Divers

Marc SAGE

Table des matières

Soit $E := l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que toute famille orthogonale de E est incluse dans $l^2(\mathbb{R})$ sauf un nombre au plus dénombrable.*
2. *(bonus) Montrer que* $\dim l^2(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.

Soit (a_α) une base linéaire de $l^2(\mathbb{N})$ et (b_α) une b. on. de $l^2(\mathbb{R})$.
On pose $F := \mathrm{Vect}_{\alpha\in R}\{a_\alpha + b_\alpha\}$

3. *Montrer que F est en somme directe avec $l^2(\mathbb{R})$*
4. *Montrer que F n'est pas séparable*
5. *Montrer que F n'est pas de base hilbertienne*

Solution proposée.

1. Soit (e_i) une famille orthogonale de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Parseval nous dit que $\sum \langle e_i \mid \delta_n\rangle^2 \leq \|\delta_n\|^2 = 1$, donc les $\langle e_i \mid \delta_n\rangle$ sont sommables, donc à support I_n fini, donc $e_i \perp l^2(N)$ pour $i \notin \bigcup_{n\geq 0} I_n$.
2. La famille des $(a^n)_{n\geq 0}$ lorsque a décrit $]0,1[$ est $\mathbb{R}$-libre, d'où $\dim l^2(\mathbb{N}) \geq 2^{\aleph_0}$.
   Par ailleurs, on a l'inégalité dans l'autre sens
$$\dim l^2(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card} l^2(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0}.$$
3. Supposons $\sum \lambda_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) = \sum \mu_\alpha b_\alpha$. Séparant $l^2(\mathbb{R})$ de $l^2(\mathbb{N})$, il vient $\sum \lambda_\alpha a_\alpha = 0$, d'où $(\lambda_\alpha) = 0$.
4. Supposon F séparable. Alors $F + l^2(\mathbb{N})$ aussi, donc son adhérence aussi. Or, $\overline{F + l^2(\mathbb{N})}$ contient $l^2(\mathbb{R})$ car
$$\sum_{n\in N} \lambda_n b_{\alpha_n} = \lim_{N\infty}\left[\sum_0^N \lambda_n (a_{\alpha_n} + b_{\alpha_n}) - \sum_0^N \lambda_n b_n\right].$$
   Donc $l^2(\mathbb{R})$ est séparable : soit (c_n) une suite dense. La réunion D des supports des c_n est au plus dénombrable. De plus, $c_n(\alpha) = 0$ car $\overline{\{c_n\}}$ ne peut atteindre que les suites de $l^2(R)$ à support $\subset D$: contradiction.
5. Soit (e_i) une base hilbertienne de F. Les points 1 et 3 montrent que (e_i) est dénombrable, de sorte que F est séparable, contredisant le point précédent.

1 Théorème de Grothendieck

Soit E un sev fermé de $L^p \cap L^\infty$ sur un espace de proba avec $p > 1$. On veut montrer que E est de dimension finie.

1. *Montrer que l'injection canonique $\iota : E \subset L^p \longrightarrow L^\infty$ est continue.*
2. *Montrer que*
$$\exists\beta,\ \forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leq \beta \|f\|_2.$$
   (on pourra distinguer les cas $p \leq 2$ et $p > 2$)

On fixe à présent $f_1, ..., f_n$ une famille orthogonale dans $E \subset L^2$ dont on souhaite borner le cardinal. Pour $a \in B$ boule unité de $\mathbb{C}^n$, on pose
$$f_a := \sum a_i f_i.$$

On considère B' une partie dénombrable dense de B.

3. *Montrer $\|f_a\|_\infty \leq \beta$ pour tout $a \in B$.*

4. *Conclure par un bon choix de a.*

Solution proposée.

1. Soit $\iota : E \subset L^p \longrightarrow L^\infty$ l'injection canonique. Montrons que ι est continue par le théorème du graphe fermé. Soit f_n dans E qui converge vers f dans L^∞. Puisque $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\infty$ (on est dans un espace de proba), on bien $f_n \longrightarrow f$ dans L^p, et comme E est fermé, on a $f \in E$, ce qui conclut.

   Ainsi, il y a un α tel que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_p$.

2. Pour $1 < p \leq 2$, Jensen à $x^{\frac{2}{p}}$ donne $\sqrt[p]{\int f^p}^2 \leq \int (f^p)^{\frac{2}{p}}$, *i. e.* $\|f\|_p \leq \|f\|_2$.

   Pour $p > 2$, on a
$$\left(\frac{\|f\|_\infty}{\alpha}\right)^p \leq \|f\|_p^p = \int |f|^p \leq \int \|f\|_\infty^{p-2} |f|^2 = \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2,$$
   d'où en prenant la racine carré $\|f\|_\infty \leq \alpha^{\frac{p}{2}} \|f\|_2$.

