Développements limités

Marc SAGE

6 mars 2006

Table des matières

1 Apéritif

1. *Donner un équivalent de* $\arctan(1+x) - \frac{\pi}{4}$ *lorsque* x *tend vers* 0.
2. *Donner un équivalent de* $\arccos$ *en* 1^-.

Solution proposée.

1. Dans ces problèmes d'équivalents avec autre chose que du produit, on écrit de vraies égalités avec des DL, puis on prend l'équivalent à la fin. Ici, un DL à l'ordre 1 conclut immédiatement :

$$\arctan(1+x) - \frac{\pi}{4} = \arctan 1 + x \arctan' 1 + o(x) - \frac{\pi}{4} = x\frac{1}{1+1^2} + o(x) \sim \frac{x}{2}.$$

Il est indispensable de voir cela graphiquement : autour du point $(1, \arctan 1)$, le graphe de arctan est approché par sa tangente de pente $\arctan' 1 = \frac{1}{2}$.

2. Une fonction réciproque ? On fait intervenir la fonction source, ici cos. On se place à gauche de 1, donc on regarde $\arccos(1-x)$. Il tend vers $\arccos 1 = 0$, donc on peut utililser le DL connu de cos en 0 :

$$1 - x = \cos\arccos(1-x) = 1 - \frac{\arccos(1-x)^2}{2} + o_{x\to 1}\left(\arccos(1-x)^2\right),$$

d'où $\arccos(1-x)^2 = 2x + o\left(\arccos(1-x)^2\right) \sim 2x$. Comme tout est positif, on peut prendre la racine et obtenir

$$\arccos(1-x) \sim \sqrt{2x}.$$

Encore une fois, c'est une évidence graphique lorqu'on se souvient que le graphe de arccos s'obtient à partir de celui de cos par une symétrie par rapport à la première bissectrice. Celui de cos étant approché en 0 par la parabole $y = \frac{x^2}{2}$, celui de arccos en $\cos 0 = 1$ doit l'être par la parabole $x = \frac{y^2}{2}$.

2 DL de tangente en 0

Donner un DL en 0 *de la fonction tangente à tout ordre. Procédez de même pour la tangente hyperbolique.*

Solution proposée.

Préciser tout d'abord que tan étant $\mathcal{C}^\infty$ autour de 0, on a bien l'existence d'un DL en 0 à tout ordre par Taylor-Young. Ensuite, pour obtenir effictivement ce dernier, il y a plein de manières de procéder. On peut :

i) calculer les dérivées n-ièmes de tan, les évaluer en 0 et appliquer Taylor-Young ;
ii) faire un quotient de DLs (selon les puissances croissantes) en écrivant $\tan = \frac{\sin}{\cos}$;
iii) utiliser le DL connu d'arctan, écrire $\mathrm{Id} = \tan\circ\arctan$ et invoquer l'unicité du DL ;
iv) intégrer la formule $\tan' = 1 + \tan^2$ pour faire une récurrence.

On va choisir la dernière méthode. Supposons connu pour $n \geq 1$ le DL de tan en 0 à l'ordre $2n-1$ (par imparité, tous les termes pairs du DL sont nuls) :

$$\tan x = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{2i-1} + o\left(x^{2n}\right).$$

Pour $n = 1$, on sait déjà que $\tan x = x + o\left(x^2\right)$, d'où $a_1 = 1$. On calcule ensuite $1 + \tan^2$:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^{2i-1} + o\left(x^{2n}\right)\right)^2 = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^{2i-1}\right)^2 + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n+1}\left(\sum_{i+j=k} a_i a_j\right) x^{2k-2} + o\left(x^{2n+1}\right), \end{aligned}$$

puis on intègre :

$$\tan x = x + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\sum_{i+j=k} a_i a_j}{2k-1} x^{2k-1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

On en déduit le coefficient à l'ordre supérieur :

$$a_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} \frac{a_i a_j}{2n-1}.$$

On obtient ainsi de proche en proche :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= \frac{1 \times 1}{3} = \frac{1}{3}, \\
a_3 &= \frac{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 1}{5} = \frac{2}{15}, \\
a_4 &= \frac{1 \times \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \times 1}{7} = \frac{\frac{12}{45} + \frac{5}{45}}{7} = \frac{17}{315}.
\end{aligned}$$

On pourra donc retenir

$$\tan x \underset{x \sim 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^8\right).$$

Pour la tangente hyperbolique, en supposant connu $\operatorname{th} x = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{2i-1} + o\left(x^{2n}\right)$ et en écrivant $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, on obtiendrait de même

$$b_n = \sum_{i+j=n} \frac{-b_i b_j}{2n-1}.$$

Or il est immédiat de vérifier que $(-a_n)$ satisfait la même relation que b_n, d'où

$$\operatorname{th} x \underset{x \sim 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^8\right).$$

Remarque. On aurait aussi pu dire que $\operatorname{th}(x) = \frac{\tan(ix)}{i}$ et substituer, ce qui donne l'alternance des signes caractéristique de la différence de comportement entre fonctions circulaires et hyperboliques (mais cela nécessite l'existence d'un DL dans $\mathbb{C}$, ce qui n'est pas immédiat avec les outils au programme).

