Intégration
(version chantier)

Marc SAGE

17 mars 2006

Table des matières

1 Exo irrationalité de π **2**

2 CAUCHY SCHWARZ **3**

3 intégrales des fonctios en escalier **4**

4 Intégrales des fonctions réglées **4**

5 Primitives & Intrégrales **4**

6 Calcul de primitive **5**

7 TI, EulerMaclaurin, applications **6**
7.1 TI 6
7.2 Bernoulli (gaffe à l'orthographe) 6
7.3 Euler MacLaurin, reste I ou L 7
7.4 Approximation de l'intégrale : sommes de Riemann, methode des trapèzes, de Simpson, de Romberg 8

8 Défintion intégrale de Riemann **9**
8.1 Subdivisions et sommes de Darboux 9
8.2 Subdivisions pointées et sommes de Riemann 10
8.3 Fonctions réglées 11

9 Intégrales impropres **13**

10 Intégrale généralisée **13**

11 INfinité de nombres premiers **13**

D'où vient le symbole d'intégration $\int$?

Ce symbole est dû à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). C'est un S allongé, car une intégrale est une somme (summa en latin).

Rq : la notation $\int_a^b f(x)\,dx$ a été proposée par Fourier et entérinée par Cauchy (source bourbaki)

Intro : disstance parcoure sur un trajet à vitese constante, puis deux palliers, puis n, puis cas général.

interprétation physique de la notation $\int f(x)\,dx$. vers les sommes de Riemann (o plutot d'Eudoxe-Archimède vu qye c'est une méthode d'exhasution !)

EN fait, Cauchy définit l'intégrale des fonctions *continues* sur un segment, d'où plus généralment l'intégrales des fonctions réglées.

Mais il y a le pb des points où la fonctio oscille beaucoup –> Riemman a l'idée de les enfermer dans des segments de longuurs abitrairment petites. En termes moderne, f est RiemanL^1 si $\forall\varepsilon\ \exists e, E$ esclaier tq $e\leq f\leq E$ et $\int(E-e)<\varepsilon$.

Lien Rieman intégrable Lebesgue intégable (chambert loir)

généraliser et proposer tout de suite l'intégrale de Denjoy-truc much qui généralise Lebesgue.

CALCUL DE PRIMITIVE ouvrier les yeux pour voir si ya une dérivée qui traine dans le coin. Sinon, généralent poser le truc qui emmerde marhce (eg : $\int\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ je crois...)

IPP : pourquoi ce nom ? Peut-être parce que $[fg]'$ comporte deux parties...

Marche pour n'importe quel autre forme bilinéiare continue.

attnetino à ne pas revenir en arrière !

mettre les différentielles pour bien voir qui on dérive (eg $\begin{matrix} f & dg \\ df & g\end{matrix}$)

EG 1 : Pour calculer l'aire d'un cercle, ie $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$, , une ipp donne $[]+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=0-I+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, d'où une équation en I (idem pour $e^{\arccos x}$). On arait aussi pu poser $x=\sin\theta$.

pour ipp sucessives, préférer le diagramme avec des flèches

EG : produit de cos et sin, poly contre expon.

$\int$ est une forme linéaire : pourqoui pas une évalution ? argument pipo : c'est un somme continue de $\sum x_i^*$. On sait qu'en dim inifnie, une telle forme lineare n'est pas un a^*.

1 Exo irrationalité de π

supposns $\pi=\frac{\alpha}{b}$. Posons $p_n=\frac{x^n}{n!}(bx-a)^n$ et $I_n=\int_0^\pi p_n(x)\sin x\ dx$.

Mq I_n enteir tend vesr 0.

$x(bx-a)$ parabole ayant max$M$, donc $I_n\leq\int\frac{M^n}{n!}\longrightarrow 0$.

Par ailleurs, faire $2n+1$ iip donne I_n comme somme de crochet de $p_n^{(k)}$ sinoucos entre 0 et π. Il suffit donc que mq $p_n^{(k)}(0,\pi)\in Z$. Or, 0 et π sont racine d'ordre$n$, donc ok juqu'à dérivée $n-1$ incluse. Lemme : si $R:=bX-a$, alors $(R^n)^{(p)}=n^{p\downarrow}b^pR^{n-p}$Audelà, mq dérivées à coef enteir. il suffit del e motrer pour

$$p_n^{(n)}=\left[\frac{X^nR^n}{n!}\right]'=\frac{1}{n!}\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}n^{\downarrow p}X^{n-p}\ n^{q\downarrow}b^qR^{n-q}$$

Or les coef font $\frac{n^{\downarrow p}}{p!}$ et $\frac{n^{\downarrow q}}{q!}$ entiers, CQDF.

(autre idée : $p_n\in\sum_{d\geq 0}\frac{X^d}{d!}Z[X]$ qui est stable par dérivation (le vérifier sur les $\frac{X^d}{d!}P$), donc toutes les valeurs en 0 sont entières)

Alors $I_n$nulle, donc l'ntétgande ets nulle, *absurde*.

2 CAUCHY SCHWARZ

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ à valeurs strictement positives. On note

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha := \min f \\ A := \max f\end{array}\right., \left\{\begin{array}{l}\beta := \min g \\ B := \max g\end{array}\right., \lambda := \sqrt{\frac{\alpha\beta}{AB}}.$$

Il s'agit de montrer la double inégalité

$$1 \overset{(I)}{\leq} \frac{\left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right)}{\left(\int fg\right)^2} \overset{(II)}{\leq} \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

rq : le terme de droite est $M_{\frac{1}{2}}\left(x, \frac{1}{x}\right)$ avec $x := \lambda^2$.

