Équations différentielles
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

1 Une équation intégrale

$f \in R^R$ C0 tq $\int_0^x f = \frac{x}{3}\left(f(x) + f(0)\right)$ ..

Solution proposée.

Pour x non nul, on isole $f(x)$ d'où f C^1 sur R^* Dérivant ona $f'(x) = 2\frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x}$ qui se résoud en $f(x) = \frac{f(0)}{2} + Cx^2$. Passer à la limte donne $f(0) = 0$, d'où deux parabole recollé en $0, 0$; lesquelles conviennet.

2 Une équation non linéaire

$y' = |y - 1|$ sur R^{++}, R^*, $\mathbb{R}$.
(poser $z = y - 1$, puis z croît. Séparer les cas $z >$ou< 1, montrer que ece sont des intervalles)

3 Unicité ?

solution maximales de $y' = -\sqrt{y}$?

soit y une sol non nulle. Soit a où $y \neq 0$ et I maxiaml contenant a où $y \neq 0$. Sur $\mathring{I}$, $\frac{y'}{\sqrt{y}} = -1$, d'où en intégrant depuis$a$:$\sqrt{2y} - \sqrt{2y(a)} = -(x - a)$. Ainsi, sur$I$, on trouve $y = \frac{1}{4}(x - ?)^2$.

Réinjectant, on doit avoir $x \leq ?$, d'où $\inf I = -\infty$ (sinon par continuité $y(\inf I) = \frac{1}{4}(\inf I - ?)^2 > 0$) et de meme $I = R$.

réiproquement, les deux parabole recollée sont ok.

4 Stabilité

soit f complexeC^1 définie autour de ∞.
Montrer que $(f' - \alpha f \longrightarrow 0 \implies f \longrightarrow 0)$ ssi $\operatorname{Re}\alpha < 0$
Généarliser $(P(\delta)(f) \longrightarrow 0 \implies f \longrightarrow 0)$ ssi$\operatorname{Re} Z(P) < 0$.

Rappel : en notant $\lambda = e^\alpha$, on $\operatorname{Re}\alpha < 0$ ssi $|\lambda| < 1$
Idée : exprimer $g := f' - \alpha f$ à l'aide de f. On sait que $f(x) = f(0)\lambda^x + \int_0^x g(t)\lambda^{x-t}dt$ avec $g \longrightarrow 0$.
Le $\lambda^x \longrightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et M audel duquel $|g| < \varepsilon$ On découpe l'intégrale en deux : avant M on a λ^x fois une constante (ie un $o(1)$) ; après M, on minore g par ε donc l'intégrale par $\varepsilon \int \lambda^x$ qui converge.
SI $|\lambda| \geq 1$, alors $e^{\alpha x}$ vérriieles conditions mais ne tend pas vers 0.

Si $\operatorname{Re} Z(P) < 0$, par réc on a $P(\delta)(f) \longrightarrow 0$
Si un $\alpha \in Z(P)$ est de $\operatorname{Re} \geq 0$, alors $e^{\alpha x}$ est soltion de $P(\delta)(f) = 0$, mais ne$\longrightarrow 0$.

5 Solutoin bornée de $y'' + qy = 0$

1. *soit $q \in R^R$ C^1 croissante > 0 apcr.*
   Montrer que tout solution de $y'' + qy = 0$ est bornée en l'infini.
2. *oit $q \in R^R$ continue < 0.*
   Montrer que l'équation $y'' + qy = 0$ a une seule solution majorée.
3. *Mq $y'' + qy = 0$ où qCO L1 a des solution non bornée.*

1. Eg : $x''+\omega^2x=0$ (avec $\omega^2=\frac{m}{k}$) $\theta''+\omega^2\theta=0$ (avec $\omega^2=\frac{l}{g}$). On a un énergie qui met sous la forme $Cste\frac{y'^2}{q}+y^2$ (cinétique $\frac{1}{2}mx'^2$ plus potentienelle $\frac{1}{2}kx^2$). On pose donc $E:=\frac{y'^2}{q}+y^2$ (ok àpcr)