Il est par ailleurs possible d'obtenir la formule close suivante :

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} \left(2^{2n} - 1\right)$$

où B_{2i} désigne le i-ième nombre de Bernouilli.

Les cinq exercices qui suivent montrent l'utilisation indolore des DLs dans des problèmes concrets souvent liés aux sommations.

3 Moyenne géométrique

Soit $x_1, ..., x_n$ des réels positifs et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des poids dans $]0,1[$ de somme $\sum \lambda_i = 1$. Montrer que

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \sqrt[\alpha]{\lambda_1 x_1^\alpha + ... + \lambda_n x_n^\alpha} = x_1^{\lambda_1} ... x_n^{\lambda_n}.$$

Solution proposée.

On écrit les puissances sous forme exponentielle pour faire proprement ses DLs :

$$\sqrt[\alpha]{\lambda_1 x_1^\alpha + ... + \lambda_n x_n^\alpha} = \left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{\ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)}{\alpha}}.$$

Travaillons le terme tout là-haut :

$$\sum \lambda_i x_i^\alpha = \sum \lambda_i e^{\alpha \ln x_i} = \sum \lambda_i \left(1 + \alpha \ln x_i + o(\alpha)\right) = \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1} + \alpha \sum \lambda_i \ln x_i + o(\alpha),$$

d'où (en prenant le logarithme)

$$\ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right) = \ln\left(1 + \alpha \sum \lambda_i \ln x_i + o(\alpha)\right) = \alpha \sum \lambda_i \ln x_i + o(\alpha).$$

Finalement, on a

$$\sqrt[\alpha]{\lambda_1 x_1^\alpha + ... + \lambda_n x_n^\alpha} = e^{\frac{\ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)}{\alpha}} = e^{\sum \lambda_i \ln x_i + o(1)} \longrightarrow e^{\sum \lambda_i \ln x_i} = \prod x_i^{\lambda_i},\ \textit{CQFD.}$$

Remarque. Ceci montre que la fonction $M(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i x_i^\alpha}$, dite *moyenne* d'ordre α des x_i pondérée par les λ_i, définie sur $\mathbb{R}^*$, se prolonge par continuité en 0. On peut montrer par des arguments de convexité[1] que la fonction M est strictement croissante si les x_i ne sont pas tous égaux (et constante sinon – pourquoi ?), puis que $\begin{cases} \lim_\infty M = \max x_i \\ \lim_{-\infty} M = \min x_i \end{cases}$. On en déduit une série d'inégalités $M(\alpha) \leq M(\beta)$ si $\alpha < \beta$ avec égalité ssi tous les x_i sont égaux.

On retiendra les encadrements suivants dans le cas où les λ_i sont tous égaux, ainsi que le nom des moyennes correspondantes :

$$\min x_i \leq \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}}_{\text{harmonique}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{x_1 ... x_n}}_{\text{géométrique}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + ... + x_n}{n}}_{\text{arithmétique}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}}}_{\text{quadratique}} \leq \max x_i$$

avec égalité (dans n'importe quel cas) ssi tous les x_i sont tous égaux.

Ces égalités sont fondamentales et extrêmement utiles ; il est regrettable qu'elles ne fassent pas plus souvent partie du baggage standard des taupins.

4 Un calcul de double-limite

On définit pour des entiers n et p

$$u_n^p := \left(\frac{\sum_{i=1}^p \sqrt[n]{1 + \frac{i}{p}}}{p}\right)^n.$$

Montrer que les deux limites $\begin{cases} \lim_{p\infty} \lim_{n\infty} u_n^p \\ \lim_{n\infty} \lim_{p\infty} u_n^p \end{cases}$ *existent et sont égales.*

Solution proposée.

1. Raisonnons d'abord à p fixé. En posant $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et $x_i = 1 + \frac{i}{p}$, on peut écrire

$$u_n^p = \sqrt[\alpha_n]{\frac{x_1^{\alpha_n} + x_2^{\alpha_n} + ... + x_p^{\alpha_n}}{p}}.$$

[1] *cf.* feuille sur les fonctions convexes

En remarquant que $\alpha_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, u_n^p tend (en n) vers la moyenne géométrique[2] des x_i, *i. e.*

$$\lim_n u_n^p = \sqrt[p]{x_1 x_2 ... x_p} = \sqrt[p]{\prod_{i=1}^{p} \left(1 + \frac{i}{p}\right)}.$$

Pour avoir la limite de ce dernier en p, nous voyons (au moins) deux possibilités.

La première (réflexe assez basique) consiste à prendre le logarithme pour se ramener à une somme

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{i}{p}\right).$$

On reconnaît alors une somme de Riemann, laquelle doit converger vers

$$\int_1^2 \ln = [x \ln x - x]_{x=1}^{x=2} = 2 \ln 2 - 1.$$

En repassant à l'exponentielle, on trouve finalement

$$\lim_{p\infty} \lim_{n\infty} u_n^p = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

La seconde méthode, plus débrouillarde, consiste à expliciter le produit :

$$\begin{aligned}
\sqrt[p]{\prod_{i=1}^{p} \left(1 + \frac{i}{p}\right)} &= \sqrt[p]{\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{p}\right) ... \left(1 + \frac{p}{p}\right)} \\
&= \sqrt[p]{\left(\frac{p+1}{p}\right)\left(\frac{p+2}{p}\right) ... \left(\frac{p+p}{p}\right)} \\
&= \sqrt[p]{\frac{(2p)!}{p! p^p}} = \frac{1}{p} \sqrt[p]{\frac{(2p)!}{p!}}.
\end{aligned}$$

