons

$$P_{n+1}^i=\frac{1}{i}P_n^{i-1}\text{ pour }i=1,...,n.$$

Il faut également tuer le terme $f(x)\sum_{i=0}^n x^iP_{n+1}^i(x)$ sans intrégrale, ce qui s'obtient en faisant

$$P_{n+1}^0(x)=-\sum_{i=1}^n P_{n+1}^i(x)\,x^i.$$

Les premiers calculs donnent

$$P_0=1,\ P_1=x-t,\ P_2=\frac{x^2}{2}-tx+\frac{t^2}{2}...$$

Si on est vraiment courageux, on calculera P_3 pour se conforter dans notre intuition que $P_n(x,t)=\frac{(x-t)^n}{n!}$.

Montrons cela proprement.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,dt &= \sum_{p+q=n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^p}{p!q!}\int_a^x(-t)^q f(t)\,dt\right)\\ &= \sum_{(p-1)+q=n}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!q!}\int_a^x(-t)^q f(t)\,dt\right)+\sum_{p+q=n}\left(\frac{x^p}{p!q!}(-x)^q f(x)\right)\\ &= \int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt+\underbrace{(x-x)^n f(x)}_{=0}.\end{aligned}$$

On retrouve bien la même formule un ordre plus bas.

Autre méthode.

Si tu veux spécifiquement la primitive qui s'annule n-1 fois en zéro, tu peux faire le raisonnement suivant : si tu écris bourrinement la primitive comme une intégrale itérée tu obtient $F_n(x) = \int_{0<x_1<\cdots<x_n<x} f(x_1)\, dx_1 \cdots dx_n$Ce qui par un habile changement de variable $x_i = x - t_i y_1$ devient

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{y_1} \int_{0<t_n<\cdots<t_2<t_1=1} f(x-y_1)\, dy_1 dt_2 \cdots dt_n y_1^{n-1} \\ &= \int_{y_1} f(x-y_1)\, y_1^{n-1} dy_1 \int_{0<t_n<\cdots<t_2<t_1=1} dt_2 \cdots dt_n \end{aligned}$$

Le volume des tuplets $(t_n, ..., t_2)$ est $\frac{1}{(n-1)!}$ parce que c'est un domaine fondamental pour l'action de $\mathfrak{S}_{n-1}$ sur le cube unité, et on retrouve la formule que j'ai donnée.

Autre méthode. écrire TL : toutes les dérivées en a s'anulent en a, d'où la formule directe.

12 Une idée à retenir en théorie des nombres

Montrer que pour tous réels $a_0, ..., a_n$ on a

$$\sum_{i,j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geq 0.$$

Solution proposée.

L'idée est de remplacer l'inverse $\frac{1}{n}$ par une intégrale $\int_0^1 x^{n-1} dx$. L'intérêt est double : les opérations algébriques (en particulier la somme) passent mal à l'inverse tandis que les polynômes, ça on connaît, et par ailleurs cette manipulation va permettre de découpler les indices i et j dans $\frac{1}{i+j+1}$ afin de scinder la sommation sur i, j en un produit de deux sommes :

$$\sum_{i,j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} = \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j \int_0^1 x^{i+j} dx = \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n} a_i x^i a_j x^j dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right)^2 dx \geq 0.$$

13 Inégalité de Hardy

Soit (u_n) une suite réelle de carré sommable, i. e. *telle que $\sum_{n\geq 0} u_n^2 < \infty$. Montrer que*

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{u_p u_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{n\geq 0} u_n^2.$$

On pourra utiliser une paramétrisation polaire pour l'intégrale d'une fonction sur $[-1, 1]$.

Solution proposée.

Afin de donner un sens à la somme $\sum_{p,q\geq 0} \frac{u_p u_q}{p+q+1}$, on commence par borner les indices p et q, mettons $\sum_{p,q=0}^{n} \frac{u_p u_q}{p+q+1}$. Ensuite, on procède comme dans l'exercice précédent :

$$\sum_{p,q=0}^{n} \frac{u_p u_q}{p+q+1} = \sum_{p,q=0}^{n} u_p u_q \int_0^1 x^{p+q} dx = \int_0^1 \sum_{p,q=0}^{n} (u_p x^p)(u_q x^q)\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n} u_p x^p \right)^2 dx = \int_0^1 P^2$$

où P désigne le polynôme à coefficients réels $\sum_{i=0}^{n} u_i X^i$. On suit alors l'indication de l'énoncé :