   Alors

$$\begin{aligned} E' &= \frac{2y'y''q-y'^2q'}{q^2}+2yy' \\ &= \frac{2y'\left(-q^2y\right)-y'^2q'+2q^2yy'}{q^2} \\ &= -\left(\frac{y'}{q}\right)^2q'<0 \end{aligned}$$

   donc E décroit apcr, donc est bornée, d'où $y\left(x\right)^2\leq E\left(x\right)$ bornée

   Autre démo : chercher du gronwall (cf plus loin) C'est l'occasion de rappeller l'ingégation $0=y''y'+qyy'$ en $y'^2-y'^2\left(0\right)+2\int_0^t qyy'=0$, puis avec une ipp

$$y'^2+qy^2=Cste+\int_0^t q'y^2.$$

   Ainsi, on a $\underline{qy^2}\leq C+\int_0^t\frac{q'}{q}\underline{qy^2}$, d'où par Gronwall $qy^2\leq Ce^{\int\frac{q'}{q}}=C\frac{q}{q(0)}$, d'où y^2 bornée, *CQFD.*

2. Ici, considérer $z:=\frac{1}{2}y^2$ suffit :

$$z''=\frac{1}{2}\left(2yy'\right)'=y''y+y'^2=-qy^2+y'^2S\geq 0,$$

   donc z est convexe. Si $z'\equiv 0$, z constant, donc$y$ aussi par contnuité, donc nulle. Sinon, z est audeu-ssus d'une de ses tangentes, donc n'est pas majorée., CQFD

3. soit (f,g) base. Son wrsonkein est constant, non nul sinon f,g lié.

   Si $|y|\leq M$, $|y''|\leq A\,|q|$ est intégrable, donc y' a une limite, qui doit valoir 0 pour que y bornée

   Supp abs f et g bornée.Alors f' et g' tendent vers 0, puis le wronkein aussi, donc est nul, *absurde.*

6 Zéros des solutions de $y''+py'+qy=0$

1. *Soit $y''=F\left(y',y,t\right)$ avvec F C^1 et 0 solution*
   Mq $y=0$ ou tous zéros sont isolés
2. *Explique en quoi l'étude des zéros des solutions de $y''+py'+qy=0$ est la même que celle des zéros des solutios de $y''+qy=0$.*
3. *$y''+qy=0$ (pcontibues) base de solu f,g. Mq zéos de f et g sont entrelacés.*
   (penser au wronskien
4. *Soit f solution de $y''+py=0$ ayant deux zéos consécutifs $a<b$. Montrer que toute g (non liée à x) solution de $y''+qy=0$ où $q\leq p$ s'annule entre a et b.*
5. *Si $|q|\leq M$, mq deux zéros consécutifs sont séparés d'amoins $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$*
6. *si $q\geq\varepsilon>0$, mq toute solution de $y''+qy=0$ s'annule sur tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$*

Soution prop

1. Il suffit de montrer que les zéros sont tous simples. Soit a un zéro d'une solutuon non nulle. Si $y'\left(a\right)=0$, alors y vérifie les me^me CI que 0 donc est nul par CL (ok car F estC^1), abrude.
2. remplcaer y par $ye^?$ tue le p sans affeccuter le lieu des zéor de y.
3. Soit $a<b$ deux zéros successifs de f. Alosr $f'\left(a\right)f'\left(b\right)\neq 0$ sinon$f=0$ par CL, et le produit est négatif sinon f chagne de signe. Le wronkien $w=fg'-f'g$ est constant . Alors $\underbrace{w\left(a\right)w\left(b\right)}_{>0}=\underbrace{f'\left(a\right)f'\left(b\right)}_{<0}g\left(a\right)g\left(b\right)$,

   donc TVI => g s'annule.

Si on a un autre zéro, on applique ce qui rpécède à g, d'oùun zéro de f entre a et b stricitmeent, absurde ;

1. soit $W = fg' - f'g$. Comme ci-dessus, on a $f'(a) f'(b) < 0$
   Supposons g sans zéros. Alors signe contant, donc $W(a) W(b) < 0$. Or, la dérivée W' vaut $fg(p-q)$ donc a le bon signe pour forcer la nullité d eW,d'où f lié à g entre a et$b$.
2. soit $a < b$ deux zéros d'un f sol de $y'' + qy = 0$ avec $b - a < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Alors on peut trouver un $g := \cos\left(\sqrt{M}t+?\right) > 0$ sur $[a,b]$, donc non proportionnel à f (regarder en a ou b), et solution à $y'' + My = 0$, centredsant la seconde question
3. soit $f > 0$ une telle sol sur un tel intervalle $[a,b]$. On peut trouver un $g := \cos\left(\sqrt{\varepsilon}t+?\right)$ s'annulant exactemnet en a et b, donc non proporitonnelle, et pourtnat solution à $y'' + \varepsilon y = 0$, donc f soit s'annuler.

