Divers

Marc SAGE

Table des matières

1 fonction croissante, continue sur R\Q mais pas sur Q

soit (r_n) une enumerations des rationnels. tu prends
f(x) = sum_{r_n<x} 2^{-n}
(

2 une lim simple de lim simple continue n'est pas toujours continue

$\cos{(n!x)}^k \longrightarrow \chi_{\mathbb{Q}}$

3 Signe de la dérivée aux points de continuité et monotonie

Soit g dérivable sur un intervalle. On suppose que g' est négatif ou nul en tout point de continuité de g'. Alors peut-on en déduire que g est décroissante ?

Je crois que non.
Soit r_n une énumération des rationnels de $[0,1]$ et $f(x) = \sum \frac{\sqrt[3]{x-r_n}}{2^n}$
En tous les rationnels, f est de dérivée infinie. En fait, on vérifie (c'est un exercice de Bourbaki) que f a en chaque point x une dérivée finie ou infinie, suivant la finitude de la somme $\sum \frac{(x-r_n)^{-\frac{2}{3}}}{2^n}$
f est un homéomorphisme de $[0,1]$ sur un intervalle I, sa réciproque g est alors dérivable partout et g' est nulle sur un ensemble dense (donc en particulier en tous ses points de continuité). Cependant, g n'est pas décroissante.

4 FOnctino non constante s'annulant sur une partie dense

Sinon, y'a une astuce classique :
Tu appelles h la fonction racine cubique. Tu prends (r_n) une énumération des rationnels. Si c_n est une suite de réels strictement positifs qui décroît suffisamment vite, la fonction (continue strictement croissante) $\sum c_n h(x-r_n)$ doit être dérivable au sens généralisé (c'est-à-dire qu'on admet des dérivées infinies) en tout réel avec une dérivée infinie exactement sur les rationnels. Maintenant tu prends sa réciproque : manifestement, sa dérivée s'annule sur une partie dense...
Je crois que c'est dans Bourbaki (*Fonctions de la variable réelle*).

5 Racines carré pour $\circ$ de fonctinos C^∞

Le résultat de Bony, c'est : si f est C^{2m}sur $\mathbb{R}$ et positive, alors il existe g et h de classe C^m sur $\mathbb{R}$ telles que $f = g^2 + h^2$. En particulier, si f est C^∞, pour tout m on peut trouver g et h de classe C^m telles que $f = g^2 + h^2$. J'ai vaguement l'impression que la démonstration est élémentaire (mais il se pourrait que ça commence par « on applique le théorème super-bourrin de Hörmander-Bony-Schmurz » et que tout le reste soit élémentaire, ou un truc de ce genre...) ; cependant, c'est publié en 2005 (tome 133 du Bull. Soc. Math. France, c'est d'ailleurs le dernier paru je crois).

Bon, comme promis, je finis en donnant une indication pour le cas d'un seul carré. On commence par trouver une fonction h C^∞de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui est positive partout, s'annulant exactement en 0, infiniment plate en 0, décroissante (au sens large) sur $\mathbb{R}^-$ et croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}+$, et constante au voisinage de chaque $\frac{1}{n}$ pour n entier naturel non nul. Ce n'est pas terriblement difficile de trouver ça.

Ensuite, on pose $F(x) = h(x)\left(\sin^2 \frac{\pi}{x} + h(x)\right)$. Cette fonction est C^∞ (la difficulté est en 0, mais les dérivées successives de $\sin^2 \frac{\pi}{x}$ admettent une croissance polynomiale en $\frac{1}{x}$ pour $x \longrightarrow 0$ donc c'est bon) et positive, s'annulant exactement en 0. La racine carrée de F est donc C^∞ et déterminée au signe près sur $\mathbb{R}^{++}$, et ce signe n'a pas d'importance ; on peut déterminer un développement limité de $\sqrt{F}$ en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 et on voit qu'il est du genre $\sqrt{F\left(\frac{1}{n}+t\right)} = h\left(\frac{1}{n}\right) + n^4\pi^2\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$, donc la dérivée seconde de $\sqrt{F}$ en $\frac{1}{n}$ vaut $n^4\pi^2$ et elle n'est pas bornée lorsque n tend vers l'infini, ce qui prouve que $\sqrt{F}$ ne se prolonge pas en une fonction C^2 en 0.