$$\int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i} \int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) d\left(e^{i\theta}\right) = -i \int_1^{-1} f = i \int_{-1}^{1} f.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P^2 &\leq \int_{-1}^1 P^2 = \left|\int_{-1}^1 P^2\right| = \left|\frac{1}{i}\int_0^\pi P^2\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right)\overline{P\left(e^{i\theta}\right)}d\theta \\
\overset{P\text{ réel}}{=} \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right)P\left(\overline{e^{i\theta}}\right)d\theta &= \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right)P\left(e^{-i\theta}\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi P\left(e^{i\theta}\right)P\left(e^{-i\theta}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sum_{p=0}^n u_p e^{ip\theta}\sum_{q=0}^n u_q e^{-iq\theta}d\theta = \frac{1}{2}\sum_{p,q=0}^n u_p u_q \underbrace{\int_{-\pi}^\pi e^{i(p-q)\theta}d\theta}_{=2\pi\delta_p^q} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^n u_p^2 2\pi = \pi\sum_{p=0}^n u_p^2,
\end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers ∞.

Remarquer que les mêmes calculs en remplaçant u_n par $|u_n|$ donnent la sommabilité de la famille $\left(\frac{u_p u_q}{p+q+1}\right)_{p,q\geq 0}$, ce qui permet de regrouper comme on le souhaite et justifie *a posteriori* le passage à la limite.

Autre rédac : connaitre parseval tout se suite et transfo polaire linéaire. Ainsi, on veut $\int_0^1 P^2 \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi P^2$. On invoque alors la parité pour découper en deux autour de 0.

14 Intégrale géométrique d'une fonction

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Étudier la limite $\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a}$ lorsque α tend vers 0.

Solution proposée.

On pense immédiatement aux moyennes d'ordre α définies pour un nombre fini de réels positifs $x_1, ..., x_n$ par

$$\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}}.$$

On sait que ces moyennes, les x_i étant fixés, tendent vers $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ quand $\alpha \longrightarrow 0$. On va combiner ces résultats avec l'approximation d'une intégrale par ses sommes de Riemann pour intuiter notre limite, en intervertissant sans justifier les deux limites ci-après :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a} &= \lim_{\alpha\to 0}\lim_{n\infty}\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha} \overset{?}{=} \lim_{n\infty}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha} \\
&= \lim_{n\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)} = \lim_{n\infty} e^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que $\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a}$ tend bien vers $e^{\int_0^1 \ln f}$ quand $\alpha \longrightarrow 0$.

Essayons de reprendre la preuve de $\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}} \longrightarrow \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$. L'idée était de faire un DL en α :

$$\frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1+\alpha\ln x_i + o(\alpha)}{n} = 1 + \alpha\sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i}{n} + o(\alpha),$$

$$\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}} = e^{\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha\sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i}{n} + o(\alpha)\right)} = e^{\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i}{n} + o(\alpha)\right)} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i}{n} + o(1)} \longrightarrow \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$$

Essayons de calquer cela sur l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^a &= \int_0^1 f(t)^a\,dt \overset{?}{=} \int_0^1 \left[1+\alpha\ln f(t) + o(\alpha)\right]dt = 1 + \alpha\int_0^1 \ln f + o(\alpha), \\
\sqrt[\alpha]{\int_0^1 f^a} &= e^{\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha\int_0^1 \ln f + o(\alpha)\right)} = e^{\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\int_0^1 \ln f + o(\alpha)\right)} = e^{\int_0^1 \ln f + o(1)} \longrightarrow e^{\int_0^1 \ln f}.
\end{aligned}$$

Pour justifier l'égalité $\overset{?}{=}$, revenons aux définitions. Sachant $e^x = 1 + x + xE(x)$ avec $\lim_0 E = 0$, on peut expliciter le (prétendu) $o(\alpha)$ ci-dessus :

$$f(t)^\alpha - 1 + \alpha \ln f(t) = \alpha \ln f(t) \ \ E(\alpha \ln f(t)).$$

Fixons un $\varepsilon > 0$: d'une part, il y a un $\delta > 0$ tel que $|x| < \delta \implies |E(x)| < \varepsilon |x|$, d'autre part $\ln f$ est continue sur $[0,1]$ donc bornée, disons par M, ce qui permet d'écrire pour $|\alpha| < \frac{\delta}{M}$ la majoration $|\alpha \ln f(t)| < \delta$ pour tout t dans $[0,1]$, d'où l'on tire $|\alpha \ln f(t) \ \ E(\alpha \ln f(t))| < \alpha M \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$. On a bien montré que $f(t)^a - 1 - \alpha \ln f(t)^a$ était un $o(\alpha)$ uniformément en $t \in [0,1]$.

