Intégrales généraliséees

Marc SAGE

2 juillet 2006

Table des matières

1 Intégrale de Gauss

Caluler $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ *en élevant au carré.*

Solution proposée.
L'intégrande étant paire, on peut intégrer sur $\mathbb{R}^+$ (où l'intégrale est clairement définie). Calculons le carré comme demandé :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2} dy\right) = \int\int_{x,y\geq 0} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$

(tout est positif, donc Fubini s'applique). Le terme $x^2 + y^2 = r^2$ nous incite à passer en polaires :

$$\int\int_{x,y\geq 0} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} re^{-r^2} drd\theta = 2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi.$$

On en déduit le résultat :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

2 Intégrale de Fresnel

Calculer $\int_0^{\to\infty} e^{ix^2} dx$.

Solution proposée.
On procède comme dans l'exercice précédent, en prenant le carré de l'intégrale sur $[0, A]$ (on prendra A très grand) :

$$\left(\int_0^A e^{ix^2} dx\right)^2 = \int_{[0,A]^2} e^{i\left(x^2+y^2\right)} dxdy =$$

3 Intégrale de Dirichlet

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\circ\sin$.

Solution proposée.
I est bien définie car $\ln\circ\sin$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on dispose d'un équivalent ln en 0 qui est intégrable (tout est de même signe – négatif).

Pour calculer I, on va utiliser les propriétés multiplicatives de ln. Pour cela, il faut faire apparaître un produit avec le sinus. On pense naturellement à la formule de duplication :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \pi\frac{\ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\circ\sin + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\circ\cos. \end{aligned}$$

On reconnaît I dans la première intégrale, sauf que la borne supérieure $\frac{\pi}{4}$ n'est pas égale à $\frac{\pi}{2}$... On souhaite doubler la borne supérieure ? On n'a qu'à le faire dès le début :

$$\int_0^{\pi} \ln\circ\sin = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\circ\sin$$

par symétrie de sin par rapport à $\frac{\pi}{2}$ sur $[0,\pi]$ (plus formellement, découper $[0,\pi]$ en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ puis faire le changement de variables $x \longmapsto \pi - x$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$). Par ailleurs, la seconde intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\circ\cos$ vaut également I car cos se comporte comme sin sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (faire $x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$).

De toutes les remarques précédentes résulte l'égalité

$$2I = \int_0^{\pi} \ln\circ\sin = \pi\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\circ\sin + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\circ\cos = \pi\ln 2 + 4I,$$

d'où on tire la valeur recherchée :

$$I = -\pi\frac{\ln 2}{2}.$$

4 Intégrale de Raabe

Soit $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^x}{e^t}\frac{dt}{t}$ *la fonction d'Euler définie pour tout* $x > 0$*. On rappelle que*

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin\pi x} \end{aligned}$$

pour les valeurs de x *où les quantités sont définies. Montrer que*

$$\int_x^{x+1} \ln\circ\Gamma = x\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

Solution proposée.

On reconnaît en $x\ln x - x$ une primitive de $\ln x$. En dérivant pour $x > 0$, on obtient

$$\partial_x\left(\int_x^{x+1} \ln\circ\Gamma\right) = \ln\Gamma(x+1) - \ln\Gamma(x) = \ln x,$$

ce qui montre que $\int_x^{x+1} \ln\circ\Gamma - (x\ln x - x)$ est une constante. Pour la calculer, on regarde sa limite $\int_{\to 0}^{1} \ln\circ\Gamma$ quand $x \longrightarrow 0$, et on utilise la formule des compléments ainsi que le calcul de l' intrégale de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \int_{\to 0}^{1} \ln\Gamma(x)\,dx &= \int_{\to 0}^{1} \ln\Gamma(1-x)\,dx = \frac{\int_{\to 0}^{1}\ln\Gamma(x)\,dx + \int_{\to 0}^{1}\ln\Gamma(1-x)\,dx}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\to 0}^{1} \ln\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)dx = \frac{\ln\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{\to 0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\circ\sin \\ &= \frac{\ln\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\left(-\pi\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\ln 2\pi}{2}, \qquad \textit{CQFD.} \end{aligned}$$

5 Intégrale de Poisson

Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}$ *pour* $|r| < 1$*.*

Solution proposée.