7 Gronwall + application

1. *soit $\lambda > 0$ et $\theta : [0,T] \longrightarrow R$ continue tq $\theta(x) \leq C + \lambda \int_0^x \theta$.* *Mq $\theta(x) \leq Ce^{\lambda x}$.*
2. *Soit f klip sur R et α, β deux solutions sur à $y' = f(y)$.*

montrer que $|\alpha(t) - \beta(t)| \leq |\alpha(0) - \beta(0)| e^{kt}$. Interpreter.

1. Cela rappelle la résolution de $\theta' + q\theta = 0$ par méthode du facteur intégrant. On va faire pareil mais en partan d'inégalités.
   Pour aoivr une ed, on pose $\Theta(x) = \int_0^x \theta$. Alors on a $\Theta' - \lambda\Theta \leq C$, d'où$\frac{d}{dx}\left[\Theta(x) e^{-\lambda x}\right] \leq Ce^{-\lambda x}$, puis en intégrana entre 0 et un nouveau x $\Theta e^{-\lambda x} \leq \frac{C}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)$, d'où $\Theta \leq \frac{C}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - 1\right)$. AIni , $\theta \leq C + \lambda\Theta \leq Ce^{\lambda t}$
2. On va poser $\theta = \alpha - \beta$. Alors on intégre entre 0 et t $\left|\theta'\right| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq k|\theta|$:
$$|\theta - \theta(0)| = \left|\int \theta'\right| \leq k \int_0^t |\theta|$$
   On peut appliquer Gronwall : $|\theta| \leq \theta(0) e^{kt}$. Evaluer en T donne ce qu'on veut.
   Interprétation : on controle l'écartement entre deux solutions en fonction de celui au dpart, mais ce controle est inopérant pour des grandes valeur.

Remarque : on généraliera Gronwall en
$$\theta \leq C + \int_0^{\cdot} \lambda\theta \implies \theta \leq Ce^{\Lambda} \text{ où } \Lambda' = \lambda.$$

8 Une équation fonctionnnelle différentielle

trouve les $f \in \mathbb{C}^{R^{++}}$ D^1 tq $f' = f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$.

Dériver donne $f'' = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x)$, donc $x^2 f'' + f = 0$. On résout en cherchant soluton parculière, polynomail. x^λ solu ssi $\lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$, d'où $\lambda \in \left\{-j, -\bar{j}\right\}$. Ainsi, $f = Ae^{-jx} + Be^{-\bar{j}x}$. Réinjeter donne $A\left(-\bar{j}\right) = B$ et $B(-j) = A$, ie (en moyennant) $A = C\sqrt{-j}$ et $B = C\sqrt{-\bar{j}}$ pour un C compelx., d'où les solutions (qui conviennent)
$$\begin{aligned} f &= C\left(\sqrt{-j}e^{-jx} + \sqrt{-\bar{j}}e^{-\bar{j}x}\right) \\ &= C\sqrt{x}\cos\left(\operatorname{Re} j \ln x - \frac{1}{2}\operatorname{Arg} j\right) \end{aligned}$$

(sol réelle ou complexes ?)