Si l'on connaît les théorèmes de dérivation sous le signe intégral, on peut donner une solution immédiate. Posons $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha$. Tout est continu sous le signe $\int$, et on peut dériver en α : $F'(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha \ln f$. On en déduit (par Taylor)

$$\sqrt[a]{F(\alpha)} = e^{\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}} = e^{\frac{\ln(1+\alpha F'(0)+o(\alpha))}{\alpha}} = e^{F'(0)+o(1)} \overset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} e^{F'(0)} = e^{\int_0^1 \ln f}.$$

15 Lemme de lebesgue revisited

Soit $T > 0$ un réel, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et φ une fonction réelle T-péridique continue par morceaux (sur $\mathbb{R}$). Déterminer la limite

$$\lim_{n\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,dt.$$

Solution proposée.

Observons avant toute chose que, φ étant continue par morceaux sur $[0,T]$, elle y admet un majorant M, qui est aussi un majorant sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

Par ailleurs, quitte à écrire pour un réel C arbitraire

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(nt) = \int_a^b f(t)\,[\varphi - C](nt) + C \int_a^b f,$$

on voit qu'il suffit de trouver la limite pour les fonctions φ de (valeur) moyenne $\langle \varphi \rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \varphi$ nulle (prendre $C = \langle \varphi \rangle$).

On va intuiter cette limite. Quand n est grand, la période de $\varphi(n\cdot)$ tend vers 0, de sorte que par continuité la fonction f est (sur une période $\frac{T}{n}$) quasi-constante. Découpant $[a,b]$ en intervalles $\left[x_i, x_i + \frac{T}{n}\right]$ de longueur $\frac{T}{n}$, Chasles permet d'écrire pour n grand

$$\begin{aligned} \int \varphi(n\cdot)\, f &= \sum \int_{x_i}^{x_i+\frac{T}{n}} \varphi(n\cdot)\, f \overset{f \simeq \text{constante}}{\simeq} \sum f(x_i) \int_{x_i}^{x_i+\frac{T}{n}} \varphi(n\cdot) \\ &= \sum f(x_i) \frac{1}{n} \int_{nx_i}^{nx_i+T} \varphi = \langle \varphi \rangle \sum \frac{T}{n} f(x_i) \overset{\text{Riemann}}{\simeq} \langle \varphi \rangle \int f. \end{aligned}$$

La limite demandée est donc probablement nulle[4] lorsque $\langle \varphi \rangle = 0$ (et donc vaut $\langle \varphi \rangle \int f$ dans le cas général).

Faisons une remarque importante : si pour tout $\varepsilon > 0$ on montre le résultat pour une fonction f_ε telle que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$, alors la différence entre ce qui se passe pour f et ce qui se passe pour f_ε s'évaluera aisément

$$\left| \int_a^b \varphi(n\cdot)\, f - \int_a^b \varphi(n\cdot)\, f_\varepsilon \right| \leq \int_a^b |\varphi(n\cdot)|\, |f - f_\varepsilon| \leq \int_a^b M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

[4] Lorsque $\varphi : t \mapsto e^{it}$, on retrouve le lemme de Lebesgue.

ce qui permettra de conclure

$$\left|\int_a^b \varphi(n\cdot) f\right| \leq \underbrace{\left|\int_a^b \varphi(n\cdot) f - \int_a^b \varphi(n\cdot) f_\varepsilon\right|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\left|\int_a^b \varphi(n\cdot) f_\varepsilon\right|}_{\longrightarrow 0} \leq 2\varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On dit que l'on raisonne *par densité* : le résultat se propage à toute fonction qui est limite uniforme de fonctions satisfaisant le résultat. Il suffit donc de le montrer pour une classe de fonctions dont l'adhérence (uniforme) est l'ensembles des applications continues par morceaux sur $[a, b]$. Mieux : une fonction f étant fixée, le même raisonnement par densité s'applique à φ (puisque f est bornée).

Nous connaissons (au moins) deux candidats de fonctions approchant uniformément les fonctions continues par morceaux sur un (même) segment : les fonctions en escalier[5] et les polynômes[6], le cas des fonctions périodiques continues par morceaux s'en déduisant sans peine.

1. Pour montrer le résultat sur les fonctions en escalier, il suffit (par linéarité) de le montrer pour les fonctions caractéristiques de segments.