On a un trinôme en r au dénominateur de racines $e^{\pm i\theta}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(r - e^{-i\theta})(r - e^{i\theta})} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})}.$$

On développe alors $\frac{1}{1-*}$ en série entière et on intervertit $\sum$ et $\int$:

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{p\geq 0} \left(re^{i\theta}\right)^p \sum_{q\geq 0} \left(re^{-i\theta}\right)^q d\theta \overset{?}{=} \sum_{p,q\geq 0} r^{p+q} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{(p-q)i\theta}d\theta}_{=\delta_p^q 2\pi} = 2\pi\sum_{p\geq 0} r^{2p} = \frac{2\pi}{1-r^2}.$$

Il reste à justifier l'interversion : en prenant les modules, on tombe sur

$$\sum_{p,q\geq 0} |r|^{p+q} 2\pi = \frac{1}{1-|r|}\frac{1}{1-|r|}2\pi$$

qui est évidement fini, d'où la sommabilité voulue.

Remarque. La fonction $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1}$ est appelée *noyau de Poisson* ; on vient de montrer que son intégrale le long du cercle (mesuré par $\frac{dx}{2\pi}$) faisait 1. En traçant le graphe de P_r, on voit que les P_r "tendent" vers le Dirac en 0 quand $r \longrightarrow 1$, et l'on peut montrer que si f est une application continue du cercle unité à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors la fonction définie sur le disque unité par $\overline{f}\left(re^{i\theta}\right) = f * P_r(\theta)$ (on convole f par un noyau de Poisson) prolonge continûment f en une fonction harmonique sur le disque unité (*problème de Dirichlet*). Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques assure que ce prolongement est unique.

6 Intégrabilité et carrés

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f^2 et f''^2 soient intégrables. Montrer alors que f'^2 est intégrable et que

$$\int_0^\infty f'^2 \leq \int_0^\infty f^2 + \int_0^\infty f''^2.$$

Solution proposée.
Une intégration par parties donne

$$\int_0^x f'^2 = [ff']_0^x - \int_0^x ff''.$$

L'intégrale $\int_0^x ff''$ converge par Cauchy-Schwarz. Si $\int_0^x f'^2$ divergeait, ff' devrait donc tendre vers ∞, d'où la divergence de $\int_0^\infty ff'$, *i.e.* de f'^2, mais alors $\int_0^\infty f'^2$ ne pourrait converger, *absurde* par hypothèse.

Pour comparer les différentes intégrales de f, f' et f'', on s'appuie sur le développement de $(f+f'+f'')^2$ et on isole la différence $f^2+f''^2-f'^2$ que l'on veut ≥ 0 (après intégration) :

$$\left(f^2+f''^2-f'^2\right) - (f+f'+f'')^2 = -2\left(f'^2+ff'+ff''+f'f''\right) = -2\left(f+f'\right)\left(f'+f''\right).$$

Par intégration, il vient :

$$\int_0^x f^2+f''^2-f'^2 = \int_0^x (f+f'+f'')^2 - \left[(f+f')^2\right]_0^x.$$

Les deux intégrales convergeant, $(f+f')^2$ admet une limite en ∞, mais comme $(f+f')^2$ est intégrable, cette limite doit être nulle. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^x f^2+f''^2-f'^2 &= \int_0^x (f+f'+f'')^2 - \left(f(x)+f'(x)\right)^2 + \left(f(0)+f'(0)\right)^2 \\ &\geq -\left(f(x)+f'(x)\right)^2 \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité recherchée.

7 Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$. Lorqu'elle existe, on définit la *transformée de Laplace* de f par

$$L_f(x) = \int_0^{\to\infty} f(t)\,e^{-tx}dt.$$

Son intérêt principal est qu'il est tentant d'écrire $\int_0^{\to\infty} f = \lim_0 L_f$, fournissant ainsi un moyen de calculer l'intégrale de f connaissant sa transformée de Laplace. Lorsque f est intégrable, cette égalité est évidente par domination de $f(t)\, e^{-tx}$ par $|f(t)|$. Dans le cas contraire, on dispose du théorème suivant :

Théorème taubérien fort.

Supposons que $L_f(x)$ soit défini pour tout $x > 0$ et admette une limite l quand $x \longrightarrow 0$. Sous l'hypothèse $xf(x)$ borné quand x décrit $\mathbb{R}^+$, on a alors $\int_0^{\to\infty} f = l$.

Démonstration.

