# Développements limités
# (version chantier)

Marc SAGE

6 mars 2006

## Table des matières

Pourquoi petit o et grand O ?

Ces symboles sont connus sous le nom de notations de Landau (1877-1938). Le o est l'initiale de l'allemand Ordnung qui signifie « ordre ». Il s'agit en effet de comparer les ordres de grandeurs de fonctions au voisinage d'un point.

# 1 Intro

Soit $u_n$ tendant vers $\infty$. Que dire de la vitesse de convergence ? on connaît plusieurs comportements $\lambda^n$, $n^\alpha$, $\ln n$... On dira que $u_n$ est *équivalent* à l'un d'eux si le rapport tend vers 1, *négligeable* s'il tend vers 0. Par exemple, $(n+18)^2$ est équivalent à $n^2$, ce qui s'écrit $(n+18)^2 \sim n^2$, tandis que $\ln n$ est négligeble devant $n^3$, ce qui s'écrit $\ln n = o\left(n^3\right)$.

De même, il y a plusieurs manière de tendre vers 0 : $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $e^{-n}$, toutes deux à deux non équivalente

EG : $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ -> développement asympotitques.

On va prendre des polynômes comme fonctions de références.

Les DLS sont un outil : on ne fait pas ca pour le plaisir. En physique pour linéairser, à l'ordre 2 pour étudier équilibre, très rarement audelà. En maths aussi.

La nécessité d'un DL est conditionnée par la présence d'une forme indéterminée ! On zoome pour élaguer termes de même ordre, parallèle avec échange aux échecs pour concrétiser avantage matériel.

Des fois il faut faire *plusieurs* DL (et oui, exemple des moyenne géomatrique)

Pour intuiter odre, voir ce que l'on veut (si limite, on veut du $o(1)$). Sinon, on est humble et on ne commence pas par DLifier à l'odre 18.

FWIW, le coefficient de $x^{2n-1}$ du DSE de $\tan(x)$ est

$$(-1)^{n-1} 2^{2n} \left(2^{2n}-1\right) \frac{B_{2n}}{(2n)!}$$

Les dénominateurs réduits sont la suite A036279 du Sloane.

Sur le dénominateur réduit du nombre $B_{2n}$, on a le théorème de Von Staudt et Clausen : c'est le produit des premiers $p$ tels que $p-1$ divise $2n$. Donc, en multipliant ça par $(2n)!$ (dont l'expression de la valuation $p$-adique est bien connue), on obtient facilement des nombres assez simples qui doivent être multiples des dénominateurs réduits du DSE de tangente. Je doute qu'on puisse dire quelque chose de remarquable sur le dénominateur réduit précis.

DESCRIPTOIN COMBINTOIRE : si $\tan x = \sum c_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, alors $c_n$ compte les permutaion ayant une descentre aux indices pairs.

# 2 Suites équivalentes, négligeables, dominées

notatoin suites, dire ensuite pareil fonctions

petit $o$ car tout petit $\longrightarrow 0$, grnad $O$ car reste dans une boule -> borné.

$o$ $O$ $\sim$ sont transitive, $O$ et $\sim$ réflexives, $\sim$ symétrique.

(ceg : $u_n = o(u_n) \implies u_n = 0$ APCR ; $1 = O(n)$, mais $n \neq O(1)$)

Nouveau langage :

tendre vers 0 $\iff$ être un $o(1)$

être bornée $\iff$ être un $O(1)$

tendre vers une limite $l \neq 0 \iff$ être $\sim l$

être nulle au voisinage $\iff$ être $\sim 0$.

usuels : $n^\alpha \ll n^\beta \iff \alpha < \beta$

$(\ln n)^\alpha \ll (\ln n)^\beta \iff \alpha < \beta$

$\lambda^n \ll \mu^n \iff \lambda < \mu$

croissance comparée : $(\ln n)^\alpha \ll n^\beta \ll \lambda^n \ll n! \ll n^n$ : log < poly < exp < facto<autoexp (si $\lambda > 1$)

Les égalités que l'on écrit sont à sens unique : on lit "**un** petit o est **un** grand O" :

Les $o$ et $O$ sont des notations **multiplicatves** : on peut sortir et rentrer dedans ce qu'on veut :

$$o\left(a_n b_n\right) = a_n o\left(b_n\right) = b_n o\left(a_n\right) = a_n b_n o\left(1\right).$$

Ce sont donc des poubelles qui mangent les constantes et les trucs bornés.

EG : $\frac{n^2 e^{-n} \sin n}{\operatorname{th}(n!)} = \frac{n^2 o(1) O(1)}{O(1)} = o\left(n^2\right)$.

