Divers

Marc SAGE

Table des matières

L'analyse, c'est la partie du cours du prof de maths qui ne fait pas fuir le prof de physique. :-p

1 Equa diff

1.1 Une démo rigolote

Si on prend f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y une solution de l'équation différentielle $y' = f(y)$, y est forcément monotone. Ce n'est pas difficile à prouver : principalement, on dit que si ce n'était pas le cas, on pourrait par exemple trouver $a < b < c$, tels que $y(a) = y(c) = y_0$ et $y(b) > y_0$. Maintenant quitte à modifier a et c, on peut même supposer $y\prime(a) > 0$, ie $f(y_0) > 0$. Mais alors, sur un voisinage de y_0, f reste au dessus de $\alpha > 0$, et donc sur un voisinage de c dont on peut minorer la longueur a priori, f reste en dessous de y_0. Ainsi on trouve une suite c_i décroissante telle que $b < c_i$, $y\left(c_i\right) = y_0$ et $c_i - c_{i-1} > \delta$, δ fixe. C'est absurde.

Bref, la question est de savoir si cet énoncé reste vrai si l'on ne suppose plus f continue. On m'a pipoté au pot tout à l'heure qu'on devait pouvoir s'en sortir en supposant f mesurable, mais je ne sais pas comment.

Tu poses $d = \inf\left\{x \geq b\ ;\ y\left(x\right) = y_0\right\}$, comme y est continue on a $y(d) = y_0$, et $y(t) > y_0$ sur pour t dans $[b, d[$. Alors $\frac{y(t)-y(d)}{t-d} < 0$, et donc en faisant tendre t vers d, on a $y\prime(d) \leq 0$. Comme $y\prime(d) = f(y(d)) = f(y_0) > 0$ par construction, ça va être dur.

2 LA chimie n'est pas que pipo

Junky chouineur in litteris <enrh2v$8t5$1@clipper.ens.fr> scripsit :

>> Sauf que ça n'a rien à voir avec ce dont on est en train de parler.

Ben il me semble que si. Si mes souvenirs de prépa sont bons, en chimie des solutions aqueuses, on commence par pipoter quelles espèces seront suffisamment minoritaires et lesquelles ne le seront pas, ces approximations permettent trivialement de résoudre les équations (de façon exacte - pas approximative - même si en fait on n'écrit que l'approximation de la solution), et on vérifie que la solution (exacte) est bien une solution.

Je prends un exemple. Supposons que HA/A^- soit un acide faible de $pK_a = 2$ et j'en mets 10^{-2} mol/L (sous forme HA) dans de l'eau, je me demande quel sera le pH de la solution. J'intuite que $[HO^-]$ va être négligeable, auquel cas $[H_3O^+] = [A^-]$ par électroneutralité et si j'appelle x cette quantité j'ai $\frac{x^2}{10^{-2}-x} = 10^{-2}$ donc $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}10^{-2}$ et le pH vaut 2.2 (j'ai fait exprès de prendre un cas où il n'y a qu'une négligeabilité à justifier, donc x vérifie une équation du second degré). Ça c'est la solution approchée qui néglige $[HO^-]$. Ensuite, les chimistes disent « on vérifie que $[HO^-]$ est bien négligeable (il vaut $\frac{10^{-14}}{x}$) » : en fait, ça veut dire « on constate qu'il y a une solution exacte au voisinage de la solution approchée trouvée ».

Mathématiquement, ça, c'est tout à fait clair : pour mon exemple, j'appelle $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}10^{-2}$ la solution trouvée en négligeant $[HO^-]$, et je pose $[H_3O^+] = x + h$ avec h une variable formelle et k la constante de dissociation de l'eau également vue comme une variable formelle, alors $[HO^-] = \frac{k}{x+h}$ admet un développement en série formelle en h et k qui commence comme $\frac{k}{x} - h\frac{k}{x^2} + ...$, de même $[A^-] = x + h - \frac{k}{x} - h\frac{k}{x^2} + ...$ et $[HA] = 10^{-2} - x - h + \frac{k}{x} + h\frac{k}{x^2} + ...$ donnant l'équation $x^2 + 2xh - k - 2h\frac{k}{x} + ... = 10^{-4} - 10^{-2}x - 10^{-2}h + 10^{-2}k/x + ..$, soit, en simplifiant, $(2x + 10^{-2})h - (1 + \frac{10^{-2}}{x})k + ... = 0$, qui, pour le coup, admet évidemment(*) une solution formelle h fonction de k, et numériquement c'est clair que ça doit converger en $k = 10^{-14}$ (la croissance des coefficients est loin d'être en 10^{14} à chaque fois). Do$\int$nc on a une solution exacte près de la solution approchée x proposée. Pour moi, c'est ça, le « on vérifie que $[HO^-]$ est bien négligeable » : la convergence de la série formelle qui donne la solution exacte (et qui est, mathématiquement, sans problème).