• *Soit Φ l'ensemble des fonctions $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_0^{\to\infty} f(t)\, \varphi\left(e^{-tx}\right) dt$ existe pour tout $x > 0$ et admette l comme limite quand $x \longrightarrow 0$. Montrer que le problème est résolu si l'on prouve que $\chi := \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$ appartient à Φ.*

On va maintenant raisonner par densité en approchant χ par de gentils polynômes. On fixe un $\varepsilon > 0$.

• *Montrer qu'il y a deux polynômes χ^* et χ_* vérifiant*

$$\left\{\begin{array}{l} \chi_*(0) = \chi^*(0) = 0 \\ \chi_*(1) = \chi^*(1) = 1 \end{array}\right.,$$

$$\chi_* \leq \chi \leq \chi^* \text{ sur } [0,1],$$

$$\int_0^1 \frac{\chi^*(x) - \chi_*(x)}{x(1-x)} < \varepsilon$$

(on pourra chercher à approcher $H(x) := \frac{\chi(x)-x}{x(1-x)}$ par des polynômes).

• *Montrer que les polynômes nuls en 0 sont dans Φ.*

• *Conclure.*

• *Appliquer une transformée de Laplace pour caculer $\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.*

Solution proposée.

• On regarde ce que vaut

$$\int_0^{\to\infty} f(t)\, \chi\left(e^{-tx}\right) dt = \int_0^{\frac{\ln 2}{x}} f(t)\, dt \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{\to\infty} f,$$

et comme cette limite vaut par hypothèse l, on a terminé.

• Un tracé du graphe de H montre que l'on peut approcher H par deux application continues $H_* \leq H \leq H^*$ telles que $\int_0^1 (H^* - H_*) < \varepsilon$. On approxime alors H^* et H_* par des polynômes à ε près (Stone-Weierstrass), disons $\left\{\begin{array}{l} H^* \simeq P^* \\ H_* \simeq P_* \end{array}\right.$, et on rectifie $\left\{\begin{array}{l} Q^* := P^* + \varepsilon \\ Q_* := P_* - \varepsilon \end{array}\right.$ afin de conserver l'inégalité $Q_* \leq H \leq Q^*$. Voilà notre approximation polynomiale de H, qui a le bon goût de vérifier

$$\int_0^1 |Q^* - Q_*| \leq \int_0^1 |Q^* - P^*| + \int_0^1 |P^* - H^*| + \int_0^1 |H^* - H_*| + \int_0^1 |H_* - P_*| + \int_0^1 |P_* - Q_*| < 5\varepsilon.$$

Ensuite, puisque $\chi(x) = x + x(1-x) H(x)$, il est naturel de poser

$$\left\{\begin{array}{l} \chi^* = X + X(1-X) Q^* \\ \chi_* = X + X(1-X) Q_* \end{array}\right.,$$

lesquels vérifient les propriétés souhaitées (quitte à couper notre ε de départ en 5).

• Il suffit de montrer que les monômes X^n sont dans Φ pour $n \geq 1$. Or, cela est immédiat :

$$\int_0^{\to\infty} f(t)\, X^n\left(e^{-tx}\right) dt = \int_0^{\to\infty} f(t)\, e^{-ntx} dt = L_f(nx)$$

qui est défini pour tout $x > 0$ et qui tend vers l quand $x \longrightarrow 0$.

• Il s'agit de finir le raisonnement par densité en montrant l'aspect "continuité". On sait déjà (par le premier point) que $\int_0^{\to\infty} f(t)\, \chi\left(e^{-tx}\right) dt$ converge, seul reste à montrer que sa limite quand $x \longrightarrow 0$ est bien l. On sait par ailleurs que les approximations $\int_0^{\to\infty} f(t)\, \chi^*\left(e^{-tx}\right) dt$ sont gentilles, au sens où $\chi^* \in \Phi$ (cf. troisième point).