Il reste à invoquer Stirling (*cf.* exercice 6) qui nous donne un équivalent de la factorielle :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Il faut également justifier le passage aux équivalents sous la racine p-ième, mais cela est évident car si $a_p \longrightarrow 1$ alors $\sqrt[p]{a_p} = e^{\frac{\ln a_p}{p}} \longrightarrow 1$. On obtient donc

$$\frac{1}{p} \sqrt[p]{\frac{(2p)!}{p!}} \sim \frac{1}{p} \sqrt[p]{\frac{\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{4\pi p}}{\left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}}} = \frac{1}{p} \sqrt[p]{\frac{2^{2p} p^p \sqrt{2}}{e^p}} = \frac{2^2}{e} \sqrt[p]{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{4}{e}.$$

2. Raisonnons à présent à n fixé. On reconnaît sous la racine n-ième une somme de Riemann, d'où

$$\sqrt[n]{\lim_{p\infty} u_n^p} = \int_1^2 \sqrt[n]{x} dx = \left[\frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2\sqrt[n]{2} - 1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

En reprenant la puissance n-ième, on obtient

$$\lim_{p\infty} u_n^p = \frac{\left(2\sqrt[n]{2} - 1\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Le terme du bas ne doit poser aucun problème ; si l'on ne sait pas qu'il tend vers e, on le retrouve très vite :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1 + o(1)} \longrightarrow e.$$

[2] *cf.* exercice précédent

Pour le terme du haut, le $2\sqrt[n]{2}-1$ sous la puissance tend vers 1, ce qui incite à DLifier :

$$2\sqrt[n]{2}-1=2e^{\frac{\ln 2}{n}}-1=2\left(1+\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1=1+\frac{2\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$\left(2\sqrt[n]{2}-1\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{2\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{n\left(\frac{2\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{2\ln 2+o(1)}\longrightarrow e^{2\ln 2}=4.$$

Finalement, on retrouve le $\frac{4}{e}$ de la première double-limite.

Remarque. Il est évidemment faux en général que l'on puisse intervertir de la sorte deux limites, même dans le cas où les deux limites existent. Considérer par exemple

$$u_n^p=\frac{\left(1+\frac{\ln n}{p}\right)^p}{n}.$$

À p fixé, la suite s'écrase vers 0 quand $n\longrightarrow\infty$, et donc la double-limite vaut 0. Mais pour un n donné, le numérateur tend vers $e^{\ln n}=n$, donc la double limité vaut 1.

Un contre-exemple plus simple serait

$$u_n^p=\frac{1}{1+\frac{n}{p}}.$$

5 Règle de Raab-Duhamel

Soit (u_n) *une suite réelle dont on connaît la variation :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\lambda}{n}+a_n$$

où λ *est un réel* >0 *et* a_n *une suite sommable (*i. e. $\sum|a_n|<\infty$*).*

Montrer qu'il y a une constante $C>0$ *telle que*

$$u_n\sim\frac{C}{n^\lambda}.$$

Solution proposée.

La méthode est classique.

Le problème revient à montrer la convergence de la suite $v_n=u_nn^\lambda$, *i. e.* de la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$. L'information dont on dispose portant sur le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, il est judicieux de passer au logarithme avant de considérer la série. En d'autres termes, on veut la convergence de $\ln\left(u_nn^\lambda\right)$, donc celle de la série

$$\sum\left[\ln\left(u_{n+1}(n+1)^\lambda\right)-\ln\left(u_nn^\lambda\right)\right]=\sum\ln\frac{u_{n+1}(n+1)^\lambda}{u_nn^\lambda}.$$

En utilisant l'information donnée, il vient

$$\begin{aligned}\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}+a_n\right)=-\frac{\lambda}{n}+a_n+O\left(\left(-\frac{\lambda}{n}+a_n\right)^2\right)\\ &= -\frac{\lambda}{n}+a_n+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\underbrace{O\left(\frac{a_n}{n}\right)}_{=O(a_n)}+O\left(a_n^2\right)\end{aligned}$$

où le grand O est pris quand $n\longrightarrow\infty$ vu que $\sum a_n$ converge et donc $a_n\longrightarrow 0$. Les termes a_n et $O(a_n)$ sont sommables par hypothèse et le $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ également car $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ par Riemann. Plus subtilement, a_n tend vers 0, donc $|a_n| < 1$ à partir d'un certain rang, d'où $a_n^2 < |a_n|$ et la sommabilité des a_n^2, ce qui montrer que le $O\left(a_n^2\right)$ est sommable.

Il reste le premier terme en $-\frac{\lambda}{n}$, mais il est tué par

$$\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lambda}\right) = \lambda \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit la convergence de $\ln\left(u_n n^{\lambda}\right)$ vers un $l \in \mathbb{R}$, d'où l'équivalent cherché $u_n \sim \frac{C}{n^{\lambda}}$ avec $C = e^l > 0$.

6 Formule de Stirling

Montrer qu'il y a une constante C telle que

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

et trouver C à l'aide des intégrales de Wallis.

Solution proposée.