   On conclut en prenant $\beta := \max\left\{1, \alpha^{\frac{p}{2}}\right\}$.

3. Pour $a \in B'$, on a
$$\|f_a\|_\infty \leq \beta \|f_a\|_2 = \beta,$$
   donc $f_a(x) \leq \beta$ p. p. en x, donc pareil $\forall a \in B'$ car B' dénombrable. Or, à x fixé, l'application $a \mapsto f_a(x)$ est continue (car linéaire), ce qui permet d'obtenir l'inégalité ci-dessus pour tout $a \in B$.

4. On prend ensuite $a_i = \frac{\overline{f_i(x)}}{\sqrt{\sum |f_j(x)|^2}}$, de sorte que
$$f_a(x) = \frac{\sum f_i(x) \overline{f_i(x)}}{\sqrt{\sum |f_j(x)|^2}} = \sqrt{\sum |f_j(x)|^2},$$
   d'où $\sum |f_j(x)|^2 = |f_a(x)|^2 \leq \beta^2$. Intégrer en x donne
$$\begin{aligned} \sum \|f_j(x)\|_2^2 &\leq \beta^2, \\ \textit{i. e. } n &\leq \beta^2, \textit{ CQFD.} \end{aligned}$$

2 Sev de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par le shift

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt$.

Soit E un sev de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par translation :
$$f \in E \implies [\forall a \in \mathbb{R},\ f(\cdot - a) \in E].$$

Montrer qu'il y a une partie $A \subset R$ mesurable telle que
$$E = \left\{ f \in L^2 \ ;\ \widehat{f}_{|A} = 0 \text{ p. p.} \right\}$$

Solution proposée.

$\widehat{E}$ est un sev fermé de L^2 (car $\widehat{\ }$ est une isométrie) stable par translation : $f \in E \implies f(\cdot - a) \in E \implies \widehat{f}\underbrace{e^{-ia\cdot}}_{:=e_a} \in \widehat{E}$.

On considère la projection orthogonale P sur $\widehat{E}$: pour tout $f, g \in L^2$ et pour tout $a \in R$, on a $f - Pf \perp (Pg) e_a$, ie $\int (f - Pf) \overline{Pg e_a} = 0$, et ceci $\forall a$, d'où $\widehat{(f - Pf) \overline{Pg}} = 0$. Or, $f - Pf, Pg \in L^2$, donc le produit $(f - Pf) \overline{Pg}$ est dans L^1, et par injectivité de $\widehat{\ }$ on en déduit $(Pg) f = Pf \overline{Pg}$.

Échanger les rôles de f et g donne $(Pg)\, f = \overline{g} Pf$. En particulier pour $g > 0$ (par exemple $g(t) = e^{-|t|}$), on obtient (avec $\varphi := \frac{\overline{Pg}}{\overline{g}}$)

$$\forall f \in L^2,\ Pf = \varphi \cdot f.$$

Or, puisque $P^2 = P$, on doit avoir $\varphi^2 = \varphi$ p. p., *i. e.* $\varphi \in \{0, 1\}$ p. p..

Enfin, en notant A le lieu d'annulation de φ (défini à un ensemble de mesure nulle près), on a les équivalences

$$f \in \widehat{E} \iff Pf = f \iff f = \varphi f \iff \begin{cases} f = 1f \text{ sur } {}^cA \\ f = 0f \text{ sur } A \end{cases} \iff f = 0 \text{ sur } A.$$

3 Caractères de l'algèbre de convolution L^1

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-itx} dt$.

Pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on pose $\langle \widetilde{a}, f \rangle := \left\langle \widehat{f}, a \right\rangle$.

On veut montrer que les $\widetilde{a}$ sont les caractères non nuls de l'algèbre L^1 munie du produit de convolution.

1. *Donner un sens à $\widetilde{\infty}$.*
2. *Montrer que tout caractère φ d'une algèbre de Banach satisfait $|||\varphi||| \leq 1$.*

On fixe par la suite un caractère φ non nul.

3. *Montrer qu'il y un $\widetilde{\varphi} \in L^\infty$ tel que, en notant $f_t := f(\cdot - t)$, on ait pour tout $f \in L^1$*

$$\varphi(f_t) = \varphi(f)\, \widetilde{\varphi}(t) \text{ presque partout en } t.$$

4. *Montrer que $\widetilde{\varphi}$ peut être pris dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ puis que ψ transforme sommes en produits.*
5. *Conclure.*

Solution proposée.