Par ailleurs, de par leur caractère multiplciatf, les relations $o\, O \sim$ sont compatibles avec $\times$, $|\cdot|$ et les puissances positives (démo : ces trois opérations préservent les prop "tendre vers 0", "tendre vers 1", "être bornée"). POUR TOUTES LES AUTRES FONCTIONS, redémontrer

EG $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Pour les **sommations**, on a les propriétés évidentes :
$o\left(a_n\right) = O\left(a_n\right)$
$o\left(a_n\right) + o\left(a_n\right) = o\left(a_n\right)$
$O\left(a_n\right) + O\left(a_n\right) = O\left(a_n\right)$
$o\left(a_n\right) + O\left(a_n\right) = O\left(a_n\right)$

EG : $n^3 = o\left(2^n\right)$, $n^5 = o\left(2^n\right)$, $\ln n = o\left(n\right)$, d'où $n^3 + n^5 + \ln n = o\left(n\right) + 2o\left(2^n\right)$. Or $n = o\left(2^n\right)$, donc on obtient $3o\left(2^n\right) = o\left(2^n\right)$.

Composition : pour écrire $f \circ \varphi = \theta\left(g \circ \varphi\right)$ en $a$, il suffit que $f = \theta\left(g\right)$ en $\varphi\left(a\right)$.

On peut additoner les équivalents de suites **de mêmes signes**, JAMAIS SINON.

On ne somme pas les équivalents, ni même $\sim$plus= : $1-n \sim -n$ plus $n=n$ donne $1 \sim 0$.

Pour travailler, on utilise des vraies égaliés à l'aide de

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n + o\left(b_n\right) \iff b_n = a_n + o\left(a_n\right)$$

Eg : $f\left(a+h\right) - f\left(a\right) \sim f'\left(a\right) h$, $f\left(a+h\right) = f\left(a\right) + hf'\left(a\right) + o\left(h\right)$.

INTERDIT d'appliquer une fonctino sur un équivalent, encore moins sur un $o$ ou un $O$ : il n'y a en effet aucune raison que la fonction se comporte bien pour le produit, ni ne conserve l'une des propriétés "tendre vers 0" "tendre vers 1" ou "être bornée

$$a_n \sim b_n \not\Longrightarrow f\left(a_n\right) \sim f\left(b_n\right)$$

$$a_n = o\left(b_n\right) \not\Longrightarrow f\left(a_n\right) = o\left(f\left(b_n\right)\right)$$
$$a_n = O\left(b_n\right) \not\Longrightarrow f\left(a_n\right) = O\left(f\left(b_n\right)\right)$$

pour $f\left(x\right) = e^x$, on a $n \sim n+1$ mais $e^{n+1} = ee^n \not\sim e^n$ (de même, $u_n \not\sim u_{n+1}$ pour $u_n = n!$)

pour $f\left(x\right) = x+1$, on a $\frac{1}{n} = o\left(1\right)$ mais $\frac{1}{n} + 1 \neq o\left(1+1\right) = o\left(1\right)$

pour $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{n} = O\left(1\right)$, mais $\frac{1}{\frac{1}{n}} \neq o\left(\frac{1}{1}\right))$

CONCLUSION : on écrit tout avec des $=$ et des $o$.

Si puissances, on passe à l'exp, et écrrire JUSTE le truc en haut sans réécrire dix mille fois exp (si pas trop long).

Rq : pour voir un équivalent, il suffit de faire un Dl du ln à $o\left(1\right)$ : en effet, $e^{f+o(1)} = e^f e^{o(1)} \sim e^f$

Les notation $o\left(f\right), O\left(f\right), \sim f$ cachent **deux** $f$ : l'un qui donne la taille de la quantité comparée, l'autre en tant que variable de la chose bornée/tendant vers 0/1.

Exo $\lim_{n\infty} \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+p\alpha}\right)$ si $f$ dérivale en 0 et $f=0$.

Exo $f\left(\lambda x\right) = \lambda f\left(x\right)$ pour $\lambda > 0$ et $x$ non nul dans $R^n$ où $f$ diff en 0 (traite cas $n=1$)

deux fonctios équivalentes ont même limite (réciproque vraie si limite non nulle, fausse sinon : prendre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$).

EXO : soit $f_n$ des fcontoin continues. Mq il y a une fonction contine $f$ devant laquelle toutes les $f_n$ sont négligables.

DEM : poser $f\left(x\right) = \sum \chi_{]n,\infty[}\left(x\right) \left|f_n\left(x\right)\right|$ (somme ponctuellmeent finie).

# 3 DL

une fonction est équivalente au premier terme **non nul** de son développement

attention à bien écrire $\cos x \sim 1 + \frac{x^3}{378}$, car cela est jsute. Pour être précis, c'est la différence $\cos x - 1$ qui $\sim \frac{x^2}{2}$ (ou même $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{18}$). Mais c'est très peu maniable car pas compatible avec + –> tojours écrire des vraies égalités avec des $o$ et $O$.