On va par conséquent comparer ces deux quantités. C'est là que va intervenir pour la première fois l'hypothèse $|tf(t)| \leq M$. On notera par commodité $\delta := \frac{\chi^* - \chi_*}{\mathrm{Id}(1-\mathrm{Id})}$, le point b) montrant que $\int_0^1 \delta < \varepsilon$:

$$\left| \int_0^{\to\infty} f(t)\, \chi^* \left(e^{-tx}\right) dt - \int_0^{\to\infty} f(t)\, \chi \left(e^{-tx}\right) dt \right| \leq \int_0^{\to\infty} |f(t)| \left[\chi^* - \chi\right] \left(e^{-tx}\right) dt$$

$$\leq \int_0^{\to\infty} |f(t)| \left[\chi^* - \chi_*\right] \left(e^{-tx}\right) dt \leq \int_0^{\to\infty} |f(t)|\, \delta \left(e^{-tx}\right) \left(e^{-tx} \underbrace{\left(1 - e^{-tx}\right)}_{\leq tx} \right) dt$$

$$\leq \int_0^{\to\infty} t\, |f(t)|\, \delta \left(e^{-tx}\right) x e^{-tx} dt \leq M \int_{\to\infty}^0 \delta \left(e^{-tx}\right) d\left(e^{-tx}\right) \overset{u=e^{-tx}}{=} M \int_{\to 0}^1 \delta(u)\, du < M\varepsilon.$$

Pour x assez petit, l'intégrale de gauche est proche de l à ε près, donc celle de droite aussi (quitte à diviser ε par M), ce qui conclut la démonstration.

• La transformée de Laplace de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est clairement définie au voisinage de 0 ($\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité) et au voisinage de ∞ (l'exponentielle écrase tout le monde). Pour calculer L_f, on va la dériver afin de tuer le x au dénominateur.

On remarque pour ce faire que la dérivée de l'intégrande est dominée sur tout $[a, \infty[$ avec $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} \left| \partial_x \left(\frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right) \right| dt = \int_0^{\infty} |\sin t|\, e^{-tx} dt \leq \int_0^{\infty} e^{-at} dt.$$

On peut donc dériver sous le signe intégrale pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x L_f(x) &= -\int_0^{\infty} (\sin t)\, e^{-tx} dt = \frac{1}{2i} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x+i)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right) = -\frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

En intégrant entre $x > 0$ et $A > 0$, on en déduit

$$L_f(A) - L_f(x) = \arctan x - \arctan A.$$

Or, quand $A \longrightarrow \infty$, $L_f(A)$ tend vers 0 :

$$|L_f(A)| \leq \int_0^{\to\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| e^{-At} dt \leq \int_0^{\to\infty} e^{-At} dt = \frac{1}{A}.$$

On obtient ainsi l'expression de la tranformée de Laplace de $\frac{\sin x}{x}$, valable pour tout $x > 0$:

$$L_f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Les hypothèse du théorème sont maintenant réunies : L_f admet clairement une limite en 0 (qui est $\frac{\pi}{2}$) et $xf(x)$ est trivialement borné (par 1). Finalement :

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Il y a un théorème taubérien faible, où l'hypothèse $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ est remplacée par $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, hypothèse évidemment plus forte !

8 Intégrales de Drinfeld et dualité des polyzétas

Soit $k_1, ..., k_n$ des entiers ≥ 1. On définit le *polyzêta*

$$\zeta(k_1, ..., k_n) = \sum_{1 \leq m_1 < ... < m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} ... m_n^{k_n}}$$

qui généralise la fonction $\zeta(k)=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^k}$. On pourra admettre (ou redémontrer) que $\zeta(k_1,...,k_n)$ est fini ssi $k_n\geq 2$.

Soient $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ dans $\{0,1\}$ et $\begin{cases} A_0(t)=t \\ A_1(t)=1-t \end{cases}$. On définit l'*intégrale de Drinfeld*

$$I(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=\int_0^{\to\infty}\frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}...\frac{dt_n}{A_{\varepsilon_n}(t_n)}$$

(qui a toujours un sens car tout le monde est positif). On peut montrer que $I(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ est finie ssi $(\varepsilon_1,\varepsilon_n)=(1,0)$

Notre but est de montrer que

$$I\left(\underbrace{1,0,...,0}_{k_1},\underbrace{1,0,...,0}_{k_2},...,\underbrace{1,0,...,0}_{k_n}\right)=\zeta(k_1,...,k_n),$$

ce qui donnera une représentation des polyzêtas par les intégrales de Drinfeld, puis d'utiliser la relation de dualité

$$I(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=I(1-\varepsilon_n,...,1-\varepsilon_1)$$

pour en déduire pleins d'identités entre les polyzêtas.

- *Montrer en lemme que*
$$\int_0^1(-\ln t)^{k-1}t^{m-1}\frac{dt}{(k-1)!}=\frac{1}{m^k}.$$
- *Montrer que* $I\left(\underbrace{1,0,...,0}_{k}\right)=\zeta(k)$. *En déduire la représentation des polyzêtas par les intégrales de Drinfeld.*
- *Montrer ensuite la relation de dualité annoncée et donner un exemple d'utilisation.*

Solution proposée.