Solution proposée.

On rappelle que Cauchy-Schwarz peut se montrer de la manière suivante :

$$(I) \iff 1 \leq \frac{\int f^2 \int g^2}{\left(\int fg\right)^2} \iff \left(\int fg\right)^2 - \int f^2 \int g^2 \leq 0.$$

Cette dernière expression est le discriminant (réduit) du trinôme

$$\left(\int f^2\right) X^2 - 2\left(\int fg\right) X + \int g^2$$

qui se factorise en

$$\int \left(f^2X^2 - 2fgX + g^2\right) = \int (fX - g)^2$$

qui est toujours de même signe sur $\mathbb{R}$, donc le discrimianant considéré est ≤ 0.

Regardons à présent la seconde inégalité. :

$$\begin{aligned}(II) \quad &\iff \quad \frac{\int f^2 \int g^2}{\left(\int fg\right)^2} \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta}{AB}} + \sqrt{\frac{AB}{\alpha\beta}}\right)^2 \\ &\iff \quad 4\frac{\int f^2 \int g^2}{\left(\int fg\right)^2} \leq \alpha\beta AB\left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{AB}\right)^2 \\ &\iff \quad \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{AB}\right)^2\left(\int fg\right)^2 - 4\frac{1}{\alpha\beta AB}\int f^2 \int g^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ceci est exactement l'expression du discriminant du trinôme

$$\frac{1}{\alpha A}\left(\int f^2\right) X^2 - \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{AB}\right)\left(\int fg\right) X + \frac{1}{\beta B}\left(\int g^2\right).$$

On a choisi de regrouper tous les termes "en" a ensemble et tous les termes en b ensemble afin de faire apparaître les fonctions "réduites"

$$\begin{array}{ll}\varphi := \frac{f}{A} & \psi =: \frac{g}{B} \\ \Phi := \frac{f}{\alpha} & \Psi =: \frac{g}{\beta}\end{array}$$

(un peu de sens physique ne fait pas de mal...), lesquelles vérifient clairement

$$0 < \varphi, \psi \leq 1 \leq \Phi, \Psi.$$

Notre trinôme s'écrit alors de façon plus consise

$$T = \int \left[\varphi\Phi X^2 - (\Phi\Psi + \varphi\psi) X + \psi\Psi\right].$$

On veut montrer que T a un discriminant ≥ 0. Puisque son coefficient dominant est positif, il suffit d'exhiber un point particulier où le trinôme est négatif. Compte tenu de la décomposition ci-dessus, on essaie immédiatement $X = 1$:

$$T(1) = \int (\varphi\Phi - \Phi\Psi - \varphi\psi + \psi\Psi) = \int \underbrace{(\Phi - \psi)}_{\geq 0}\underbrace{(\varphi - \Psi)}_{\leq 0} \leq 0, \ CFQD.$$

3 intégrales des fonctios en escalier

Pour f esclaier, $\int_\sigma f$ indpe de σ adaptée (passer par $\sigma \cup \tau$)
INCHANGE par nombre fini de valeurs
EG : χpartie finie
linaire, Chasles, inég trinagu, positivité

4 Intégrales des fonctions réglées

pour les fonctions réglées : soit $f = \lim f_n$. On montre que $\int f_n$ de Cauchy, donc cv. Ensuite, si $f = \lim g_n$, on pose $h_n = f_n$ ou g_n selon parité de n. Alors $h_n \longrightarrow f$, donc $\lim \int f_n = \lim \int h_{2n} = \lim \int h_{2n+1} = \lim \int g_n$.

TH : si f_nCU, alors $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. (si f_n réglée)
On pose $\int_{[a,b]} := \int_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}}$
Attnetino à inéga traingu l : $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$ si $a > b$!!!

Donner l'aire d'un rectangle, d'une triangle (fonctions affines), d'un cercle

5 Primitives & Intrégrales

deux pritive diffèrent d'une constante **sur un intervalle**.
EG : $\frac{1}{\cdot}$ se primitive en ln, mais aussi en $\ln + A$ sur R^{++} et $\ln|\cdot| + B$ sur R^{-*}
-> AUTNAT DE CONSTANTES QUE D'INTERVALLES

Soit f loc réglée : alors $\int_a^\cdot f$ CO car loc $\|f\|$-lip
si f C0 en x, $\int_a^\cdot f$ dérivalb en x et sa déviée vvaut $f'(x)$ (le voir sur un **dessin** : la variation d'aire est proportionelle à la valeur de la fonction)
COR : si f C0, $\int_a^\cdot f$ ets l'unique primitive de f qui s'annule en a
COR : si f CO et $F' = f$, alors $\int_a^b f = f(b) - f(a)$ (dem : $\int_a^\cdot f$ uniqu primive nulle en a, donc $= F + C$;évaluer en$b$ conclut)
COR : f C^1 => IAF (même si valeurs pas réelles : il faut C^1 pour la démo, mais vrai en général)
EG : $\left|e^{ia} - e^{ib}\right| \leq |a - b|$

EXO : f CO additive de Rd ans R : on écrit $f(x) + \int_0^1 f = \int_0^1 f(x+y)\,dy = F(x+1) - F(x)$ C^1, donc f D1 : dérive en x => $f'(x+y) = f'(x)$, puis $x = 0$ => f' cst => f affine => f linéaire.
EXO : morphismes de $R, +$ dans GL_n ?

f réelle T-périodique réglée => $\int_a^{a+T} f$ idspn de a
(le faire pour f en escalier, puis prendre la limite : si f CO, démo simple : dériver)

changement de variable : si φ C^1 sur $[a,b]$ et f C^0_{pm} sur $\operatorname{Im}\varphi \cup [\varphi(a), \varphi(b)]$, alors

$$\int_a^b f \circ \varphi \times \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

(démo : soit F rpimitive de f, alors $F \circ \varphi$ primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$)

interprétation : on déroule un pinceau sous l'intégrale, φ donne juste la vitesse du pinceau, au final on aura toujours peint la même surface.

bien noter que φ n'a pas de raison d'être bijective !