9 morphismes de groupes continus de R dans $GL_n(R)$

Pour $n=1$, on a exp.
soit f un tel morphisme.
Tout d'abord, $\operatorname{Im} f$ commute car $+$ de R est abélien.
Supposons f dérivalbe.
On dérive $f(a+b)=f(a)f(b)$ selon a, ce qui dnne $f'(a+b)=f'(a)f(b)$, mais aussi $=f(b)f'(a)$ en dérivant $f(a+b)=f(b)f(a)$; sym en a et b, donc vaut aussi $f(a)f'(b)$. On en déduit $f(a)f'(b)=f'(a)f(b)$, donc $f(a)^{-1}f'(a)=f'(b)f(b)^{-1}$. Faire $a=b$ montre que $f'(a)$ et $f(a)^{-1}$ commutent, d'où en réinjectant $f'(a)f^{-1}(a)$ indépendant de a, d'où $f'=Cf$ et $f=C'e^{C\,\mathrm{Id}}$.
Il reste à montrer que f est dérivable. En fait f est même C^∞ ! L'idée est d'intégrer en b (par exemple de u à v), d'où $f(a)=\left(\int_{u+a}^{v+a}f\right)\left(\int_u^v f\right)^{-1}$ qui est C^1 puisque f est C^0. Cela n'a de sens que si l'on peut trouver un intervalle $[u,v]$ tel que $\int_u^v f$ soit inversible. SI f est nulle, c'est impossible mais f est de toute façon C^∞. Sinon, $\det f$ est non nul en un point, mettos >0, donc reste >0 autour de ce point par continuité de f, d'où >0 en intégrant, CQFD.

10 Calcul Wronskien

$Y'=AY$, base de solution Y_i, $w=\det Y_i$?
Cp d'ed 1 ? ordrde 2 ?

$w'=\sum\det(Y_1,...,AY_i,...,Y_n)=(\operatorname{tr}A)\det(Y_1,...,Y_n)$ par lemme algèe classique, d'où $w=w(0)e^{\int_0^{\cdot}\operatorname{tr}A}$.
A est la mtrice compagnon des coeff, donc sa trace est le coef en $n-1$.
Pour $y''+qy=0$ w constnat.

PLUTOT SPE ENSUITE

11 Solution de norme constante

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que les solutions (définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $X'=AX$ ont (chacune) une norme constante ssi A est anti-autoadjointe.

Solution proposée.
Les solutions sont de la forme $t\mapsto Ce^{tA}$ où C est une constante de $\mathbb{K}$. Pour répondre à la question posée, on peut supposer[1] $C=1$.
Supposons A anti-autoadjointe. On peut alors calculer $\|X(t)\|^2=\operatorname{tr}\left[X(t)X(t)^*\right]$. Puisque l'adjonction commute à l'exponentiation[2], on en déduit

$$X(t)^*=\left(e^{tA}\right)^*=e^{(tA)^*}=e^{t^*A^*}\underset{t\in\mathbb{R}}{\overset{A^*=A}{=}}e^{-tA}=X(t)^{-1},$$

d'où $\|X(t)\|^2=\operatorname{tr}1$ indépendant de t.

[1] Toutes les solutions ont une norme constante ssi toutes les solutions *non nulles* ont une norme constante, *i. e.* ssi $|C|\left\|e^{At}\right\|$ est indépendant de t pour tout $C\neq0$, *i. e.* (divisant par C) ssi $\left\|e^{At}\right\|$ est indépendant de t.

[2] Fixons une matrice $M\in M_n(\mathbb{K})$: on veut dire

$$\left(e^M\right)^*=e^{(M^*)}.$$

Pour le montrer, on applique l'égalité $P(M)^*=P(M^*)$ valable pour tout polynôme P réel aux polynômes dont e^M est la limite, puis on prend la limite, l'adjonction étant continue car 1-lipschitzienne pour la norme 2 (c'est même une isométrie : $\|M^*\|_2=\|M\|_2$).

Pour la réciproque, on peut détailler le calcul de $\|X(t)\|^2$. Commençons par celui de

$$\begin{aligned} X(t)\,X(t)^* &= e^{tA}e^{tA^*} = \sum_{p\geq 0}\frac{t^p}{p!}A^p\sum_{q\geq 0}\frac{t^q}{q!}A^{*q} \\ \overset{?}{=} \sum_{p,q\geq 0} t^{p+q}\frac{A^pA^{*q}}{p!q!} &= \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{p+q=n}\binom{n}{p}A^pA^{*q}\right]\frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

L'interversion est permise car la famille $\left(t^{p+q}\frac{A^pA^{*q}}{p!q!}\right)_{p,q\geq 0}$ est sommable[3]. Par continuité de la trace[4], on en déduit

$$\|X(t)\|^2 = \sum_{n\geq 0}\operatorname{tr}\left[\sum_{p+q=n}\binom{n}{p}A^pA^{*q}\right]\frac{t^n}{n!}.$$