• On fait un changement de variables $u=-\ln t$, afin de se ramener à intégrer une exponentielle contre un polynôme :

$$\int_0^1(-\ln t)^{k-1}t^{m-1}\frac{dt}{(k-1)!}=\int_{-\infty}^0 u^{k-1}e^{-(m-1)u}\frac{-e^{-u}du}{(k-1)!}=\int_0^\infty u^{k-1}e^{-mu}\frac{du}{(k-1)!}.$$

On homogénéise à l'aide du changement de variables $v=mu$, ce qui fait apparaître la fonction Γ :

$$=\int_0^\infty\frac{v^{k-1}}{m^{k-1}}e^{-v}\frac{\frac{dv}{m}}{(k-1)!}=\frac{1}{m^k}\underbrace{\int_0^\infty v^{k-1}e^{-v}dv}_{=\Gamma(k)}\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{m^k}$$

• On va développer le $\frac{1}{1-t}$ en série entière et utiliser la symétrie de ce qui reste :

$$\begin{aligned}
I\left(\underbrace{1,0,...,0}_{k}\right) &= \int_{0<t_1<...<t_k<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}...\frac{dt_k}{t_k} \\
&= \int_{t_1=0}^1\int_{t_1<t_2<...<t_k<1}\sum_{m\geq 0}t_1^m dt_1\frac{dt_2}{t_2}...\frac{dt_k}{t_k} \\
&\overset{t=t_1}{=} \sum_{m\geq 0}\int_{t=0}^1\left[\int_{t<t_2<...<t_k<1}\frac{dt_2}{t_2}...\frac{dt_k}{t_k}\right]t^m dt \\
&= \sum_{m\geq 0}\int_0^1\left[\frac{1}{(k-1)!}\int_{[t,1]\times...\times[t,1]}\frac{dt_2}{t_2}...\frac{dt_k}{t_k}\right]t^m dt
\end{aligned}$$

(on a dit que toutes les intégrales $\int_{t<t_{\sigma(2)}<...<t_{\sigma(k)}<1}\frac{dt_2}{t_2}...\frac{dt_k}{t_k}$ sont identiques pour σ une permutation de $\{2,...,k\}$, elles sont en nombre $(k-1)!$, et leur somme vaut l'intégrale sur la réunion des domaines $t<t_{\sigma(2)}<...<t_{\sigma(k)}<1$ quand σ varie, *i.e.* tous les t_i de $[t,1]$ modulo un ensemble de mesure nulle)

$$= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \left(\int_{[t,1]} \frac{dt_2}{t_2} \right) ... \left(\int_{[t,1]} \frac{dt_k}{t_k} \right) t^m dt$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \ln(-t)^{k-1} t^{m-1} dt$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^k} \text{ par le lemme}$$

$$= \zeta(k).$$

• Pour le cas général, on regarde le cas de seulement trois variables pour alléger, et on mène le même calcul que précédemment modulo quelques homogénéisations :

$$I\left(\underbrace{1,0,...,0}_{a},\underbrace{1,0,...,0}_{b},\underbrace{1,0,...,0}_{c}\right)$$

$$= \int_{\substack{0<x_1<...<x_a \\ <y_1<...<y_b \\ <z_1<...<z_c<1}} \frac{dx_1}{1-x_1}\frac{dx_2}{x_2}...\frac{dx_a}{x_a}\cdot\frac{dy_1}{1-y_1}\frac{dy_2}{y_2}...\frac{dy_b}{y_b}\cdot\frac{dz_1}{1-z_1}\frac{dz_2}{z_2}...\frac{dz_c}{z_c}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 0} \int_{0<x<y<z<1} x^\alpha y^\beta z^\gamma \int_{x<x_2<...<x_a<y} \frac{dx_2}{x_2}...\frac{dx_a}{x_a} \int_{y<y_2<...<y_b<z} \frac{dy_2}{y_2}...\frac{dy_b}{y_b} \int_{z<z_2<...<z_c<1} \frac{dz_2}{z_2}...\frac{dz_c}{z_c}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \int_{0<x<y<z<1} x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\frac{1}{(a-1)!}\left(\ln\frac{y}{x}\right)^{a-1}\frac{1}{(b-1)!}\left(\ln\frac{z}{y}\right)^{b-1}\frac{1}{(c-1)!}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{c-1} dx\, dy\, dz$$