– David, qui que, c'est vraiment fou, les maths.

6 Stabilité des dérivée par limite uniforme

Est-ce que la famille des fonctions dérivées est stable par limite uniforme ?

En fait, c'est facile. Soit (f_n) une suite de dérivées, que (comme le problème est local, quitte à restreindre) on peut supposer sur $]-1,1[$ et (F_n) la suite de leurs primitives avec $F_n(0) = 0$. On suppose que f_n converge uniformément vers f. Alors (F_n) est uniformément de Cauchy : en effet, la fonction $F_m - F_n$ est dérivable de dérivée $f_m - f_n$, qu'en prenant m et n assez grand on peut rendre arbitrairement petit uniformément sur tout l'intervalle $]-1,1[$ et le théorème des accroissements finis permet de conclure. Du coup, F_n a une limite uniforme, F, continue. Un théorème classique (Ramis-Deschamps-Odoux, IV.2.2.3, 1°, théorème, (i)) permet de conclure que F est bien dérivable de dérivée f (ce n'est du reste pas très difficile : on fixe un point a et un regarde la famille des fonctions $\frac{F_n - F_n(a)}{\cdot - a}$, on vérifie à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est uniformément de Cauchy donc que sa limite simple $\frac{F - F(a)}{\cdot - a}$ est uniforme, et le théorème d'interversion des limites conclut).

7 Th de Schwarz

Tu peux aussi faire démontrer la commutation des dérivées partielles pour des fonctions C^2 :
suppose que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^2 et, par l'absurde que
$\partial_x\partial_y f(0,0) = \partial_y\partial_x f(0,0) + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$
alors par continuité
$\partial_x\partial_y f(x,y) \geq \partial_y\partial_x f(0,0) + \frac{\varepsilon}{2}$
sur un petit rectangle $R := [-a,a] \times [-b,b]$ autour de $(0,0)$
Si j'intègre cette inégalité sur le rectangle j'ai :
$\int_R \partial_x\partial_y f(x,y)\,dxdy \geq \int_R \partial_y\partial_x f(0,0) + \varepsilon ab$
ce qui, par le calcul et par Fubini :
(sur les fonctions continues, cf [*])
$f(a,b) - f(-a,b) - f(a,-b) + f(-a,-b) \geq f(a,b) - f(-a,b) - f(a,-b) + f(-a,-b) + \varepsilon ab$
ce qui est absurde.

8 COnvergence au sens Lipschitz

Est-ce qu'il est faux/vrai/facile à montrer que dans l'espaces des fonctions lipschitiziennes sur $\mathbb{R}$ (ou un compact de $\mathbb{R}$) muni de la norme naturelle (par exemple qui à une fonction associe f associe $|f(0)| + C$ où f est C-Lipschitzienne), les fonctions de classe C^1 (voire C^∞) sont denses ?

C'est faux : les fonctions de classe C^1 forment un sous-espace fermé : une suite de fonctions C^1 qui convergent au sens Lipschitz ont leurs dérivées qui convergent uniformément, la limite est donc C^1.

9 Escalier du diable

Tu prends l'ensemble triadique de Cantor K, que tu vois comme l'ensemble des réels entre 0 et 1 qui ont un développement en base 3 dont tous les chiffres sont constitués de 0 et 2 (sans le chiffre 1, quoi). Maintenant, à un tel réel tu associes le développement binaire qui est exactement le même sauf que tu remplaces les 2 par des 1 : ça définit un réel entre 0 et 1. Là tu as défini une surjection h croissante continue de K sur $[0,1]$. Tu complètes cette surjection à $[0,1]$ tout entier en décidant d'envoyer, si I est un intervalle contigu à K (une composante connexe de son complémentaire), tout point de I sur la valeur commune aux extrémités de I (ils sont tous deux dans K et il est facile de voir que h prend la même valeur dessus, l'un ayant un développement en 22222... et l'autre en 00000...). Ceci définit une surjection h croissante continue de $[0,1]$ sur $[0,1]$ qui est constante (et donc dérivable de dérivée nulle) sur chaque composante connexe du complémentaire de K, autrement dit dérivable de dérivée nulle sur le complémentaire $[0,1]\backslash K$ d'un ensemble négligeable, et pourtant h n'est pas constante.