Il s'agit d'une série entière en t dont le coefficient en $\frac{t^n}{n!}$ serait $\operatorname{tr}\left[(A+A^*)^n\right]$ si A et A^* commutaient. Dire qu'elle est constante, c'est dire que tous ses coefficients sont nuls (à l'exception possible de celui en t^0), *i. e.* (lorsque A et A^* commutent) $\operatorname{tr}\left[(A+A^*)^n\right]=0$ pour tout $n\geq 1$, *i. e.*[5] $A+A^*$ nilpotente ; or, la matrice $A+A^*$ est auto-adjointe, donc sa nilpotence équivaut à sa nullité, d'où $A^*=-A$ comme voulu.

En fait, même sans l'hypothèse $AA^*=A^*A$, on peut montrer l'identité

$$\forall n\geq 1,\ \operatorname{tr}\sum_{p+q=n}\binom{n}{p}A^pA^{*q} = \operatorname{tr}\left[(A+A^*)^n\right],$$

laquelle suffit à notre bonheur. Il suffit de reprendre la démonstration par récurrence[6] de la formule du binôme de Newton, la propriété $\operatorname{tr} ab = \operatorname{tr} ba$ permettant de remettre les A et A^* dans un ordre qui va nous arranger. Les détails sont laissés au lecteur.

12 Théorème de Kalman

On propose ici un incursion en théorie du contrôle.

Soit $n,m\geq 1$, $A\in M_n(\mathbb{R})$, $B\in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $X:[0,T]\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $u:[0,T]\longrightarrow R^m$ tels que $X'=AX+Bu$.

Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1. pour tout choix de X_0 et X_1 dans R^n, il y a un u tq $X'=AX+Bu$ a une solution avec $X(t=0)=X_0$ et $X(t=T)=X_1$;
2. le rang de la matrice concaténée $[B]\,[AB]\,\left[A^2B\right]\cdots\left[A^{n-1}B\right]$ vaut n.

Supposons $X_0=0$ par linéarité. Alors $X(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds$.

1. Supposons $\operatorname{rg}[\cdot]<n$. Les n lignes sont donc liées, et en transposant on voit qu'il y a un vecteur ligne $L\neq 0$ tel que $0=LAB=LA^2B=\cdots=LA^{n-1}B$. Par Cayley-Hamilton, $LA^nB\in\operatorname{Vect}_{k<n}LA^kB$, donc $Le^AB=0$, et même $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ Le^{\lambda A}B=0$, d'où $LX(t=T)=0$ pour tout u ; impossible d'atteindre la valeur $X_1:={}^tL$ (sinon $L^tL=0$ et $L=0$, exclu)
2. Supposons que l'on ne controle pas les solutions. Alors les $X(T)=\int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)\,dt$ engendrent un sev strict de R^n quand u varie, donc leur orthogonal est non nul : soit L dedans. On a donc pour tout u :

$$L\int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)\,dt=0.$$

Prenons $u(t)={}^tB\ {}^te^{(T-t)A}\ {}^tL$. Alors

$$0=\int_0^T Le^{(T-t)A}B^tB\ {}^te^{(T-t)A}\ {}^tL\ dt=\int_0^T\left\|Le^{(T-t)A}B\right\|^2dt,$$

[3] Remontant les calculs ci-dessus, on majore sa somme par $e^{\|A\|}e^{\|A^*\|}$ pour toute norme d'algèbres.

[4] application linéaire en dimension finie

[5] *cf.* feuille 1 sur la réduction pour ce classique

[6] L'on rappelle à tout hasard que cette formule est une trivialité combinatoire, un corollaire du calcul général dans les anneaux (comment développer un produit de sommes). Quitte à faire une preuve qui n'apporte rien à la compréhension, autant pousser le degré de généralité plus loin, l'aspect combinatoire demeurant inchangé (et fondamental : il s'agit de piocher un élément dans chaque somme, d'en faire le produit et de sommer tous les produits ainsi obtenus).

d'où $Le^{(T-t)A}B = 0$ pour tout t. On dérive k fois en t puis on évalue en $t = T$, ce qui donne $LA^kB = 0$. Comme ci-dessus, on en déduit $\mathrm{rg}\,[\cdot] < n$.