La seule variable qui apparaît une seul fois étant x, on va chercher à intégrer d'abord en x. On va retomber sur les intégrales du lemme, au changement de variables $x = uy$ près :

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \int_{z=0}^1 \left(\int_{y=0}^z \left(\int_{x=0}^y x^{\alpha-1}\frac{1}{(a-1)!}\left(-\ln\frac{x}{y}\right)^a dx \right) y^{\beta-1}\frac{1}{(b-1)!}\left(-\ln\frac{y}{z}\right)^{b-1} dy \right) z^{\gamma-1}\frac{1}{(c-1)!}(-\ln z)^{c-1} dz$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \int_{z=0}^1 \left(\int_{y=0}^z \left(\int_{u=0}^1 u^{\alpha-1}y^{\alpha-1}\frac{1}{(a-1)!}(-\ln u)^{a-1} du\, y \right) y^{\beta-1}\frac{1}{(b-1)!}\left(\ln\frac{z}{y}\right)^{b-1} dy \right) z^{\gamma-1}\frac{1}{(c-1)!}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{c-1} dz.$$

On reconnait l'intégrale du lemme (en u), ce qui fait sortir un $\frac{1}{a^\alpha}$. On continue en intégrant en y, toujours en homogénéisant par $y = vz$, et ainsi de suite :

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \frac{1}{a^\alpha} \int_{z=0}^1 \left(\int_{y=0}^z y^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{(b-1)!}\left(\ln\frac{z}{y}\right)^{b-1} dy \right) z^{\gamma-1}\frac{1}{(c-1)!}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{c-1} dz$$

$$\overset{y=vz}{=} \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \frac{1}{\alpha^a} \int_{z=0}^1 \left(\underbrace{\int_{v=0}^1 v^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{(b-1)!}(-\ln v)^{b-1} dv}_{=\frac{1}{(\alpha+\beta)^b}} \right) z^{a+\beta+\gamma-1}\frac{1}{(c-1)!}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{c-1} dz$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \frac{1}{\alpha^a}\frac{1}{(\alpha+\beta)^b} \int_{z=0}^1 z^{a+\beta+\gamma-1}\frac{1}{(c-1)!}(-\ln z)^{c-1} dz$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma\geq 1} \frac{1}{\alpha^a}\frac{1}{(\alpha+\beta)^b}\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^c}$$

$$= \zeta(a,b,c).$$

• Montrons à présent que I est stable par la transformation proposée, grâce au changement de variable

$u=1-t$ et en remarquant que $A_{1-\varepsilon}(1-t)=A_{\varepsilon}(t)$:

$$\begin{aligned} I(1-\varepsilon_n,...,1-\varepsilon_1) &= \int_{t_n=0}^{1}\int_{t_{n-1}=0}^{t_n}...\int_{t_1=0}^{t_2}\frac{dt_1}{A_{1-\varepsilon_n}(t_1)}...\frac{dt_n}{A_{1-\varepsilon_1}(t_n)} \\ &= \int_{u_n=1}^{0}\int_{u_{n-1}=1}^{u_n}...\int_{u_1=1}^{u_2}\frac{-du_1}{A_{1-\varepsilon_n}(1-u_1)}...\frac{-du_n}{A_{1-\varepsilon_1}(1-u_n)} \\ &= \int_{u_n=0}^{1}\int_{u_{n-1}=u_n}^{1}...\int_{u_1=u_2}^{u_1}\frac{du_1}{A_{\varepsilon_n}(u_1)}...\frac{du_n}{A_{\varepsilon_1}(u_n)} \\ &= \int_{0<u_n<...<u_1<1}.\frac{du_n}{A_{\varepsilon_1}(u_n)}...\frac{du_1}{A_{\varepsilon_n}(u_1)} \\ &= I(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n). \end{aligned}$$

On en déduit par exemple que

$$\zeta(2,4,1,3)=I\left(\underline{1,0},\underline{1,0,0,0},\underline{1},\underline{1,0,0}\right)=I\left(\underline{1},\underline{1,0,0},\underline{1},\underline{1},\underline{1,0},\underline{1,0}\right)=\zeta(1,3,1,1,2,2),$$

ce qui illustre la *dualité des polyzêtas*.