   Regardons le cas $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$ où $a \leq \alpha < \beta \leq b$:

   $$\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi(n\cdot) = \frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{n\beta}\varphi.$$

   Pour conclure (à une limite nulle), il suffit de montrer que $\int_{n\alpha}^{n\beta}\varphi$ est bornée. Or, φ étant de moyenne nulle, son intégrale sur tout intervalle de longueur T est nulle. On en déduit $\int_{n\alpha}^{n\beta}\varphi = \int_{n\alpha+kT}^{n\beta}\varphi$ pour tout entier k. En le choisissant pour intégrer sur un intervalle de longueur $\leq T$, mettons $kT \leq n(\beta-\alpha) < (k+1)T$, ce qui est possible car équivalent à $k = \left\lfloor n\frac{\beta-\alpha}{T}\right\rfloor$, l'intégrale $\int_{n\alpha+kT}^{n\beta}\varphi$ est alors bornée par le maximum M de φ multiplié par la largeur $\beta-\alpha$ maximale de l'intervalle d'intégration, *CQFD*.

2. Pour montrer le résultat pour les polynômes, il suffit (toujours par linéarité) de le montrer sur les monômes.

   Regardons le cas $f : x \mapsto x^d$ pour $d \geq 0$. Les monômes se prêtent particulièrement bien à une intégration par partie. Puisque la moyenne de φ est nulle, ses primitives seront également T-périodiques. En notant Φ une telle primitive, on obtient

   $$\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,dt = \int_a^b t^d\varphi(nt)\,dt \overset{IPP}{=} \frac{1}{n}\left(\left[t^d\Phi(nt)\right]_a^b - d\int_a^b t^{d-1}\Phi(nt)\,dt\right).$$

   La primitive Φ étant bornée (car continue et périodique), la parenthèse est bornée lorsque n varie, donc tend vers 0 une fois divisée par n.

16 Une inégalité

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles C^1 sur un segment $[a, b]$. Montrer que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \forall f \in E,\ \forall x \in [a,b],\ \left|f(x)^2 - f(a)^2\right| \leq C\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2.$$

Démonstration.

L'énoncé peut faire peur, mais il s'agit juste de montrer une inégalité avec des carrés. Partons du membre de droite en complétant les carrés, ceci pour faire apparaitre un carré que l'on sait majorer (par 0) et du ff' que l'on sait intégrer. Pour $\varepsilon, C > 0$, on a

$$C\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2 = \int_a^b\left(\sqrt{C}f - \sqrt{\varepsilon}f'\right)^2 + \sqrt{C\varepsilon}\int_a^b 2ff' \geq \sqrt{C\varepsilon}\left(f(b)^2 - f(a)^2\right).$$

[5] c'est ce qui permet d'intégrer des fonctions continues
[6] c'est un théorème de Weierstrass

On obtient presque ce que l'on veut ; affinons un peu notre démarche. Vu le terme $\sqrt{C\varepsilon}$, il est raisonnable de prendre $C = \frac{1}{\varepsilon}$. De plus, il nous faudra découper l'intrégrale sur $[a, x]$ et $[x, b]$ si l'on souhaite faire apparaître un $f(x)^2$. Enfin, on remarque que le choix du signe de ce qui complète le carré est arbitraire. Ces remarques étant faites, en prenant α et β des signes à choisir, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} C\int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2 &= \int_a^x \left(\sqrt{C}f - \alpha\sqrt{\varepsilon}f'\right)^2 + \alpha\int_a^x 2ff' + \int_x^b \left(\sqrt{C}f - \beta\sqrt{\varepsilon}f'\right)^2 + \beta\int_a^x 2ff' \\ &\geq \alpha\left(f(x)^2 - f(a)^2\right) + \beta\left(f(b)^2 - f(x)^2\right). \end{aligned}$$

On choisit alors α du signe de $f(x)^2 - f(a)^2$, et β de signe contraire à $f(b)^2 - f(x)^2$. La majoration voulue en découle.

L'exercice suivant apparaît déjà dans la convexité, mais il est tellement formateur...

17 Un joli problème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable et $n \geq 1$ un entier. Montrer que

$$0 \leq \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \leq \frac{f'(n) - f'(0)}{8}.$$

Solution proposée.