En pratique, lorsque φ est un difféo, on poser $y = \varphi(x)$, on différentie à la physicienne (les dérivées sont remplacées par des dx et dy), et on substitute tout : en particulier, comme on fait $x \mapsto \varphi(x)$, on doit faire aux bornes $a \mapsto \varphi(a)$ et $b \mapsto \varphi(b)$.

ATTENTION : si l'on fait un CDG implicite, du genre $x = \psi(y)$, il faut (pour appliquer ce qui précède) faire appaître du ψ', donc il faut diviser par ψ', lequel ne doit donc pas s'annuler : on *doit* avoir un C^1-difféo. (sinon la différentation à la physicienne n'est pas juste : eg de $\int_0^4 \sin$)

lien entre intégrale sur un cercle et sur un segment : $\int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta = -i \int_{-1}^1 f$

intégrale vitale : $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ki\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_0^k$, $\int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$

Leme lebesgue : si θ' C^1 ne s'annule qu'en un nombre fini de points (EG : $\theta = \mathrm{Id}$), alros $\int_a^b f e^{ni\theta} \longrightarrow 0$.

(démo : Suppsons $\theta'(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On coupe l'intégrale en deux, un bout proche de 0 qu iest un $O(\varepsilon)$, l'autre loin qui par une IPP est un $o(1)$ (présence d'un $\frac{1}{ni}$) à condiion que $\frac{f}{\theta'}$ et sa dérivée soient bornées, ok si f C^1 et θ C^2. Puis on approche f L^1 par C^1).

formule de la moyenne : soit $\omega \geq 0$ un poids non nul : alors $\exists c,\ f(c) = \frac{\int_a^b f\omega}{\int_a^b \omega}$.

EG : $\omega = 1$.

6 Calcul de primitive

primitives classique : graphe pour retenir domaines pour retenir radical $\sqrt{\pm 1 \pm x^2}$

Si $a = \alpha + i\beta$, on a $\int \frac{1}{t-a} = \frac{1}{2} \ln\left[(t-\alpha)^2 + \beta^2\right] + i \operatorname{atn} \frac{t-\alpha}{\beta}$

Pour $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{atn}\left(\frac{x}{a}\right)$, retenir le $\frac{1}{a}$ car l'intégrale depuis 0 explose qd a tend vers 0 (on intégrès du $\frac{1}{x^2}$)

Explication des *règles de Bioche* : on a le lemme $K(X,Y) = K\left(X^2, Y\right) + XK\left(X^2, Y\right)$ (séparer pusisances paires et impairs)

Ainsi, une fraction rationeen en cos et sin s'écrit $f = R(\sin) + \cos S(\sin)$.

Alors $f(\pi - t) = R(\sin) - \cos S(\sin)$, donc $R(\sin) = 0$ ssi $f(\pi - t)\, d(\pi - t) = f(t)\, dt$.

DE même, f s'écrit $R(\cos) + \sin S(\cos)$, donc $R(\cos) = 0$ ssi $f(-t)\, d(-t) = f(t)\, dt$.

Enfin, f s'écrit $R(\tan) + \cos S(\tan)$, donc $R(\tan) = 0$ ssi $f(\pi + t)\, d(\pi + t) = f(t)\, dt$.

idem en hyper, ou alors se ramner à fracion en e^x –> idem avec sin cos ?

si rien, angle moitié (d'aillers, bioche tan ets la meme chose !)

intégrale abéliennes $R(x, f(x))$ où la courbe $(t, f(t))$ est paramétrable en cartésienne par des trucs dont on sait primiter les fractions rationneles (fractions rationalles en t ou fonctions trigo), : alors le bon CDV donne une primitive de fraction rationnelles.

CP : graphe est inclus dans courbe algébrique (=zéros d'un polynôme à deux variables). Une telle courbe paramété par deux trucs de $\mathbb{R}(X)$est dite *unicursale.*

CEG : $y^2 = x^3 + px + q$, donc on ne regardera pas les radicaux de poly de deg 3

EG : $f(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On paramètre par l'ordonnée, ie on fait le CDV $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

EG : $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

On se ramène à $\sqrt{\pm 1 \pm x^2}$, dont les graphe associe sont cercle ou hyperboles, paramétrables par *$\cos\sin$ ou $\operatorname{ch}\operatorname{sh}$ classiques *pente d'une droite par un point fixe : cercle $\sqrt{1-x^2}$ donne $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)$, hyperbole donne $\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)$ ou inverse

* pour les hyperboles, ordonnée à l'orgine de droite parallèe aux asymptotes, ce qui donne $\left(\frac{1-t^2}{2t}, \frac{1+t^2}{2t^2}\right)$

RQ : si deux racines réelles,on factorisse l'une et on fait apparitr un $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ce qui ramène à cidessus.

CF Gourdon pour stuss calcul et EG

Théorème Liouville Ostrogradski

Une *dérivation* sur un anneau est un endomorphisme δ du groupe additif A tq $\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b)$. On parle alors d'*anneau différentiel*. EG : $K[X]$, $C^\infty(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{O}(U, \mathbb{C})$

On ne regarde à présent que des **corps** différentiels de **carac nulle**, EG sous-corps des foncions méromorphes sur un ouvert de C.