(*) Je ne dis pas que c'est clair qu'**en général** ça va forcément marcher, mais sur un exemple donné c'est assez clair pour que ça se passe de justification supplémentaire.

Là où les choses sont délicates, en revanche, c'est si on se demande si, finalement, il n'y avait pas une autre solution exacte tout à fait ailleurs (pour laquelle $[HO^-]$ n'est pas du tout négligeable). Et là je ne vois pas mieux que regarder l'équation complète et lui appliquer un argument à la Sturm-Liouville pour expliquer qu'en fait, non, ce genre d'équation ne peut pas avoir plus d'une solution physiquement significative.

3 Rationnels sur les corps p-adiques

Est-ce que quelqu'un a une preuve de cette assertion (supposée vraie) :

Un nombre p-adique est un rationnel si et seulement si son développement p-adique est (éventuellement ?) périodique ?

Pour moi le sens <= est trivial.

Je ne m'y connais pas trop en nombres p-adiques ; ce qui ne marche plus dans l'adaptation de la preuve de => pour le cas réel, c'est la décomposition en partie entière et fractionnaire. Ben en fait si, ça se fait de façon exactement similaire.

Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel. Quitte à multiplier x par une puissance de p on peut supposer que p ne divise pas b. Mais alors il existe un k tel que $p^k = 1$ modulo b, et si on pose $p^k - 1 = -bc$, on a $x = \frac{ac}{1-p^k}$. Quitte à ajouter ou retrancher un entier naturel à x, on peut supposer $0 \leq ac < p^k - 1$. Mais alors on a : $x = \frac{ac}{1-p^k} = ac + ac\frac{p^k}{1-p^k} = ac + p^k x$ et donc son développement est clairement périodique de période k.

4 Déterminant maximail à coef dans 0,1

Je rappelle que $a_n = \sup|\det(M)|$ où M est $n \times n$ et a ses coefficients dans $\{0; 1\}$.

Prop : $a_n^2 > n!\frac{(3n+1)}{12^n}$

Demo :

1) D'abord remarquons que a_n est le meme sup mais avec les coefficients dans $[0, 1]$.

2) Ensuite je dis que la valeur moyenne du carre de $\det(M)$ ou M a ses coeffts choisis dans $[0, 1]$ est $n!\frac{(3n+1)}{12^n}$ (le lecteur remarquera que trouver cette valeur est l'objet du probleme 10787b du monthly). Clairement cela acheve la proposition.

3) Reste a calculer cette valeur moyenne. Je m'y prends le plus brutalement possible : integrale du determinant sur le cube, je l'ecris comme somme sur toutes les permutations de (...). Ensuite, un petit raisonnement montre que cette integrale est $\frac{n!}{3^n}P_n(\frac{3}{4})$ où $P_n(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, X^{|\mathrm{Supp}\,\sigma|}$

4) Calculer P_n revient a une formule sur les derangements positifs et negatifs. On trouve sans mal : $P_n(X) = (1-X)^{n-1}(1+(n-1)X)$

Le resultat suit.

Laurent Berger, 6 mai 2000, 17h00

5 Tout groupe algérbique est je sais plus quoi

démo splendide (utilisant Ascoli, Uryshon, Stone) dans Mméiné Testard ?

6 Escargot sur ruban elastique

C'est un escargot qui se balade sur un ruban élastique - infiniment élastique, pour être précis. Au départ, le ruban fait 1000km de long.

Chaque seconde, l'escargot, qui part à un bout du ruban, avance de 1mm en direction de l'autre bout, et le ruban grandit en même temps (continûment) de 1000km. Mais quand je dis « grandit », c'est de façon élastique, c'est-à-dire qu'il s'étire uniformément (donc, pendant la première seconde, le ruban double de taille, et toutes les distances dessus sont doublées, y compris la distance entre l'escargot et l'un ou l'autre bout) - ce n'est pas du tout pareil que de rajouter 1000km supplémentaires à un bout ou à l'autre.

La question : l'escargot finira-t-il par parcourir tout le ruban, et, si oui, en combien de temps ?