Avant tout chose, essayons de comprendre les termes de l'énoncé. Celui du milieu n'est pas joli, il y a des effets de bords dûs aux $\frac{1}{2}$. On le réécrit de manière plus homogène en répartissant le $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ chez tout le monde :

$$\begin{aligned} & \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} \\ = & \frac{f(0)}{2} + \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n-1)}{2}\right) + \frac{f(n)}{2} \\ = & \left(\frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n)}{2}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant qu'on est parti, écrivons tout sous forme d'un signe somme :

$$\begin{aligned} & 0 \overset{?}{\leq} \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \overset{?}{\leq} \frac{f'(n) - f'(0)}{8} \\ \iff & 0 \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f(i-1) + f(i)}{2} - \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i f \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8} \\ \iff & 0 \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(i-1) + f(i)}{2} - \int_{i-1}^i f\right) \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8}. \end{aligned}$$

Le problème sera donc résolu si l'on montre chacune des égalités

$$0 \overset{?}{\leq} \frac{f(i-1) + f(i)}{2} - \int_{i-1}^i f \overset{?}{\leq} \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8},$$

ce qui revient à faire $n = 1$. Remarquer qu'en fait le problème est *équivalent* au cas $n = 1$, puisque l'énoncé doit être vrai pour $n = 1$.

Ceci étant dit, passons aux interprétations géométriques. Posons A et B les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$, C le point d'intersection des tangentes en 0 et 1.

Le terme du milieu représente l'aire de la lunulle comprise entre la corde $[AB]$ et le graphe de f, qui est ≥ 0 par hypothèse de convexité, d'où l'inégalité de gauche.

Pour comprendre le $\frac{1}{8}$ à droite, on ne sait pas vraiment comment faire...

Cherchons alors à simplifier notre problème. Si l'énoncé est vrai (et il l'est...), il doit être valable pour une fonction convexe ayant mêmes dérivées que f en 0 et en 1 et qui colle les tangentes en 0 et 1 aussi près que l'on veut. En d'autres termes, il nous *faut* montrer que l'aire du triangle ABC est majorée par $\frac{f'(1)-f'(0)}{8}$ (et cela sera suffisant). À ce stade, le problème ne met plus en jeu que deux paramètres, les pentes $f'(0)$ et $f'(1)$, et un collégien pourrait terminer l'exercice en calculant des équations de droites et des aires de triangles.

Toutefois, nous sommes plus aguerris que les collégiens, et las de moults calculs longs et pénibles, nous allons grandement simplifier cette dernière étape. Remarquons en effet que l'inégalité à montrer

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}-\int_0^1 f \overset{?}{\leq} \frac{f'(1)-f'(0)}{8}$$

est invariante par translation $f \mapsto f+\lambda$, par ajout de pente $f \mapsto f+\mu \operatorname{Id}$, et par dilatation $f \mapsto \nu f$. On peut donc imposer $f(0)=0$ par translation, $f'(0)=0$ par ajout de pente, et $f(1)=1$ par dilation (si $f(1)=0$, $f \equiv 0$ et l'inégalité est triviale). Il est maintenant aisé de mener les calculs, après ces *trois* simplifications effectuées.

Notons $\alpha = f'(1)$ l'unique paramètre restant. Le point C se situe sur l'axe des abscisses ; pour trouver sa position, on écrit

$$y_B - y_C = \alpha (x_B - x_C) \implies 1 = \alpha(1-x_c) \implies x_C = 1-\frac{1}{\alpha}.$$

Noter bien que $\alpha \geq 1$ car la pente de la tangente en B doit dépasser celle de la corde AB. On veut donc

$$\mathcal{A}(ABC) \overset{?}{\leq} \frac{f'(1)-f'(0)}{8} \iff \frac{1}{2}x_C \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{8} \iff 1-\frac{1}{\alpha} \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{4} \iff \alpha^2-4\alpha+4 \overset{?}{\geq} 0 \iff (\alpha-2)^2 \overset{?}{\geq} 0,$$

ce qui est clair (on a même le cas d'égalité $\alpha = 2$).

Remarque. Il apparaît sur ce problème que les nombreuses simplifications ($n=1$, choix de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$) nous ont grandement simplifié les calculs.

Remarque. Le lecteur connaiseur des nombres de Bernoulli pourra utiliser l'identité suivante (due à Euler et Mac Laurin) pour f de classe C^n sur R et pour $a<b$ dans $\mathbb{Z}$ qui estime l'erreur des trapèzes :

$$\frac{f(a)}{2}+f(a+1)+\cdots+f(b-1)+\frac{f(b)}{2}-\int_a^b f = \sum_2^n (-1)^k \frac{B_k}{k!}\left[f^{(k-1)}\right]_a^b - (-1)^n \int_a^b \frac{\widetilde{B}_n}{n!} f^{(n)}$$