Une *extension différentielle* $K \hookrightarrow L$ est une exntesion tq $(\delta_L)_{|K} = \delta_K$.

Un *élément* $y \in L$ est l'*exponentielle* d'un $x \in K$ si $y' = xy$, *logarithme* si $y' = \frac{x'}{x}$.

Une extension différentielle $K \hookrightarrow L$ est *élémentaire* si $L = K(x)$ avec x algébrique sur K ou x exp ou ln de K et si même corps des constantes.

Une application est dite *élémentaire* s'il elle appartient à une tour d'extension élémentaire de $C(z)$.

TH Liouville (admis) *: pour f et $g \in C(z)$, $\int fe^g$ est élémentaires si $\exists r \in C(z)$, $f = r' + rg'$*

En partculier, fe^g *est la dérivée de* re^g qui est obtenue en rajoutant e^g à $C(z)$ (on na besoin que d'une seule extenion)

EG : e^{z^2}, $\frac{e^z}{z}$. (donc $\frac{\sin z}{z}$? ? ? ?) n'est pas élémentaire.

DEM Sinon $1 = r' + 2zr$ où n'est pas un polynôme, donc a un pôle α, donc $r' + 2zr$ aussi, absurde. De même, si $\frac{1}{z} = r' + r$, r a un pole d'ordre ≥ 1, donc $r' + r$ a un pole d'ordre $k + 1 \geq 2$, absurde

7 TI, EulerMaclaurin, applications

7.1 TI

TI $f(a+t) = \sum_0^n f^{(k)}(a) \frac{t^{k!}}{k!} + \int_a^{a+t}$
bla bla par IPP récurence, deux intégrales possibles

DOnner une n-imèe primitive successive par TL.

on peut intégreg avec une constante différente, d'où les polynômrd de Bernoulli qui apparaissent au lieu des $\frac{X^n}{n!}$ —> torcher le joli problème intégration/convexité avec

APP TL : *soit f C^∞dont toutes dérives bornées par un même polynome de degré impair. mq $f = 0$. Généraliser et donner un contre-exemple.*

Dem : P a une racine λ, on fait un DL autour de λ : $f(x) = \sum_{0 \leq n < d} f^n(\lambda) \frac{(x-\lambda)^n}{n!} + f^d(?) \frac{(x-\lambda)^n}{n!} = f^d(?) \frac{(x-\lambda)^n}{n!}$. Or, à x fixé, P est borné sur le compact $[x, \lambda]$, donc $f(x) \leq \max P \frac{|x-\lambda|^n}{n!} \longrightarrow 0$.

GEn : il suffit que P s'annule.

CEG : cos et 1 ("seul" ceg possible pour poly cst –> source ? ? ?)

7.2 Bernoulli (gaffe à l'orthographe)

On définit une suite (α_n) de fonction 1-périodiques par $\alpha'_{n+1} = \alpha_n$ et $\int_0^1 \alpha_n = 0$ et $\alpha_0 = 1$ sur $[0, 1[$ prolongées sur $\mathbb{R}$ (il correspondent aux $\alpha_n := \frac{\widetilde{B}_n}{n!}$ où $\widetilde{B}_n$ est la fonction 1-périodiqu coincidant avec le polnôme de Bernoulli B_n sur $[0, 1[$).

On a $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = X - \frac{1}{2}$, $\alpha'_n = \alpha_{n-1}$ sur $R \backslash Z$ et $\alpha_n(1) = \alpha_n(0)$ noté A_n pour $n \geq 2$.

ATETNON : les α_n sont tous continus à l'exceptino de α_1 !

7.3 Euler MacLaurin, reste I ou L

pour f C^p, mq

$$\int_0^1 f = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_2^p A_k \left[f^{(k-1)}\right]_0^1 + (-1)^p \int_0^1 \alpha_p f^{(p)}.$$

DEMDes ipp sucessivies donnent

$$\int f = [f\alpha_1] - [f'\alpha_2] + \cdots + (-1)^{p-1}\left[f^{(p-1)}\alpha_p\right] + (-1)^p \int f^{(p)}\alpha_p$$

et il suffit de vérifier que $[f\alpha_1] = f(1)\alpha_1(1^-) - f(0)\alpha_1(0^+) = f(1)\frac{1}{2} - f(0)\left(-\frac{1}{2}\right)$, puis que les α_k pour $k \geq 2$ donnent la même valeur évalué en 0 et 1. Pour le signe, vue la nullité des A_k pour $k \geq 2$ impair, on peut remplacer les $(-1)^k A_k$ par A_k.

RQ : il est tentant de faire apparaitre le terme $\frac{f(1)-f(0)}{2}$ de la somme (pour $k=1$) mais il joue un role particulier vu la discontiniué de α_1.

Pourvu qu'on sache convenablement majorer le reste, EML donne valeur approchée d'une intégrale sur un segment (faire changement de variable affine).

On rappelle au besoin

$$\forall k \geq 2 \text{ pair, } A_k = -2\frac{\zeta(k)}{(2\pi i)^k},$$

d'où l'encadrement (car $\zeta(k) \leq \zeta(2) \leq 2$)

$$\frac{2}{(2\pi)^k} \leq A_k \leq \frac{4}{(2\pi)^k} \text{ pour } k \geq 0 \text{ pair.}$$

Ainsi, pour $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned} |\alpha_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\sum_0^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!}\frac{4k!}{(2\pi)^k}\binom{n}{k} \\ &= \frac{4}{(2\pi)^n}\sum_{k=0}^n \frac{(2\pi)^{n-k}}{(n-k)!} \leq \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^n}. \end{aligned}$$

D'où une mjoration du reste intégral $(-1)^p \int_0^1 \alpha_p f^{(p)}$ par $\frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^p}\left\|f^{(p)}\right\|_\infty$.