10 Densité des $\frac{1}{X-a}$ dans $C^0[0,1]$

On a un théorème qui dit que l'espace vectoriel engendré par les $\frac{1}{X-a_i}$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ si les a_i tendent vers ∞ (et les $a_i > 1$)

Je sais qu'il faut faire ça avec le critère de densité via les formes linéaires (je prends une forme linéaire qui s'annule là-dessus, je veux montrer qu'elle s'annule partout), mais j'arrive pas à retrouver.

Vu que les polynômes sont denses dans $C([0,1],\mathbb{R})$, il suffit de vérifier qu'une forme linéaire s'annulant sur les $\frac{1}{X-a_i}$ s'annule sur les X^n, ce qui se voit en décomposant tes fonctions en séries entières.

Plus précisément :

Si je décompose $\frac{1}{X-a_i}$ en séries entières (la convergence est *uniforme*), j'ai :

$\frac{1}{a_i-X} = \sum_0^\infty \frac{X^k}{a_i^{k+1}}$

Si (par l'absurde) φ est une forme linéaire continue et n est le plus petit indice tel que $\varphi(X^n) \neq 0$, alors en multipliant l'égalité ci-dessus par a_i^{n+1}, en évaluant en φ et en faisant tendre a_i vers l'infini on obtient $0 = \varphi(X^n)$

11 Une fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ dont valeurs critiques sont non dénombrables

La question a aussi été posée de savoir si on peut construire une fonction $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ dont les valeurs (= images) critiques sont non dénombrables :

Ah, si, en fait, je sais faire, c'est pas trop dur. Soit $h : [0,1] -> \mathbb{R}$ une fonction C^∞, strictement positive sur tout $]0,1[$, infiniment plate en 0 et 1. Je considère K l'ensemble triadique de Cantor standard, je vais définir une fonction g sur son complémentaire : sur $\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$ je pose $g(x) = a \cdot h(3x-1)$ où $a > 0$ est choisi de sorte que g et $g\prime$ soient partout majorées par 1 sur cet intervalle. Sur $\left]\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right[$ et $\left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[$ je pose $g(x) = b \cdot h(9x-1)$ et $g(x) = b \cdot h(9x-7)$ respectivement, où $b > 0$ est choisi de sorte que g, $g\prime$ et g" soient toutes majorées par $\frac{1}{2}$ sur ces intervalles. Et ainsi de suite. La fonction g construite sur tout le complémentaire du Cantor K se prolonge par continuité en 0 sur K et définit ainsi une fonction C^∞ qui s'annule exactement, ainsi que toutes ses dérivées, sur K. J'appelle f la primitive de g (s'annulant en 0) : alors f est un homéomorphisme C^∞ de $[0,1]$ sur $[0,c]$ pour un certain c, et toutes les dérivées de f s'annulent en tous les points de K.

12 Une condition de C-infinitude

Voici un exo amusant du monthly. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que $\forall h > 0,\ f(\cdot+h) - f$ est C^∞. Est ce que f est C^∞

La réponse est oui !

(Laurent berger, 21/10/98 16h11)

13 Exo classique sur continuité

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue . Soit $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ une suite définie par récurrence. Alors :
u_n dans $\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}\,u$ est un singleton.

Soit l cette valeur d'adhérence. Clairement, $f\left(l\right)=l$ car $f(l)$ est aussi valeur d'adhérence.

Soit $\delta>0$ tel que $|x-l|<\delta\implies\left|f\left(x\right)-l\right|<1$ (par continuité de f en l). On peut bien supposer $\delta<1$.