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli et où $\widetilde{B_n}$ est l'unique fonction 1-périodique coïncidant avec le n-ième polynôme de Bernoulli sur $]0,1[$. Si la fonction de notre problème est C^2, on en déduit (prenant $n=2$)

$$\begin{aligned} \frac{f(0)+f(1)}{2}-\int_0^1 f \quad &= \quad \frac{B_2}{2}\underbrace{(f'(1)-f'(0))}_{=\int_0^1 f''=:\Delta} - \int_0^1 \frac{\widetilde{B_2}}{2} f'' \overset{?}{\leq} \frac{\Delta}{8} \\ &\iff \quad \int_0^1 \widetilde{B_2} f'' \overset{?}{\geq} \left(B_2-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 f''. \end{aligned}$$

Or $B_2 = X^2-X+\frac{1}{6}$ est minimum sur $]0,1[$ en $\frac{1}{2}$ et y vaut $\frac{1}{12}=B_2-\frac{1}{4}$, CQFD. (et $f'' \geq 0$ car f convexe ! !

18 Une introduction des MAG

On poase $M(a,b) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a\sin^2 + b\cos^2\right)\frac{2}{\pi}$ pour $a,b>0$.

Montrer que $M(a,b) = \frac{1}{2}M\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, ab\right)$, puis que $M(a,b)$ est la MAG de a et de b.

19 Un calcul

Détremriner de $\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+x^2}}$ *pour a réel.*

impari –> OPS $a>0$ (intégrale nulle pour $a=0$).

Des carrés x^2, du $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$ au numérateur, on doit au moins essayer le CDV $x^2=c$, donnant $2xdx = dc$ et l'intégrale (poser $a^2=\kappa$) $\int_0^\kappa \frac{dc/2}{\sqrt{\kappa-c}\sqrt{1+c}}$. Le trinome au dénom se met sous forme canonique

$$\begin{aligned}(\kappa-c)(1+c) &= \kappa+(\kappa-1)c-c^2 = \kappa+\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)^2-\left(c-\frac{\kappa-1}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2-\left(c-\frac{\kappa-1}{2}\right)^2 = \lambda^2-(c-\mu)^2\end{aligned}$$

avec $(\lambda,\mu)=\frac{\kappa\pm1}{2}$, d'où avec les CDV $c\longleftarrow c-\mu$ puis $c\longleftarrow \lambda c$ le résultat à l'aide d'un arcsin

$$\int_0^\kappa \frac{dc/2}{\sqrt{\kappa-c}\sqrt{1+c}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1-\kappa}{2}}^{\frac{1+\kappa}{2}} \frac{dc}{\sqrt{\lambda^2-c^2}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}^{1} \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

Rusons : mettons un $-$ pour avoir du acs qui va s'anuler en 1, puis afin de calculer acs $\frac{1-\kappa}{1+\kappa}$ rappelons nous la formule $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t=\tan\frac{\theta}{2}$, ce qui donne

$$\operatorname{acs}\frac{1-\kappa}{1+\kappa} = \operatorname{acs}\frac{1-a^2}{1+a^2} \underset{|\alpha|<\frac{\pi}{2}}{\overset{a=\tan\frac{\alpha}{2}}{=}} \operatorname{acs}\cos\alpha = \alpha.$$

FInqlemnt, l'intégrale vaut $\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} \frac{-dc}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{acs}\frac{1-\kappa}{1+\kappa} = \operatorname{atn} a$

20 Un équivalent

$\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,dx = \int_1^2 \ln^n$.

ln croit de 0 à $\ln 2$, donc ce qui pilote est le $\ln 2$.

On commence pour faire sauter le log pour y voir plus clair $l=\ln(1+x)$, on a $dl=\frac{dx}{1+x}$, ie $dx = e^l dl$, donc l'intégrale vaut $\int_0^{\ln 2} l^n e^l dl$. Intuitivement, c'est le l^n qui pilote au voisinage de $\ln 2$. On zoome donc sur $\ln 2$: poser $l = u\ln 2$ donne $(\ln 2)^{n+1}\int_0^1 u^n 2^u du$ et un exo précdéent livre $\int_0^1 u^n 2^u du \sim \frac{2^1}{n}$, d'où l'équivalent

$$\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,dx \sim 2\frac{(\ln 2)^{n+1}}{n}$$

21 Une intégrale

Calculer pour $a\neq 1$ *l'intégrale* $\int_0^\pi \ln\left(1-2a\cos\theta+a^2\right)\frac{d\theta}{2\pi}$ *en introduisant* $\prod_{k=1}^n\left(1-2a\cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right)+a^2\right)$.