On raisonne comme dans l'exercice précédent : on veut la convegence de $\sum \ln \frac{\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}}{(n+1)!}}{\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}}$. On a pris le logarithme avant de télescoper car tout va bien se simplifier au quotient :

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}}{(n+1)!}}{\frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}} &= \ln\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

qui est convergent, *CQFD*.

Pour trouver C, on se rappelle que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ où l'intégrale se calcule explicitement[3] par

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}\frac{\pi}{2}.$$

En réinjectant l'équivalent trouvé précédemment, on trouve

$$1 \sim \sqrt{\frac{4n}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \sim \sqrt{\frac{4n}{\pi}}\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \sim \sqrt{\pi n}\frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^{2n} C^2 n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{C}.$$

On en déduit la *formule de Stirling* :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

7 Un sytème dynamique (et une idée à retenir)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de zéro. On suppose que f admet un DL (en 0) de la forme

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \lambda x^a + o\left(x^a\right)$$

où $\lambda > 0$ et $a > 0$.

[3] *cf.* feuille d'intégration

1. *Montrer l'existence d'un voisinage de* 0 *où tout pour tout choix* u_0 *dans ce voisinage la suite récurrente* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* 0.
2. *Donner alors un équivalent de* u_n.
3. *Exemples ?*

Solution proposée.

1. Pour x assez petit, le petit o est borné par $\frac{\lambda}{2}|x|^a$, d'où l'encadrement (pour x positif)

$$1 - \frac{3\lambda}{2}x^a \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 - \frac{\lambda}{2}x^a.$$

Maintenant, pour x assez petit, le terme de gauche est positif. Prenons u_0 (non nul) dans ce voisinage positif. La condition $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{3\lambda}{2}u_n^a \geq 0$ assure que u_n reste positif, et l'autre inégalité montre que u_n décroît, donc converge vers un $l \geq 0$. Si l était non nul, on pourrait majorer

$$\frac{u_n}{u_0} = \prod_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{i-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{2}u_i^a\right) \leq \left(1 - \frac{\lambda}{2}l^a\right)^n \longrightarrow 0, \textit{ absurde.}$$

On ferait de même à gauche de 0.

2. Pour obtenir un équivalent de u_n, l'idée est de trouver une fonction φ gentille pour que la différennce $\varphi(u_{n+1}) - \varphi(u_n)$ admette une limite finie ; Cesàro permettra alors de conclure (sous réserve que l'on puisse remonter de $\varphi(u_n)$ à u_n).

On cherche dans un premier temps $\varphi = \mathrm{Id}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\lambda u_n^{a+1} + o\left(u_n^{a+1}\right).$$

La puissance $a+1$ nous dérange, on aimerait qu'elle soit nulle. Pour cela, on va choisir pour φ une fonction puissance $\varphi(x) = x^b$ avec b à choisir pour tuer la puissance $u_n^?$ à droite :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^b - u_n^b &= \left(u_n\left[1 - \lambda u_n^a + o(u_n^a)\right]\right)^b - u_n^b \\ &= u_n^b\left[1 - \lambda u_n^a + o(u_n^a)\right]^b - u_n^b \\ &= u_n^b\left[1 - b\lambda u_n^a + o(u_n^a)\right] - u_n^b \\ &= -b\lambda u_n^{a+b} + o\left(u_n^{a+b}\right). \end{aligned}$$

On prend naturellement $b = -a$, d'où

$$u_{n+1}^b - u_n^b = a\lambda + o(1) \longrightarrow a\lambda,$$

puis Cesàro nous donne la convergence de la moyenne

$$\frac{u_n^b}{n} - \frac{u_0^b}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u_{i+1}^b - u_i^b}{n} \sim a\lambda,$$

d'où $u_n^b \sim a\lambda n$ et $u_n \sim \sqrt[b]{a\lambda n}$, *i. e.*

$$u_n \sim \sqrt[a]{\frac{1}{a\lambda n}}.$$

3. Dans le cas $f = \sin$, on a $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$, donc $\lambda = \frac{1}{6}$ et $a = 2$, d'où $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Dans le cas $f = \ln(1 + \cdot)$, on a $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, donc $\lambda = \frac{1}{2}$ et $a = 1$, d'où $u_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Dans le cas $f = \mathrm{th}$, on a $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$, donc $\lambda = \frac{1}{3}$ et $a = 2$, d'où $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$.

Les trois exercices qui suivent contrastent avec les précédents : ils sont et se veulent calculatoires. Leur intérêt est donc essentiellement méthodique plus que présentant une facette intéressante de la mathématique.

8 Don't panic (but be prepared...)

Calculer

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{(\sin x)^{\tan x}-(\tan x)^{\sin x}}.$$

Solution proposée.

On ne panique pas devant une telle chose, mais on prend les termes un par un, on les DLifie à un petit ordre, et on prie pour ne pas devoir recommencer jusqu'à l'ordre 19 parce qu'on aurait obtenu une forme indéterminée jusqu'à l'ordre 18.