S'il était vrai que $|u_n-l|<\delta$ pour tout $n>N$ (pour un certain N), alors u_n serait (à partir d'un certain rang N) à valeurs dans le compact $\{x;\ |x-l|\leq\delta\}$, et comme elle admet une unique valeur d'adhérence l, elle convergerait vers l.

On peut donc supposer qu'il existe des rangs n arbitrairement grands pour lesquels $|u_n-l|\geq\delta$ Comme il existe par ailleurs des rangs n arbitrairement grands pour lesquels $|u_n-l|<\delta$ (parce que l est valeur d'adhérence), il doit exister une infinité de valeurs de n pour lesquelles $|u_n-l|<\delta$ et $|u_{n+1}-l|\geq\delta$. On a alors $|u_{n+1}-l|\leq 1$par définition de δ.

Mais on a donc montré qu'il existait une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\delta\leq|u_n-l|\leq 1$. À ce moment-là, il doit exister une valeur d'adhérence de (u_n) dans ce compact. Et ce n'est pas l :contradiction.

14 Une bijection striciemnt croissante envoayn les algébrqiue sur une partie de rationnels

Bon, j'y crois toujours, mais ce serait très technique à démontrer.

En revanche, j'ai un résultat légèrement plus faible, tout aussi impressionnant (voire plus) et qui répond à la question initiale.

Il existe une fonction C^∞, strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui envoie l'ensemble des algébriques dans un sous-ensemble de l'ensemble des rationnels.

En fait, il vaut mieux remplacer « strictement croissante » par « à dérivée strictement positive » tout du long. Ça assure en plus que la bijection réciproque est elle-aussi C^∞.

Démonstration. Soit (a_n) une énumération des algébriques. On part d'une fonction φ_{-1} de classe C^∞ strictement croissante bijective quelconque. On va lui ajouter différentes fonctions φ_n, qu'on va maintenant définir.

Pour chaque a_n successivement, on considère b le plus grand des a_i tels que $i<n$ et $a_i<a_n$ ($b=a_n-1$ par exemple si tous les a_i tels que $i<n$ sont $>a_n$), et c le plus petit des a_i tels que $i<n$ et $a_i>a_n$ ($c=a_n+1$ par exemple si [...]).

On considère alors une fonction φ_n de classe C^∞ à support dans $]b,c[$, dont la valeur u en a_n est choisie de sorte que l'image de a_n par la somme des $\varphi_{-1},...,\varphi_n$(qui ne sera pas modifiée par les additions ultérieures) soit rationnelle. De plus, on choisit φ_n suffisamment petite pour que les n premières dérivées de φ_n soient partout inférieures à $\frac{1}{2^n}$ et pour que la somme des $\varphi_{-1},...,\varphi_n$ soit encore strictement croissante.

Ainsi, la série des φ_n converge normalement ainsi que toutes ses dérivées donc on obtient à la fin une fonction C^∞, strictement croissante et bijective, et celle-ci envoie chaque a_n sur un rationnel.

David, 31 mai 99, 22h26

en non, on peut quand même trouver une fonction analytique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie les algébriques dans un sous-ensemble des rationnels.

Démonstration : on énumère les algébriques en une suite (a_n). On part de la fonction nulle. Pour chaque n successivement, on considère un polynôme φ_n qui s'annulle en a_i pour $i<n$, qui prend une valeur u en a_n choisie de sorte que $\sum_{i\leq n}\varphi_i$ prenne une valeur rationnelle en a_n, et de plus on prend φ_n suffisamment petit pour que sur l'intervalle $[-n,n]$ le polynôme φ_n ainsi que toutes ses dérivées soit partout inférieur à $\frac{1}{2^n}$ en valeur absolue.

Alors la somme des φ_n converge normalement sur tout compact. Il s'agit d'une série de polynômes, et si on applique un théorème que j'ai oublié mais qui est certainement vérifié ici, la somme est analytique. Par construction, elle prend une valeur rationnelle sur tout algébrique.