1. Tentons de définir $\widetilde{\infty}$ par la limite simple des $\widetilde{a}$ quand $a \to \infty$:

$$\langle \widetilde{\infty}, f \rangle := \lim_{a \infty} \langle \widetilde{a}, f \rangle = \lim_{a \infty} \int f(t)\, e^{-iat} dt \overset{\text{Riemann}}{=} 0.$$

On trouve le caractère nul.

2. Supposons par l'absurde que $|||\varphi||| > 1$. Il y a donc un point a de norme < 1 tel que $\|\varphi(a)\| = 1$. Alors la série $s_n := -a - a^2 - a^3 - ... - a^n$ converge absolument, donc converve vers un certain s. Mais puisque $s_n + a = a s_{n-1}$, on a $s + a = as$, d'où $\varphi(s) + \varphi(a) = \varphi(s)\, \varphi(a)$, *i. e.* $\varphi(s) + 1 = \varphi(s)$, ce qui est impossible.
3. D'après le lemme, φ est une forme linéaire continue, donc l'intégration contre un $\psi \in L^\infty$.
Alors le complexe $\varphi(f * g)$ vaut d'une part

$$\begin{aligned} \varphi\left(x \mapsto \int_t f(x-t)\, g(t)\, dt\right) &= \int_x \int_t f(x-t)\, g(t)\, \psi(x)\, dx dt \\ &= \int_t g(t) \int f_t \psi = \int_t g(t)\, \underline{\varphi(f_t)} dt, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\varphi(f)\, \varphi(g) = \int_t g(t)\, \underline{\varphi(f)\, \widetilde{\varphi}(t)} dt.$$

D'après l'unicité de Riesz, on conclut à l'égalité presque partout en t

$$\varphi(f_t) = \varphi(f)\, \psi(t).$$

4. En prenant un f tel que $\varphi(f) \neq 0$ (on peut car $\varphi \neq 0$), l'égalité ci-dessus se réécrit

$$\psi(t) = \frac{\varphi(f_t)}{\varphi(f)}.$$

Or, l'application $t \mapsto f_t$ est continue pour la norme????, donc la formule ci-dessus montre que ψ se prolonge en une application continue partout définie.

Ensuite, on peut voir que ψ transforme sommes en produits :

$$\psi(x+y) = \frac{\varphi(f_{x+y})}{\varphi(f)} = \frac{\varphi\left((f_x)_y\right)}{\varphi(f)} = \frac{\varphi(f_x)\,\psi(y)}{\varphi(f)} = \psi(x)\,\psi(y).$$

5. Ce qui suit est un classique des équations fonctionnelles.

Faire $x = y = 0$ donne $\psi(0) \in \{0,1\}$. Si c'était 0, alors faire $y = 0$ donnerait $\psi = 0$, d'où $\varphi(f) = \int f\psi = 0$, ce qui n'est pas.

On a donc

$$\psi(0) = 1.$$

Par continuité, il y a un $\delta > 0$ tel que $\int_0^\delta \psi > 0$, ce qui permet de déduire de l'égalité

$$\left(\int_0^\delta \psi\right)\psi(x) = \int_0^\delta \psi(t)\,\psi(x)\,dt = \int_0^\delta \psi(t+x)\,dt = \int_x^{\delta+x} \psi$$

la dérivabilité de ψ.

Dérivant selon x puis faire $x = 0$, on trouve $\psi' = A\psi$ (avec $A := \psi'(0)$), d'où $\psi = Be^{A\cdot}$. Mais la condition $\psi(0) = 1$ impose $B = 1$, d'où $\psi = e^{A\cdot}$. Enfin, le caractère L^∞ de ψ impose $A \in \mathbb{R}i$, disons $A = -ai$, d'où $\psi(t) = e^{-ait}$ et finalement

$$\varphi(f) = \int f(t)\,\psi(t)\,dt = \int f(t)\,e^{-ait}dt = \widetilde{a}(f),\ \mathit{CQFD}.$$

4 La composée de deux foncions Riemann intégrable n'est pas Rieman intégrable

on peut prendre $f =$ la fonction de Weierstrass qui vaut $\frac{1}{q}$ sur un rationnel $\frac{p}{q}$ en forme irréductible, et 0 sur un irrationnel, et $g = \chi_{]0,1]}$: alors la composée $g \circ f$ est la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ indicatrice des rationnels, qui n'est pas intégrable au sens de Riemann, tandis que g et f le sont

5 Fubini pour les fonctions continues sur des segments

si tu veux faire démontrer Fubini pour les intégrales de fonctions continues, tu peux faire comme ceci :
Soit $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Je veux montrer que :
$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$
Pour cela, je pose :
$g(X) = \int_a^X \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$
$h(X) = \int_d^d \left(\int_a^X f(x,y)\,dy\right) dx$

Alors g est dérivable (intégration des fonctions continues : $\int_c^d f(\cdot,y)\,dy$ est continue par continuité sous l'intégrale) et $g'(X) = \int_c^d f(X,y)$. De même, h est dérivable (dérivation sous l'intégrale) et $h'(X) = \int_c^d f(X,y)\,dy = g'(X)$.