Bien sûr, on passe tout à l'exponentielle et on connait ses DLs de trigonométrie par cœur...

$$\begin{aligned}(\sin x)^x &= e^{x\ln\sin x} = e^{x\ln\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)\right)} = e^{x\ln x}e^{x\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)\right)}\\ &= x^x e^{-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)} = x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{\sin x} &= e^{\sin x\ln x} = e^{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)\ln x} = e^{x\ln x}e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+\overbrace{o\left(x^4\ln x\right)}^{=o\left(x^3\right)}}\\ &= x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^3\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sin x)^{\tan x} &= e^{(\tan x)\overbrace{\ln\sin x}^{\text{déjà fait}}} = e^{\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)\right)\left(\ln x-\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)\right)}\\ &= e^{x\ln x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)+\frac{x^3\ln x}{3}+o\left(x^4\ln x\right)} = x^x e^{\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}\\ &= x^x\left(1+\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tan x)^{\sin x} &= e^{\sin x\overbrace{\ln\tan x}^{\text{presque déjà fait}}} = e^{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)\left(\ln x+\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right)}\\ &= e^{x\ln x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)-\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^4\ln x\right)} = x^x e^{-\frac{x^3\ln x}{6}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}\\ &= x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right).\end{aligned}$$

Il on peut maintenant espérer faire tomber la limite (remarquer que le x^x se simplifie partout) :

$$\begin{aligned}\frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{(\sin x)^{\tan x}-(\tan x)^{\sin x}} &= \frac{\left(1-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{\left(1+\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)}\\ &= \frac{\frac{x^3\ln x}{6}+O\left(x^3\right)}{\frac{x^3\ln x}{2}+O\left(x^3\right)} = \frac{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)}{3+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)}\longrightarrow\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

9 Étude d'une somme de sinus

Calculer la limite de $\sum_{p=0}^{n}\sin\frac{p}{n}\sin\frac{p}{n^2}$.

Solution proposée.

On commence par linéariser les produits

$$\sin\frac{p}{n}\sin\frac{p}{n^2}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{p}{n}-\frac{p}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{p}{n}+\frac{p}{n^2}\right),$$

de sorte que la somme voulue s'écrit comme deux fois la partie réelle de

$$\sum_{p=0}^{n} e^{i\left(\frac{p}{n}-\frac{p}{n^2}\right)} - e^{i\left(\frac{p}{n}+\frac{p}{n^2}\right)}.$$

Pour évaluer ces deux sommes géométriques, il est plus aisé de sommer jusqu'à $n-1$:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \left[e^{i\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right]^p - \left[e^{i\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right]^p = \frac{e^{i\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}-1} - \frac{e^{i\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-1}.$$

Chacun des deux termes ci-dessus divergeant vers l'infini lorsque $n \longrightarrow \infty$ (leurs dénominateurs sont $\sim \frac{i}{n}$), on a affaire à une forme indéterminée (différence de deux infinis) : il faut donc DLifier pour préciser cette divergence. Comme l'on va avoir du $\frac{1}{n}$ au dénominateur, que l'on va tuer en multipliant par n en haut et en bas, il faut DLifier en haut jusqu'à du $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Prions pour que l'ordre 1 suffise :

$$\frac{e^{i\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}-1} = \frac{e^i\left(1-\frac{i}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1}{\frac{i}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{n}{i}\left(e^i-1\right)-e^i+o(1)}{1+o(1)} = \left(\frac{n}{i}\left(e^i-1\right)-e^i+o(1)\right)(1+o(1)).$$

Malheureusement, le $o(1)$ provenant du dénominateur va donner du $o(n)$ après développement par $\frac{n}{i}\left(e^i-1\right)$, ce qui est très inconvenant pour calculer des limites. Il faut par conséquent pousser le DL au dénominateur un ordre plus loin :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}-1} &= \frac{\left(e^i-1\right)-\frac{ie^i}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{i\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-ni\left(e^i-1\right)-e^i+o(1)}{1-\frac{1}{n}+\frac{i}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \left(ni\left(1-e^i\right)-e^i+o(1)\right)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{i}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left(1-e^i\right)\left(ni+i+\frac{1}{2}\right)-e^i+o(1).
\end{aligned}$$

On fait de même pour le second terme :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-1} &= \frac{\left(e^i-1\right)+\frac{ie^i}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{i\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-ni\left(e^i-1\right)+e^i+o(1)}{1+\frac{1}{n}+\frac{i}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \left(ni\left(1-e^i\right)+e^i+o(1)\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{i}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left(1-e^i\right)\left(ni-i+\frac{1}{2}\right)+e^i+o(1).
\end{aligned}$$

La différence vaut donc :

$$\frac{e^{i\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}-1} - \frac{e^{i\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{e^{i\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-1} = \left(1-e^i\right)2i-2e^i+o(1) \longrightarrow 2i-e^i(1+i).$$

En prenant la limite, la partie réelle, puis la moitié, on trouve

$$-\operatorname{Re}\left(e^i(1+i)\right) = -\sqrt{2}\cos\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \sin 1 - \cos 1.$$

Remarque. Le lecteur connaissant les sommes de Riemann pourra ici grandement apprécier leur efficacité. En effet, lorsque n est grand, le terme $\frac{p}{n^2}$ est majoré par $\frac{1}{n}$, donc proche de 0, de sorte que $\sin\frac{p}{n^2} \simeq \frac{p}{n^2}$, ce qui permet de réécrire la somme cherchée

$$\sum_{p=0}^{n} \sin\frac{p}{n}\sin\frac{p}{n^2} \simeq \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{p}{n}\sin\frac{p}{n} \longrightarrow \int_0^1 x\sin x dx = \left[-x\cos x\right]_0^1 + \int_0^1 \cos = -\cos 1 + \sin 1.$$

Par ailleurs, il n'est guère difficile de transformer le signe $\simeq$ en "la différence tend vers 0".