Ah oui, il faudrait savoir qu'on n'est pas tombé sur 0. Je laisse ça en exercice au lecteur qui partira d'une fonction non nulle du genre x^2 et qui ajoutera des choses assez petites pour s'assurer de ne pas pouvoir la manger tout entière.

Il resterait à savoir si on peut trouver une fonction analytique striment croissante (de dérivée > 0 même) bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui se restreigne en une bijection des algébriques sur les rationnels. Je ne sais pas, et, pour être honnête, je m'en fous.

DAvid, 2 juin 99, 18h07

15 toute fonction continue de limite nulle à l'infini est limite uniforme de polynomes fois e^{-t}

Quels fainéants ces conscrits - :)... voila une preuve qui m'a l'air de marcher : Si X est un compact et x un point de X, on raffine d'abord Stone Weierstrass pour voir qu'une algèbre (sans unité) de fonctions qui s'annule en x et qui sépare les points sur $X \setminus \{x\}$ est dense dans l'idéal des fonctions s'annulant en x (tu rajoutes les constantes, c'est dense sur X et c'est fini).

On en déduit en prenant $X = R^+ \cup \{\infty\}$, $x = \infty$, que l'algèbre engendrée par les $P\,(t)\,e^{-t}$ est dense dans les fonctions qui tendent vers 0 à l'infini. Il faut voir enfin que les $P(t)e^{-nt}$, $n > 1$, sont dans l'adhérence des $P(t)e^{-t}$, ce qui a nettement réduit le problème.

Ca c'est un exo de taupe, on commence par approximer e^{-kt} par un $e^{-t}P\,(t)$ (par les sommes partielles du développement de Taylor de $e^{-(k-1)t}$, c'est facile car on a une série alternée et un terme $\frac{(k-1)^n t^n}{n!}e^{-t}$ qui tend uniformément vers 0 en n sur R^+), ensuite c'est facile de voir que tu peux rajouter un polynôme, ce qui conclut.

gaga, 20 02 2002, 22h56

16 Fonctions dont préimage intervalle vaut R

Name , dans le message (sciences.maths :16231), a écrit :
>> GroTeXdieck a écrit :
>
>>>> « il existe des fonctions réelles qui, sur n'importe
>>>> quel intervalle non trivial, prennent toutes les valeurs réelles »
>
>>
>> Greuh, ça se construit simplement ces bêtes-là ?

Une construction possible :

Il suffit, autour de tout rationnel de la forme $x = \frac{k}{2^n}$avec k impair, de trouver une partie A_x équipotente à $\mathbb{R}$ et proche de x (incluse dans un ε_n voisinage de x avec ε_n petit), telle que les A_x soient deux à deux disjoints. A toi de choisir ta famille A_x préférée, (tu peux par exemple prendre des Cantor bien choisis).

17 Sur C^6 et pas C^7

1. Si f, g deux fonctions convexes tendant vers +infini en leurs bornes, alor il existe h, dont l'épigraphe soit la somme des épigraphes de f et g.

2. Que peut-on dire de la régularité de h, en fonction de celle de f et g. (réponse : pas grand'chose... argh.)

Au fait, vous saviez que la somme (de Minkowski) de deux convexes plans de classe C^∞ est de classe C^6 mais pas en général de classe C^7 ? Je voulais poster ça dans sciences.maths.paranormal mais ce conti n'existe pas encore.

Prendre par exemple $K + L$, où K est l'épigrahe de $x \longmapsto \frac{x^4}{4}$ et L l'épigraphe de $x \longmapsto \frac{x^6}{6}$. Il paraît (j'ai pas fait les calculs) qu'on voit que $K + L$ est de classe C^6 mais pas C^7 en $((0,0))$ en bidouillant des développements limités.

Après je n'ai aucune idée de comment on montre qu'une somme est toujours de classe C^6, ni pourquoi la preuve ne marche pas pour 7.

En fait la vraie limite c'est pas 6 ni 7 c'est $\frac{20}{3}$ (mais il faut définir C^k pour k non entier ce qui est moins élémentaire).