Comme $g(a) = h(a) = 0$, on a $g(b) = h(b)$, CQFD.

6 SUr les partitions de rectangles à côtés entiers

Soit un rectangle R que l'on partitionne en rectangles R_i . On suppose que chacun des R_i a l'un de ses cotés de longueur entière, démontrer qu'alors R a l'un de ses cotés de longueur entière.

On peut supposer, quitte à rajouter toutes les abscisses et ordonnées, que les petits rectangles quadrillent le grand (gni ? ? ? ?)

L'astuce consiste à regarder l'intégrale de $e^{2i\pi(x+y)}$.
(le bon invariant)

7 Une limite

Il me semble que $f : a \mapsto \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+ax^2)} dx$ a une limite quand a tend vers 0 (1 en l'occurence). Quelqu'un a une preuve simple de ce resultat qui me semble completement contre-intuitif ?

si $\frac{1}{t^2} = a$, alors $f(a) = t \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{1+x^2} dx$ qu'on intègre par parties en $t \left(\left[-\frac{\cos(tx)}{t} \frac{1}{1+x^2} \right] - \frac{2}{t} \int_0^\infty \frac{x \cos tx}{(1+x^2)^2} dx \right)$ qui vaut $1 - 2 \int_0^\infty g(x) \cos(tx)\, dx$ avec $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ qui est L^1 sur R^+, donc par riemann lebesgue le deuxième terme tens vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$, ie $f(a) \longrightarrow 1$.

Rmq : f est de toutes facons calculable par le thm des résidus (si $a > 0$ au moins)

GAga, 4 juillet 2000, 18h43

8 Une fonction dérivée pas Rieman intégable

$x^2 \ln x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
$x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$

9 Une condition l^2

Montrer qu'une suite positive pour laquelle le "produit scalaire" avec toute suite carre sommable est bien defini est carre sommable elle-meme.

Pour ne pas faire de provocation, voici une version non-physicienne :

Soit (a_n) suite de termes positifs tq $\sum a_n b_n$ converge pour toute b_n de $l^2(R)$, montrer que (a_n) est dans $l^2(R)$.

On suppose que a_n n'est pas l^2, donc que la somme des a_n^2 diverge.

J'affirme qu'on peut alors construire une suite t_n qui soit pas trop petite, de telle sorte que $\sum t_n a_n^2$ diverge encore, mais assez petite quand meme pour que $\sum t_n^2 a_n^2$ converge.

Alors en posant $b_n = t_n a_n$ on a que b_n est l^2 mais que $\sum a_n b_n$ diverge, d'ou la contradiction.

Pour construire les t_n, c'est un peu du bricolage, il y a plein de facons possibles, en voici une.

Comme $\sum a_n^2$ diverge, on peut trouver une suite d'entiers n_k croissante telle que pour tout k la somme S_k des a_n^2 pour $n_k \leq n < n_{k+1}$ verifie $S_k \geq 1$. Alors pour $n_k \leq n < n_{k+1}$ je pose $t_n = \frac{1}{kS_k}$.

En sommant par paquets, on a bien $\sum t_n a_n^2 = \sum \frac{1}{k}$ diverge mais $\sum t_n^2 a_n^2 \leq \sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Application de Banach-Steinhaus ?

10 Dual topologique de $\mathbb{S}^1$

Une autre façon de voir ça que ce qu'a dit Yves, c'est que si f était un caractère (continu) autre que $e_n : z- > z^n$, il serait orthogonal à tous les e_i (pour le produit scalaire usuel sur $L^2(S_1)$) (car l'intégrale sur S_1 d'un caractère non trivial est nul), ce qui contredirait la densité des e_n dans $L^2(S_1)$.

Pour être sûr de comprendre pourquoi l'intégrale d'un caractère χ non trivial fait zéro :

En tout cas, tu peux toujours adapter la démonstration usuelle : par un changement de variables (la mesure est invariante par translation), tu obtiens que l'intégrale de $\chi\,(xt)$sur S_1 s'identifie à I, intégrale de χ, mais aussi à $\chi(x)I$, d'où la nullité de I si tu choisis au départ x tel que $\chi\,(x) \neq 1$.

Ah oui, c'est beaucoup mieux, ça... Je voulais à tout prix utiliser la continuité dans un argument de densité, mais tu ne l'utilises que pour dire que l'intégrale est bien définie, ça a l'air magique.