10 Une limite immonde

Soit $a > 0$ un réel. Déterminer

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right].$$

Solution proposée.

On s'occupe des deux termes séparément, en écrivant les puissances comme des exponentielles afin de faire des beaux DLs en $\frac{1}{x}$, le but étant d'obtenir une précision en $o(1)$ (on veut une limite).

On commence par écrire

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}} = x^{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}$$

afin de tout DLifier, et on regarde chacun des termes un à un.

$$x^{1+\frac{1}{x}} = xe^{\frac{\ln x}{x}} = x\left(1+\frac{\ln x}{x}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)\right) = x+\ln x+\underbrace{O\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{=o(1)}$$

puis

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} &= \exp\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right] = \exp\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\ &= \exp\left[\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1+\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

d'où le premier terme

$$\begin{aligned}(x+a)^{1+\frac{1}{x}} &= x^{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} = [x+\ln x+o(1)]\left[1+\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\ &= x+a+o(1)+\ln x+o(1) = x+\ln x+a+o(1).\end{aligned}$$

On s'occupe à présent du second terme :

$$x^{1+\frac{1}{x+a}} = e^{\left(1+\frac{1}{x+a}\right)\ln x}.$$

Il faut d'abord DLifier le $\frac{1}{x+a}$:

$$\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{a}{x}} = \frac{1}{x}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}x^{1+\frac{1}{x+a}} &= xe^{\frac{\ln x}{x+a}} = xe^{\frac{\ln x}{x}+O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)}\\ &= x\left(1+\frac{\ln x}{x}+O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)+O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)\right)\\ &= x+\ln x+\underbrace{O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)}_{=o(1)}.\end{aligned}$$

On peut donc conclure :

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} = [x+\ln x+a+o(1)] - [x+\ln x+o(1)] = a+o(1) \longrightarrow a.$$

On passe à présent à quatre exercices de déterminations d'équivalents, deux sur des sommes, deux sur des suites définies de manière implicite.

11 Un équivalent de puissances

Donner un équivalent de $1^n + 2^n + ... + n^n$.

Solution proposée.

On sent bien que c'est le n^n qui donne le ton. Pour y voir plus clair, simplifions par ce dernier et ordonnons par ordre décroissant (comme pour un développement asymptotique) :

$$\frac{1^n + 2^n + ... + n^n}{n^n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n + ... + \frac{1}{n^n}.$$

Comme $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{n\infty}{\longrightarrow} e^x$ pour tout réel x, il est raisonnable de penser que le membre de droite tend vers $1 + e^{-1} + e^{-2} + ... = \frac{1}{1-e^{-1}}$.

Tout réside en fait dans la *croissance*[4] de la suite $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ vers e^x.

À $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la quantité $\left(1 + \frac{\alpha}{t}\right)^t$ croît comme son logarithme $t \ln\left(1 + \frac{\alpha}{t}\right)$, donc (à la constante α prêt) comme $-\frac{\ln(1+u)}{u}$, dont le numérateur de la dérivée vaut $\ln(1+u) - \frac{1}{1+u}u = \ln(1+u) - 1 + \frac{1}{1+u}$

On en déduit que notre quotient $q_n := \frac{1^n+2^n+...+n^n}{n^n}$ croît (on ajoute des suites croissantes positives) et est borné par $1 + e^{-1} + ... + e^{n-1} \leq \frac{1}{1-e^{-1}}$, donc converge vers $\lim q \leq \sum_{i\geq 0} e^{-i}$. Par ailleurs, en ne gardant qu'un nombre fixe de termes dans le membre de droite, on obtient (à N fixé)

$$\begin{aligned} q_n &\geq \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n \overset{n\infty}{\longrightarrow} 1 + e^{-1} + ... + e^{-N}, \text{ d'où} \\ \lim q &\geq \sum_{i=0}^{N} e^{-i}, \text{ et ceci pour tout } N, \text{ d'où } \lim q \geq \sum_{i\geq 0} e^{i}. \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalent recherché :

$$1^n + 2^n + ... + n^n \sim \frac{e}{e-1} n^n.$$

12 Sur les exponenentielles

Donner un équivalent de $1 + n + \frac{n^2}{2!} + ... + \frac{n^n}{n!}$.

Solution proposée.

On trouve $\frac{e^n}{2}$.

Remarque. Les deux derniers termes se comportent en $\frac{n^n}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$ et donc sont négligeables devant la somme : ils ne pilotent pas tous seuls !

13 Étude d'une racine

Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + ... + x = 1$ *admet une unique solution positive* u_n *pour tout* $n \geq 1$, *que* u_n *converge vers un réel* l, *puis caractériser la convergence en donnant un équivalent de* $\ln(u_n - l)$.

Solution proposée.

[4] C'est un fait classique. Une manière élégante de le montrer est de dire que le logarithme $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est la moyenne de la fonction inverse sur $\left[1, 1 + \frac{1}{x}\right]$. Comme cette dernière décroît, la moyenne croît lorsqu'on rapetisse la borne supérieure de l'intervalle où elle est prise.