$\frac{1}{n}$ ln(produit) tend par riemann vers ce que l'on veut. Or, le produit se simplifie en $\prod_{k=1}^n\left(a-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\left(a-e^{-2\pi i\frac{k}{n}}\right) = |a^n-1|$, donc $\frac{\ln|a^n-1|}{n}\longrightarrow 0$ ou $\ln a$ (selon position de $a><1$)

22 Inégalité de van der Corput

(cf JD pages 87-8) Peut-on majorer $\int_a^b e^{i\varphi}$ pour φ fonction dite *phase* ?
On suppose φ deux fois dérivable et on note $m := \min \varphi''$, supposé > 0, et $\mu := \sqrt{m}$.

1. *Donner une majoration grossière et décrire un cas d'égalité. Détailler le cas où φ est affine.*
2. *Supposons $\varphi' \geq 0$. À l'aide du lemme $t \geq a + \varepsilon \implies \varphi'(t) \geq \varepsilon m$ à établir pour tout $\varepsilon > 0$, montrer la majoration $\left|\int_a^b e^{i\varphi}\right| \leq \sqrt{\frac{3}{m}}$. Que se passe-t-il lorsque $\varphi' \leq 0$?*
3. *Montrer l'inégalité*
$$\left|\int_a^b e^{i\varphi}\right| \leq \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\min \varphi''}}.$$
4. Lien avec intégrale de Fresnel ? ? ?

Solution proposée.

1. L'inégalité triangulaire donne un majorant grossier $b - a$, atteinte lorsque φ cst. Lorsque φ affine, disons $\varphi' = \lambda$, on obtient (à $e^{i\varphi(0)}$ près)
$$\begin{aligned}\int_a^b e^{i\varphi} &= \int_a^b e^{i\lambda t} dt = \frac{e^{i\lambda a} - e^{i\lambda b}}{i\lambda} = e^{i\lambda \frac{b-a}{2}} \frac{e^{i\lambda \frac{a-b}{2}} - e^{i\lambda \frac{b-a}{2}}}{i\lambda}, \text{ d'où} \\ \left|\int_a^b e^{i\varphi}\right| &= \left|\frac{2\sin\left(\lambda \frac{b-a}{2}\right)}{\lambda}\right| \leq b - a.\end{aligned}$$

2. Les hypothèses permettent d'écrire
$$\varphi'(t) \overset{\varphi' \geq 0}{\geq} \varphi'(t) - \varphi'(a) = \int_a^t \varphi'' \geq \int_a^t m = m(t-a) \overset{m \geq 0}{\geq} m\varepsilon.$$
On a $\int_{a+\varepsilon}^b e^{i\varphi} = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{i\varphi'} i\varphi' e^{i\varphi} \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{e^{i\varphi}}{i\varphi'}\right]_{a+\varepsilon}^b + \frac{1}{i}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{\varphi''}{\varphi'^2} e^{i\varphi}$. Or, le premier terme est $\leq 2\left|\frac{e^{i\varphi}}{i\varphi'}\right| \leq 2\frac{1}{m\varepsilon}$ et le second est $\leq \int_{a+\varepsilon}^b \frac{\varphi''}{\varphi'^2} = \left[\frac{1}{\varphi'}\right]_{a+\varepsilon}^b \leq \frac{1}{\varphi'(b)} \leq \frac{1}{m\varepsilon}$. Enfin, l'intégrale entre a et $a + \varepsilon$ est majorée par ε. Par somme et CHasles, l'intégrale est $\leq \frac{3}{m\varepsilon} + \varepsilon$ qui est minimale pour $\frac{3}{m\varepsilon} = \varepsilon$, soit $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{m}}$, et vaut la moyenne géométrique $2\sqrt{\frac{3}{m}}$. Bien sûr, cela n'est pas possible si $b - a < \sqrt{\frac{3}{m}}$, mais alors la majoration de la quetion précdent s'pplique et trivialise le pb.
Lorsque $\varphi' \leq 0$, on applique ce qui précède à $\psi := \varphi(-\mathrm{Id})$ définie sur $[-b, -a]$, laquelle vérifie $\psi' = -\varphi'(-\mathrm{Id}) \geq 0$ et $\psi'' = \varphi''(-\mathrm{Id}) \geq m > 0$:
$$\left|\int_a^b e^{i\varphi}\right| = \left|\int_{-b}^{-a} e^{i\psi}\right| \leq 2\sqrt{\frac{3}{m}}.$$

3. Lorsque φ' garde le même signe, on applique ce qui prècède. Sinon, puisque $m > 0$, φ' croît et donc change de signe en un point exactement dans $[a, b]$. En découpant l'intégrale en deux selon ce point, on peut majorer par deux fois $2\sqrt{\frac{3}{m}}$, soit $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{m}}$.