Mieux si f ets à valeurs **réelles**. On montre que les $\alpha_{2n} - A_{2n}$ sont de signe constant, donc on peut appliquer la preilère formule de la moyenne pour p pair :

$$\begin{aligned} \int \alpha_p f^{(p)} &= A_p \int f^{(p)} + \int (\alpha_p - A_p) f^{(p)} \\ &= A_p \int f^{(p)} + f^{(p)}(x) \int (\alpha_p - A_p) \\ &= A_p\left(\left[f^{(p-1)}\right] - f^{(p)}(x)\right) \end{aligned}$$

En remplaçant, le crochet vient tuer le dernier terme de la somme, d'où la variante (en incrémentant p)

$$\int_0^1 f = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_2^p A_k \left[f^{(k-1)}\right]_0^1 - A_{p+2} f^{(p+2)}(x).$$

Si f est C^{p+2}, l'erreur est majorée par $\frac{4}{(2\pi)^{p+2}}\left\|f^{(p+2)}\right\|_\infty$, ce qui peut être plus précis.

7.4 Approximation de l'intégrale : sommes de Riemann, methode des trapèzes, de Simpson, de Romberg

eg de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$: 178 termes pour les rectangles, seulement 17 pour trapères (à combien pret ?)

EXO : mq $\frac{1}{n}\sum f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f+\frac{1}{n}\frac{f(1)-f(0)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour f C^1 (dessin avec f croissante cvx et triangles)
heuristique : $\frac{1}{n}\sum f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f=\sum\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f(t)\right)dt\simeq\sum\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f'(a_i)\left(\frac{i}{n}-t\right)dt=\frac{1}{2n^2}\sum f'(a_i)\longrightarrow\frac{1}{2n}\int f'$
En déduire que l'erreur des trapèzes est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (pas besoin de $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$!) –> cf miquel CALQUE

plus généralement, on a le DL sivant de la méthode des rectangles, trapèzes, ou plus compliqué.

un coro immédiat est par sommation et 1-périodicité pour $a<b$ dans $\mathbb{Z}$

$$\frac{f(a)}{2}+f(a+1)+\cdots+f(b-1)+\frac{f(b)}{2}=\int_a^b f+\sum_2^p A_k\left[f^{(k-1)}\right]_a^b-(-1)^p\int_a^b\alpha_p f^{(p)}.$$

Prenons maintenant f C^psur $[0,1]$ et posons $f_n=f\left(\frac{\cdot}{n}\right)$. On appplique à f_n sur $[0,n]$:

$$\begin{aligned}&\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{f(n)}{2}\\ =\;& n\int_0^1 f+\sum_2^p A_k\frac{1}{n^{k-1}}\left[f^{(k-1)}\right]_0^1-\frac{(-1)^p}{n^p}\int_0^n\alpha_p f^{(p)}\left(\frac{\cdot}{n}\right)\end{aligned}$$

Isoler $\int f$ donne

$$\int_0^1 f=\frac{1}{n}\sum_0^n f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{f(0)+f(1)}{2n}-\sum_2^p\frac{A_k\left[f^{(k-1)}\right]_0^1}{n^k}+O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

En fait, les deux premiers termes correspondent à l'aire en trapèzes T_n.

Pour f C^4, on a $I-T_n=\frac{a}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, mais aussi $I-T_{2n}=\frac{a}{4n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, d'où $4(I-T_{2n})-(I-T_n)=O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, ie $I=\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n)+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. C'est la méthode de **Simpson**, approximation par paraboles. (Simpson est ausi appelée **formules des trois niveaux** sous la forme $\int_a^b P=\frac{b-a}{6}\left(P(a)+P(b)+4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$)
On peut réitérer en choisissnat une bonne CL des $T_{2^k n}$ augmenter la précision (**Romberg**).
Soit f C^∞. Poser $T_x=x\left(\frac{1}{2}f(0)+f(x)++f(2x)+\cdots+f(1-x)+\frac{f(1)}{2}\right)$, puis $A_{n,0}=T_x\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $A_{n,p+1}=\frac{4^pA_{n,n-1}-A_{n-1,p-1}}{4^{p-1}}$ (disposer les calculs en triangle de pascal). Alors $A_{n,p}=I+O\left(\frac{1}{4^{n(p+1)}}\right)$ qand n ets grand
RQ : méthode de Simpson interlpole par parabole. On peut interpoler par des polynômes de degré plus grand (–>autre déf de l'intégrale de Rieman !) –> méthode de Newton-Cotes. Est-ce que Romberg en fait partie ? ? ? ?

applciation des sommes de Rieman : pas de formule par coeur, tout dépend du pas. Attention au pas $\neq\frac{1}{n}$, aux translations. Faire un dessin suffit très souvent.

Rq : méthode trapèzes est en fait une série $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ à deux termes près. On reverra la comparaison à une intégrale au chapitre sur les séries.

Méthode Laplace et phsae stationnaire vus dans intégration généralisées.

8 Défintion intégrale de Riemann

8.1 Subdivisions et sommes de Darboux

Pour tout la suite, f désigne une application bornée sur un segment $[a,b]$ à valeurs complexes.
? ? ? ? ? quid du sup d'une fonction complexe ? ? ? ?