La fonction $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, vaut 0 en 0 et ∞ en ∞, donc est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même, d'où l'existence et l'unicité de u_n.

Il est de plus immédiat que u_n est décroissante :

$$P_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + P_n(u_n) = u_n^{n+1} + 1 \geq 1 = P_{n+1}(u_{n+1}).$$

Pour avoir u_n, on simplifie l'équation la définisssant :

$$u_n^n + u_n^{n-1} + ... + u_n = 1 \implies 1 - u_n^{n+1} = 2(1 - u_n) \implies u_n = 1 - \frac{1 - u_n^{n+1}}{2}.$$

Or $|u_n|$ est bornée pour $n \geq 2$ par $u_2 < u_1 = 1$, donc $u_n^{n+1} \longrightarrow 0$, d'où $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Pour passer au logarithme, on reprend l'expression ci-dessus et on isole le u_n^{n+1} ; en effet, c'est le seul terme que l'on ait négligé, et c'est lui qui contient l'information du DL :

$$\begin{aligned}
u_n^{n+1} &= 1 - 2(1 - u_n) = 2\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \\
\ln 2 + \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) &= (n+1)\ln u_n \\
\ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) &= (n+1)\ln\frac{1}{2} + o(n) - \ln 2 \\
\ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) &= -n\ln 2 + o(n).
\end{aligned}$$

On pourrait réécrire cela sous la forme

$$u_n = \frac{1}{2} + e^{-n(\ln 2 + o(1))},$$

ce qui montre que u_n s'approche de $\frac{1}{2}$ de manière exponentielle.

14 Encore des exponentielles

Pour un entier $n \geq 1$, on pose $P_n := 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^n}{n!}$.

1. *Montrer que P_n a au plus une racine réelle.*
2. *Soit a_n l'unique racine de P_{2n+1}. Montrer l'inégalité*

$$a_n + 2n + 1 \geq 0.$$

3. *En déduire un équivalent de a_n.*

Solution proposée.
Il est utile d'observer pour la suite les relations $P'_{n+1} = P_n = P_{n-1} + \frac{X^n}{n!}$.

1. Fixons un $n \geq 1$. Le polynôme pairs P_{2n} a pour limite ∞ en $\pm\infty$, donc atteint son infimum[5] en un a_n. Sa dérivée P_{2n-1} s'annule ainsi en a_n, ce qui permet simplifier le calcul de

$$\min P_{2n} = P_{2n}(a_n) = \underbrace{P_{2n-1}(a_n)}_{=0} + \frac{a_n^{2n}}{(2n)!} \geq 0.$$

On a même l'inégalité stricite, sinon $0 = P_{2n-1}(a_n) = P_{2n-1}(0) = 1$, ce qui montre que P_{2n} est toujours > 0. En d'autres termes, la dérivée de P_{2n+1} est > 0, donc P_{2n+1} est strictement croissante. Au vu des limites de ce polynôme impair, ce dernier doit s'annuler une et une seule fois sur $\mathbb{R}$. Sans oublier d'évoquer le cas de $P_0 = 1$, cela conclut.

[5] C'est un résultat classique : on conjugue par un homéomorphisme croissant pour ramener les intervalles infinis à des segments (*cf.* feuille sur la continuité).

2. Il s'agit de montrer que $P_{2n+1}(-2n-1) \leq 0$. On observe alors que

$$P_N(-N) = P_{N-2}(-N) + \underbrace{\frac{(-N)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{(-N)^N}{N!}}_{=0}.$$

Pour N impair, la fonction P_N croît, d'où l'inégalité

$$P_N(-N) = P_{N-2}(-N) \leq P_{N-2}(-(N-2)).$$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$P_N(-N) \leq P_1(-1) = 0, \ \textit{CQFD}.$$

3. En remarquant que les a_n sont négatifs (les P_n croissent sur $\mathbb{R}^+$ et démarrent à $P_n(0) = 1$), on étudie les P_n sur $\mathbb{R}^-$ lorsque n est grand. Pour un réel $x < 0$, la série $P_n(x)$ est alternée et converge vers e^x, ce qui permet d'encadrer e^x par $P_{2n-1}(x) \leq e^x \leq P_{2n}(x)$. Pour faire apparaître du $b_n := a_{n-1}$ aux puissances $2n$ et $2n+1$, on encadre plutôt par $P_{2n+1}(x) \leq e^x \leq P_{2n}(x)$, ce qui donne

$$0 + \frac{b_n^{2n}}{(2n)!} + \frac{b_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^{b_n} \leq 0 + \frac{b_n^{2n}}{(2n)!}.$$