L'ordre des termes est important pour la lecture. Celà justifie l'introduction de la notation :

$$f \approx a + b + c + \cdots + z \text{ pour dire } \begin{array}{c} f = a + b + \cdots + z + o(z) \\ a \gg b \gg \cdots \gg z \end{array}$$

TY donne des DL pour toute fonctions usuelles qui sont $C^\infty$.

On retrouve tous les autres par intégration : $f = o_a(g) \implies \int_a^\cdot f = o\left(\int_a^\cdot g\right)$ (L'Hospital !)

AInsi on trouve exp (d'où sh et ch, puis sin et cos) et $(1+\cdot)^\alpha$ (d'où d'une part $\frac{1}{1+\cdot}$ d'où $\ln(1+\cdot)$ ath atn, d'autre part $\frac{1}{\sqrt{1+\cdot}}$ d'où asn acs ash ach).

A retenir par coeur : exp, $\frac{1}{1\pm\cdot}$, $\ln(1\pm\cdot)$, $\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}$, $\tan t \approx t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15}$

ON NE DERIVE PAS LES DL ($x^2 \sin \frac{1}{x}$) ; mais si on sait la dérivée admet un DL, on peut intégrer ce ernier et donc faire comme si on déeivée un DL.

admettre DL à l'ordre 0, c'est admettre une limite.

admettre DL à l'ordre 1 c'est être dérivable : si pb de mémoire de signe, faire un dessin pour comparer la tangente à la courbe ! eg : $\ln(1+x) = x$MOINS, $\tan(x) = x$PLUS, $\cos x = 1$MOINS

Attentsion : admettre DL à l'ordre $n \geq 2$ n'assure par le caractère $C^n$ : tout le problème est dans la régularité du $o$ : il est certes petit, mais peut osciller très très vite ($x^3 \sin \frac{1}{x}$...)

Cours : à valeurs réelles, mais aucune différence pour valeur complexe (ou même Banach) (sens de l'intégrale dans TL ?)

EG : $DL_2$ de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ –> très instructif.

PROP : *DL d'une CL de DL, d'un produit de DL, d'un polynoe de DL*

Attention : la composée n'est pas aussi facile que les deux autres. Suppo $\begin{array}{c} f(a+h) - f(a) = P(h) + o(h^p) \\ g(f(a)+x) - gf(a) = Q(x) + o(x^q) \end{array}$. Alors

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= g\left(f(a) + \underbrace{P(h) + o(h^p)}_{=\varepsilon(h)}\right) - g(f(a)) \\ &= Q(\varepsilon(h)) + o_{\varepsilon(h)\to 0}\left(\varepsilon(h)^q\right). \end{aligned}$$

Or, un $o_{\varepsilon(h)\to 0}$ est un $o_{h\to 0}$, $\varepsilon(h)^q$ est un $O(h^q)$, et

$$Q(\varepsilon(h)) = \sum q_i \left(P(h) + o(h^p)\right)^i = \sum q_i \left(P(h)^i + o(h^p)\right) = [Q \circ P](h) + o(h^p).$$

DL d'une réciproque ?

Soit $f$ $C^n$difféo en 0. Alors $f^{-1}$ admet un $DL_n$ en $f(0)$ qui s'obtient en identifaitn les DL de $g \circ f$ et Id en 0 (système traingulaire.

EXO : $f, g$ impair => où faut-il pousser DL pour y voi clair dans $f \circ g - g \circ f$ ? (réponse : ordre 7)

méthoed : pour DLife $\frac{1}{n+1}$, on a $n- > \infty$, donc on factorise par $n$ pour élaguer l'infini (comme les fraction rationnellest). Autre idée : on fait un DL en $\frac{1}{n}$, donc on fait appratitre ce dernier.

# 4 échelle de comparaison en général

notation $f$

# 5 Séries

Pour les séries, souvent le $O$ suffit (pas besoin de regarder la tête de la poubelle $O$, )

ON ne somme pas les $o$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{n} = \sum o\,(1) \neq o\,(1)$$

(le pb est que le nombre croit, donc il ne sont pas tous uniforément des $o\,(1)$)

ON ne somme pas les équivalent : $\begin{array}{c} n \sim n + \frac{1}{n} \\ 1 - n \sim -n \end{array} \implies \sum 1 \not\sim \sum \frac{1}{n}$ (même explciation ?)

# 6 Pour aller plus loin

th Glaeser :
Soit $f \geq 0$ $C^2$ sur $\mathbb{R}$ Alors $\sqrt{f}$ est $C^1$ ssi les points d'annulation de $f$ sont aussi des zéros de $f'$ et $f''$
démo : cf http ://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Glaeser