Définition.
Une subdivision *de* $[a,b]$ *est une partie finie de* $[a,b]$ *contenant* a *et* b*, ce qui revient à se donner une liste ordonnée* $(a=s_0,s_1,...,s_{n-1},s_n=b)$ *d'éléments de* $[a,b]$ *(avec* $n\geq 1$*).*
On ordonne les subdivisions par l'inclusion :

$$\sigma\leq\tau\iff\sigma\subset\tau.$$

Lorsque $\sigma\leq\tau$*, on dit que* τ *est* plus fine[1] *que* σ*.*
Les sommes de Darboux *de* f *associée à une subdivision* σ *sont définies par*

$$\begin{cases} I_\sigma^+(f):=\sum_{i=1}^n\left(\sup_{]s_{i-1},s_i[}f\right)(s_i-s_{i-1}) \\ I_\sigma^-(f):=\sum_{i=1}^n\left(\inf_{]s_{i-1},s_i[}f\right)(s_i-s_{i-1})\end{cases}.$$

Observons de suite l'inégalité $I_\sigma^-\leq I_\sigma^+$. Par ailleurs, les sommes de Darboux sont monotones au sens suivant.

Propriété.
Les sommes de Darboux I^+ *et* I^- *sont respectivement décroissantes et croissantes.*

Démonstration.
Soit $\sigma=(s_1,...,s_p)$ plus fine que $\tau=(t_0,...,t_q)$. Chaque $]s_{i-1},s_i[$ est alors inclus dans un (unique) $]t_{k_i-1},t_{k_i}[$, d'où

$$\sup_{]s_{i-1},s_i[}f\leq\sup_{]t_{k_i-1},t_{k_i}[}f.$$

Puisque $\sigma\geq\tau$, chaque t_k est un s_{i_k}. En multipliant l'inégalité ci-dessus par la largeur s_i-s_{i-1}, puis en sommant sur les i de $]i_{k-1},i_k]$, on obtient

$$\sum_{i_{k-1}<i\leq i_k}\left(\sup_{]s_{i-1},s_i[}f\right)(s_i-s_{i-1})\leq\left(\sup_{]t_k,t_{k+1}[}f\right)(t_{k+1}-t_k).$$

Il reste à sommer sur $k=1,...,q$ pour obtenir $I_\sigma^+\leq I_\tau^+$, *CQFD.*
La démonstration est analogue pour la croissance de I^-.

On a ainsi envie de dire que les sommes I^+ et I^- sont adjacentes. Cela suppose déjà de préciser lorsque *qui* tend vers quoi. L'idée naturelle est de faire subdiviser le segment $[a,b]$ en des bouts de plus en plus petits, à affiner de plus en plus une subdivision donnée. Cela amène à la définition suivante.

Définition.
Le pas *ou le* module *d'une subdivision* $\sigma=(s_0,...,s_n)$ *est le réel*

$$|\sigma|:=\max_{i=1,...,n}|s_i-s_{i-1}|.$$

On observera que le pas est une fonction décroissante en σ.

On s'intéresse maintenant au comportement des sommes de Darboux lorsque $|\sigma|$ tend vers 0.

[1] τ contient plus de points que σ, donc divise plus finement le segment $[a,b]$.

D'après la propriété précédente, on a équivalence, lorsque $|\sigma| \longrightarrow 0$, entre

$$\begin{aligned} \exists I &\in \mathbb{C}, \left\{ \begin{array}{l} I_\sigma^+ \longrightarrow I \\ I_\sigma^- \longrightarrow I \end{array} \right., \\ & I_\sigma^+ \text{ et } I_\sigma^- \text{ sont adjacentes} \\ I_\sigma^+ - I_\sigma^- &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Étant donnée une subdivison, il y a plein de manières de construire des rectangles approximant l'aire sous la courbe de f. Il suffit de prendre pour hauteur la valeur de f en un point quelconque de la largeur. Précisons cela.

8.2 Subdivisions pointées et sommes de Riemann

Définition.
Un pointage *d'une subdivison $\sigma = (s_0, ..., s_n)$ est un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ tel que $x_i \in]s_{i-1}, s_i[$ pour tout $i = 1, ..., n$. Le couple $(\sigma, \overrightarrow{x})$ est alors appelé* subdivision pointée.
La somme de Riemann *de f associée à une subdivision pointée $(\sigma, \overrightarrow{x})$ est définie par*

$$I_{\sigma, \overrightarrow{x}}(f) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(s_i - s_{i-1}).$$

f est dite Riemann-intégrable *si toutes ses sommes de Riemann convergent vers un même limite lorsque $|\sigma| \longrightarrow 0$. Cette valeur commune sera appelée* intégrale *de f sur $[a, b]$ et sera notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$.*

Remarque.
On a clairement, pour tout pointage $\overrightarrow{x}$ de σ,

$$I_\sigma^-(f) \leq I_{\sigma, \overrightarrow{x}}(f) \leq I_\sigma^+(f).$$

Cet encadrement permet de relier la convergence des sommes de Darboux à celles de Riemann. La proposition suivante utilise ce pont pour établir un critière pratique de la Riemann-intégrabilité.