23 Fonctions pic

Soit α une application réglée positive sur un segment S admettant un unique maximum $A > 0$ en un point $a \in S$ où α est continue.

1. *Montrer que $\frac{\alpha^n}{\int_S \alpha_n}$ converge uniformément vers 0 en dehors de tout voisinage de a. Interpréter.*

2. *En déduire, pour f continue en a réglée, un équivalent de $\int_S f\alpha^n$.*

Solution proposée.
On notera L la longueur du segment S.

1. *Interprétation.* Supposons un instant que $A = 1$. Le graphe de α^n va alors s'écraser vers 0 sauf en a, ce qui forme un pic autour de a. Dans le cas général, considérer $\frac{\alpha^n}{\int \alpha_n}$ revient à maintenir une aire constante (1) en dessous de ce pic, lequel va s'envoler vers l'infini, emportant ainsi sous lui la quasi-totalité de l'aire, ne laissant pratiquement rien en dehors, ce qu'exprime le résultat attendu.

   Formalisons. Soit V un voisinage de a. Par unicité du maximum de α, sur $S \setminus V$ cette dernière est majorée par un $M < A$, mettons $M = A - 2\varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$), d'où la majoration $\alpha^n \leq (A - 2\varepsilon)^n$. Par continuité de α en a, il y a un voisinage W dans lequel $\alpha > A - \varepsilon$, d'où $\int_S \alpha^n \geq \int_W \alpha^n \geq l(S)(A-\varepsilon)^n$. On en déduit
   $$\frac{\alpha^n}{\int_S \alpha^n} \leq \frac{1}{L}\left(\frac{A-2\varepsilon}{A-\varepsilon}\right)^n \longrightarrow 0, \textit{ CQFD.}$$

2. Même idée : toute la masse de l'intégrale va se concentrer autour de a, d'où l'intuition de remplacer f par $f(a)$ dans l'intégrande :
   $$\int f\alpha^n \overset{?}{\sim} f(a)\int \alpha^n.$$

   En notant $g := f - f(a)$, le résultat se réécrit $\int g\alpha^n \overset{?}{=} o\left(\int \alpha^n\right)$. On procède alors comme ci-dessus.

   Soit $\varepsilon > 0$. Sur un voisinage V de a, on aura par continuité $|g| < \varepsilon$, d'où $\left|\int_V g\alpha^n\right| \leq \varepsilon \int_V \alpha^n \leq \varepsilon \int_S \alpha^n$. Par ailleurs, en dehors de ce voisinage, on a $\alpha^n \leq \varepsilon \int_S \alpha^n$ pour n assez grand *cf.* première question), d'où
   $$\left|\int_{S\setminus V} g\alpha^n\right| \leq \varepsilon L \max|g| \int_S \alpha^n.$$

   Additionnant les deux, il vient pour n assez grand
   $$\left|\int_S g\alpha^n\right| \leq \varepsilon\left(1 + L\max|g|\right)\int_S \alpha^n,$$

   d'où le résultat en divisant rétrospectivement ε par ce qu'il faut.

Lien vers méthode Laplace ? chamreloir tome 1 exo 9.8

24 Une intégrale sur le cube de Hilbert

pour f continue sur $[0,1]$, trouver la limite de $\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n$ quand n est grand.

Sol : par Stone, les $e^{a_i \cdot}$ sont denses. Or, pour $f = e^{a\cdot}$, l'intégrale vaut $\left(\int_{[0,1]} e^{\frac{a\cdot}{n}}\right)^n$ qui se DLifie en $e^{\frac{a}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)}$. Réponse : $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Interpréation proba ?

soit $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ et on suppose $\int_0^a f(x)\, e^{nx} dx$ bnée en n. Mq f nulle.

On approche f par affine pm. Seul le dernier segment compte pour l'approximtion vues les croissances comparée. Donc l'approxiatoin est aussi petite que voulue..

(1) on prouve que pour toute fonction integrable sur $[0,a]$, on a $\lim_{x\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^a e^{kx(a-t)} f(t)\, dt = \int_0^a f$
(2) prend g(t)=f(a-t) et majore I(x)=\int_0^x g(t) dt a l'aide de la premiere partie.
on trouve I(x)=0 pour tout x... donc g=0