Divisant par le terme de droite, il vient

$$1 + \frac{b_n}{2n+1} \leq \frac{e^{b_n}}{b_n^{2n}}(2n)! \leq 1.$$

On utilise la question précédente pour minorer le membre de gauche par $\frac{2}{2n+1}$ (et faire disparaître b_n), puis on prend le logarithme :

$$\ln 2 - \ln(2n+1) \leq b_n - 2n \ln|b_n| + \ln[(2n)!] \leq 0$$

On invoque alors le développement de Stirling pour traiter le $\ln[(2n)!]$:

$$\ln N! = \ln\left[\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N (1 + o(1))\right] = N \ln N - N + o(N),$$

ce qui donne (en simplifiant par $N := 2n$ pour retomber sur un $o(1)$, et c'est pour cela que l'on a arrêté le développement ci-dessus à un $o(N)$)

$$o(1) \leq \frac{b_n}{2n} - \ln|b_n| + \ln(2n) - 1 \leq 0.$$

On en déduit que le terme $\frac{|b_n|}{2n} + \ln\frac{|b_n|}{2n}$ tend vers -1. Or, l'application $\mathrm{Id} + \ln$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$, donc $\frac{|b_n|}{2n}$ vers l'unique antécédent de -1, mettons λ (qui vaut environ $0,28$). Il en résulte

$$a_n \sim b_n = -|b_n| \sim -2\lambda n.$$

Remarque. On retiendra de cet exercice que, même si un encadrement ne prend pas parfaitement le terme étudié en sandwich (même limite des deux côtés), tout n'est pas perdu car cela peut le devenir après simplification ultérieure (ici, après division par n).

On termine cette feuille par un joli théorème portant sur les fonctions réelles.

15 Un joli problème

Soit a et b deux entiers ≥ 1 premiers entre eux et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que f^a et f^b sont C^∞. Montrer que f est C^∞.

On pourra redémontrer le lemme suivant : une fonction φ C^∞ telle que $\varphi(x) \sim x^n$ quand $x \to 0$ avec $n \geq 1$ s'écrit $\varphi(x) = x^n A(x)$ avec A de classe C^∞. On admettra[6] *pour cela qu'une fonction φ C^∞ nulle en zéro s'écrit $\varphi(x) = x\psi(x)$ avec ψ de classe C^∞.*

Solution proposée.

Commençons par montrer le lemme par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat admis conclut. Supposons le lemme prouvé pour un $n \geq 1$ et soit $\varphi(x) \sim x^{n+1}$ de classe C^∞. Alors le résultat admis montre que $\varphi(x) = x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \sim x^{n-1}$ de classe C^∞, d'où par récurrence un χ C^∞ tel que $\psi(x) = x^{n-1}\chi(x)$. On en déduit $\varphi(x) = x^n\chi(x)$ avec χ C^∞, *CQFD.*

Revenons à notre problème.

Bézout nous donne des entiers $u, v \in Z$ tels que $au + bv = 1$, d'où $f = (f^a)^u \left(f^b\right)^v$ est C^∞ au voisinage de tout point x où $f(x) \neq 0$ (attention, u et v peuvent être négatifs...). Soit à présent x_0 un point où f s'annule. On prend $x_0 = 0$ pour simplifier par la suite.

f^a est C^∞ au voisinage de 0, donc admet un DL à tout ordre. Si tous les coefficients du DL sont nuls, f^a est nul au voisinage de 0, donc f aussi, d'où f C^∞ au voisinage de 0 et le problème est réglé.

Sinon, l'on dispose d'un équivalent $f(x)^a \sim \lambda x^\alpha$ pour un $\lambda \neq 0$ et $\alpha \geq 1$. Le lemme appliqué à $\varphi = f^a$ permet alors d'écrire $f(x)^a = \lambda x^\alpha A(x)$. On peut aussi l'appliquer à f^b (si son DL en 0 n'est pas nul), ce qui permet d'écrire $f(x)^b = \mu x^\beta B(x)$ avec $\mu \neq 0$, $\beta \geq 1$ et B de classe C^∞. En mélangeant les deux équivalents, on trouve

$$\lambda^b x^{b\alpha} \sim \left(f(x)^a\right)^b = f(x)^{ab} = \left(f(x)^b\right)^a \sim \mu^a x^{a\beta},$$

d'où $b\alpha = a\beta \implies \left\{\begin{array}{l} a \mid b\alpha \\ b \mid a\beta \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} a \mid \alpha \\ b \mid \beta \end{array}\right.$: notons d l'entier $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} \geq 1$.

En reprenant nos deux égalités $\left\{\begin{array}{l} f(x)^a = \lambda x^{da} A(x) \\ f(x)^b = \mu x^{db} B(x) \end{array}\right.$, on voit que $\left(\frac{f(x)}{x^d}\right)^a$ et $\left(\frac{f(x)}{x^d}\right)^b$ convergent en 0 vers $\lambda A(0)$ et $\mu B(0)$ respectivement, lesquels sont *non nuls* (remarquer que $A(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)^a}{\lambda x^\alpha} = 1$). Comme a ou b est impair (sinon ils ne seraient pas étrangers), on peut prendre la racine a-ième ou b-ième et en déduire que l'expression $F(x) := \frac{f(x)}{x^d}$ est définie et non nulle au voisinage de 0.

Nous avons donc une nouvelle fonction F qui satisfait les hypothèses de l'énoncé : $F^a = \lambda A$ et $F^b = \mu B$ sont C^∞ et ne s'annulent pas en 0, donc F est C^∞ au voisinage de 0 par Bézout, d'où $f(x) = x^d F(x)$ de classe C^∞ au voisinage de 0, *CQFD.*

[6] Un moyen élémentaire de voir ce cas particulier du lemme d'Hadamard est décrire

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \int_0^x f'(t)\,\frac{dt}{x} = \int_0^1 f'(ux)\,du$$

qui est C^∞ sous le signe intégral.