Proposition.
Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. *f est Riemann-intégrable ;*
2. *la différence $I_\sigma^+ - I_\sigma^-$ tend vers 0 quand $|\sigma| \longrightarrow 0$;*
3. *pour tout $\varepsilon > 0$, il y a deux fonctions f^+ et f^- en escalier telles que*

$$f^- < f < f^+ \text{ et } \int_a^b (f^+ - f^-) \leq \varepsilon.$$

Démonstration.
Le point 2 n'est qu'un énoncé de passage : nous allons montrer $1 \iff 2 \iff 3$, les points difficiles étant d'arriver à 2.
$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$ C'est immédiat en vertu de l'encadrement

$$I_\sigma^- \leq I_{\sigma, \overrightarrow{x}} \leq I_\sigma^+.$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Soit $\varepsilon > 0$. Il y a un $\delta > 0$ tel que $|I_\sigma^+ - I_\sigma^-| < \varepsilon$ dès que $|\sigma| < \delta$. Fixons un tel $\sigma = (s_0, ..., s_n)$. On définit f^+ et f^- sur chaque intervalle $]s_{i-1}, s_i[$ en prenant le supremum et l'infimum de f dessus, de sorte que $\int_a^b f^\pm = I_\sigma^\pm$, puis on impose la valeur en les s_i par $\left\{ \begin{array}{l} f^+(s_i) = \sup_{[a,b]} |f| \\ f^-(s_i) = -\sup_{[a,b]} |f| \end{array} \right.$ pour avoir $f^- \leq f \leq f^+$ partout. Il est alors immédiat que

$$\int_a^b (f^+ - f^-) = I_\sigma^+ - I_\sigma^- \leq \varepsilon.$$

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Soit $\varepsilon > 0$. On a un $\delta > 0$ tel que $\left|I_{\sigma,\overrightarrow{x}} - I\right| < \varepsilon$ dès que $|\sigma| < \delta$. Considérons $\{s_0, ..., s_n\}$ un tel σ. Sur chaque intervalle $]s_{i-1}, s_i[$, il y a un x_i et un y_i où

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_i) > \sup\limits_{]s_{i-1},s_i[} f - \frac{\varepsilon}{b-a} \\ f(x_i) < \inf\limits_{]s_{i-1},s_i[} f + \frac{\varepsilon}{b-a} \end{array} \right. ,$$

d'où, après multiplication par $s_i - s_{i-1}$ et sommation de 1 à n,

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\sigma,\overrightarrow{x}} > I^+ - \varepsilon \\ I_{\sigma,\overrightarrow{y}} < I^- + \varepsilon \end{array} \right. .$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} I^+_\sigma - I^-_\sigma & \leq & \left(I_{\sigma,\overrightarrow{x}} + \varepsilon\right) - \left(I_{\sigma,\overrightarrow{y}} - \varepsilon\right) \\ & = & \left(I_{\sigma,\overrightarrow{x}} - I\right) - \left(I_{\sigma,\overrightarrow{y}} - I\right) + 2\varepsilon \\ & \leq & \left|I_{\sigma,\overrightarrow{x}} - I\right| + \left|I_{\sigma,\overrightarrow{y}} - I\right| + 2\varepsilon \\ & \leq & \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon, \ \textit{CQFD.} \end{array}$$

$\boxed{3 \Longrightarrow 2}$ Soit $\varepsilon > 0$. Il y a des f^+ et f^- associées, dont on peut considérer une subdivision associée commune $\tau = (t_0, ..., t_p)$. Soit $\delta > 0$ un réel à choisir convenablement et prenons une subdivision $\sigma = (s_0, ..., s_n)$ de pas $< \delta$.

Supposons dans un premier cas que σ est plus fine que τ. Chaque $]s_{i-1}, s_i[$ est alors inclus dans un (unique) $]t_{k_i-1}, t_{k_i}[$, d'où

$$\sup_{]s_{i-1},s_i[} f \leq \sup_{]t_{k_i-1},t_{k_i}[} f \leq \sup_{]t_{k_i-1},t_{k_i}[} f^+.$$

En multipliant par les largeurs $s_i - s_{i-1}$ et en sommant sur i, on obtient $I^+_\sigma \leq \int_a^b f^+$. On montrerait de même l'inégalité $I^-_\sigma \geq \int_a^b f^-$, ce qui amène

$$I^+_\sigma - I^-_\sigma \leq \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- = \int_a^b \left(f^+ - f^-\right) \leq \varepsilon, \ \textit{CQFD.}$$

Dans le cas général, rajoutons à σ des éventuels t_k (donc au plus p) de sorte à obtenir une subdivision σ' plus fine que $(t_0, ..., t_p)$. Pour ne pas trop perturber le calcul de I^+_σ, assurons-nous de trouver au moins un s_i dans chaque $]t_{k-1}, t_k[$. Ce sera le cas si l'on impose $\delta < \min_{i=1,...,1} |t_{i-1} - t_i|$.

Évaluons à présent la différence entre I^+_σ et $I^+_{\sigma'}$. Il s'agit d'une somme de termes (au plus p) chacun de la forme

$$\left(\sup_{]s_{i-1},t_k[} f\right)(t_k - s_{i-1}) + \left(\sup_{]t_k,s_i[} f\right)(s_i - t_k) - \left(\sup_{]s_{i-1},s_i[} f\right)(s_i - s_{i-1}).$$

En notant M un majorant > 0 de $|f^+|$ sur S tout entier, on peut majorer brutalement par $3M\delta$. La différence $\left|I^+_\sigma - I^+_{\sigma'}\right|$ se voit donc majorée par $3pM\delta$. Quitte à diviser δ par $3pM$ puis à suppposer $\delta < \varepsilon$, on en déduit

$$I^+_\sigma \leq I^+_{\sigma'} + \left|I^+_\sigma - I^+_{\sigma'}\right| \leq \int_a^b f^+ + \varepsilon.$$

Quitte à imposer de plus $M > \sup_S |f^-|$, on montrerait de même que $\left|I^-_\sigma - I^-_{\sigma'}\right| \leq 3pM\delta \leq \varepsilon$, et on peut alors conclure comme lorsque $\sigma \leq \tau$.

8.3 Fonctions réglées

Nous pouvons à présent exhiber toute une famille de fonctions intégrables au sens de Riemann, les fonctions *réglées*, dont feront partie les application continues par morceaux et les fonction monotones.

Défintion.
Une application sur $[a, b]$ est dite réglée *si elle est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Propriété.

Les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

Démonstration.

Soit f réglée. f s'approche à 1 près par des fonctions en escalier, lesquelles sont bornées, donc f est bornée.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il y a un fonction E en escalier telle que $|f - E| < \varepsilon$. Posons $f^{\pm} = E \pm \varepsilon$. On a d'une part

$$f = (f - E) + E \leq |E - f| + E < \varepsilon + E = f^{+},$$

(on établierait de même $f > f^{-}$), d'autre part

$$\int_a^b \left(f^{+} - f^{-}\right) = \int_a^b 2\varepsilon = 2\varepsilon\left(b - a\right), \textit{ CQFD.}$$

Donnons à présent un critière pratique pour déterminer le caractère réglé d'une application. En corollaire immédiat, nous obtiendrons la Riemann-intégrabilité des fonctions continues par morceaux et des fonctions monotones.

Proposition.

Une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $]a, b[$ une limite à droite et à gauche.

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit c un point de $]a, b[$. Fixons un $\varepsilon > 0$. On sait qu'il y a une application E en escalier telle que $|f - E| < \varepsilon$. L'application E est constante sur un certain intervalle $]c, c + \delta[$. Alors, pour tous réels x, y dans cet intervalle, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - E(x) + E(y) - f(y)| \\ &\leq |f - E|(x) + |f - E|(y) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Le critère de Cauchy est donc vérifié pour $f_{|]c,b[}$, ce qui montre que $\lim_{c^+} f$ existe. On procèderait de même pour $\lim_{c^-} f$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $s \in]a, b[$, il y a un $\delta_s > 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} s < x < s + \delta_s \implies |f(x) - f(s^{+})| < \varepsilon \\ s - \delta_s < y < s \implies |f(y) - f(s^{+})| < \varepsilon \end{array} \right. .$$

Les intervalles $I_s :=]s - \delta_s, s + \delta_s[$ recouvrant le segment $[a, b]$, on peut en extraire un recouvrement fini $\bigcup_{1 \leq i < n} I_{s_i}$. Quitte à réordonner les s_i, on dispose donc d'une subdivision $a = s_0 < ... < s_n = b$ que l'on peut pointer en prenant un x_i dans $I_{s_{i-1}} \cap I_{s_i}$. On définit alors une fonction E en escalier par $E(s_i) = f(s_i)$ et $E = f(x_i)$ sur $]s_{i-1}, s_i[$. Vérifions que $|E - f| < \varepsilon$. Soit $x \in [a, b]$. L'inégalité est évidente pour $x = s_i$. Sinon, x tombe dans un $]s_{i-1}, s_i[$ où l'on a

$$|f - E|(x) \leq \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f(x_i) - E(x_i)|}_{=0} + \underbrace{|E(x_i) - E(x)|}_{=0} < \varepsilon, \textit{ CQFD.}$$

En pratique :

on oublie complètement Darboux (ce n'était qu'une notion intermédiaire pour une preuve)

on **montre** qu'une fonction est intrégrable par le critère 3

on **utilise** qu'une fonction est intrégrable en appliquant le critère 1 afin d'évaluer des sommes

Pour ceux qui connaissent un peu d'analyse fonctionnelle, rappelons qu'une application à valeurs dans un Banach uniformément continue sur une partie se prolonge continûment à son adhérence. Ainsi, en se plaçant sur le Banach des fonctions bornées à valeurs dans un Banach, l'intégrale se définit aisément sur la partie formée des fonctions en escalier où elle est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire, donc uniformément continue : on peut la prolonger à l'adhérence des fonctions en escalier, qui ne sont autres que les fonctions réglées.

9 Intégrales impropres

du simple vocabulaire : se placer sur un segment et faire tendre une borne : $\int_a^{\to b} f$. Ne rien apprendre, c'est une notion merdique.

Eg : est-ce que $\int_0^{\to\infty} e^{it^2} dt$ existe ?
Rq : ce n'est pas parce qu'on intgère sur un intervall bornée qu'il n'y pas de pb ($\frac{1}{1-x^2}$). Quant on sait que $R \cong]-1,1[$, on peut enovyer la borne en $\pm\infty$

10 Intégrale généralisée

Henstock Kurweil
Denjoy Perron
Bochner Lebesgue

11 INfinité de nombres premiers

cf leçons de mathématiques d'aujourd'hui, volume 2, page 101

pour N entier on a

$$\ln N < \ln(N+1) = \int_1^{N+1} \frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = H_N$$

on forme ensuite le produit des

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots &= \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} \\ &= 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{p} + \delta_p\right) \text{ où } \delta_p \leq \sum_{n\geq 2} \delta_n = 1 \end{aligned}$$

sur tous les premiers $p \leq N$. En développant, on trouve (au moins) tous les entiers $\leq N$, donc

$$H_N \leq \prod_{p\leq N} \exp\left(\frac{1}{p} + \delta_p\right) = \exp\left(\sum_{p\leq N} \frac{1}{p} + \underbrace{\sum_{p\leq N} \delta_n}_{\leq 1}\right).$$

En reprenant le log, on trouve

$$\sum_{p\leq N} \frac{1}{p} > \ln\ln N - 1$$

(et il se trouve que c'est un bon asymtotqieu)