Intégrales généraliséees
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

à faire après famille sommables
si positif, on somme comme on veut, ca fera toujours $\int f$ (fini ou non)
si pas positif, notion d'intégrale improrpre ou généralisée : noation $\int_a^{\longrightarrow b} f$.
Si intégrable, tout marche bien, et on retrouve l'intégrale classique $\int_a^{\longrightarrow b} = \int_{[a,b]} = \int_{[a,b[} = \int_{]a,b]} = \int_a^b$ (prendre pour suite exhaustive le segment mangé de $\frac{1}{n}$)

Riemann et Bertand pour les classiques.

équivalances des normes peut sauver la vie.

Pour fubini, les quantité écrites peuvent avoir un sens et ne pas être égales :

$$f(x,y) = 2e^{-xy} - e^{-xy} \text{ pour } \begin{array}{c} 0 < x \\ 0 < y \leq 1 \end{array}.$$

(0 et l'infini)

Commencer le cours par des exemples de dominations où l'on a envie d'intervertir sans jsutifier. Puis débarasser les théorème du cours des conditions triviales pour que les quantités écrites aient un sens.

CEG fL^1doit $\to 0$: prendre 0 pp :
Si on rajoute continuité, prendre des triangle.
Si on rajoute l'uc, alors pas de ceg.

1 Gamma

Euler avait remarqué que $n!$ vaut le produit infini $\prod_{k\geq 1}\left(\frac{k+1}{k}\right)\frac{k}{k+n}$, d'où une interpolatin pour la factorielle.

2 Convolution

Voltera généralise le produit de deux matrices. Il pred F et G réelles à deux arguments et définit

$$F * G : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \int_a^b F(a,\cdot)\, G(b,\cdot)$$

Lorsque F et G ne dépendent que de $y-x$, so does $F*G$ et on retrouve la convolution classique.
Autre aprpoche : petit texte en cours de rédaction

3 Démo courte TCM

TCM (ou th de Beppo Levi (prénom-nom)) : on se ramène à intégrer sur un segment par interversion de sup, puis Dini conclut.
Puis Fatou : pour montre $\liminf \int_I f_n \leq \int_I \liminf f_n$, pour $q \geq p$, on a $\inf_{p\geq n} f_p \leq f_q$, d'où en intégrant, en prenant l'inf pour $q \geq n$, celle croissante en n, puis en appliquant le TCM

$$\int \lim_n \inf_{p\geq n} f_p \overset{\text{TCM}}{=} \lim_n \int \inf_{p\geq n} f_p \leq \lim_n \inf_{q\geq n} \int f_q.$$

Puis TCD : si $f_n \xrightarrow{\text{cs}} f$ avec $|f_n| \leq \Theta\ L^1$, les f_n et f sont clairment L^1 , puis $|f - f_n| \leq 2\Theta$. Fatou dit alors

$$\begin{aligned}
\int \liminf \left(2\Theta - |f - f_n|\right) &\leq \liminf \int \left(2\Theta - |f - f_n|\right) \\
\int (2\Theta - 0) &\leq \int 2\Theta - \limsup \int |f - f_n| \\
\limsup \int |f - f_n| &\leq 0, \text{ d'où} \\
\left| \int f - f_n \right| &\leq \int |f - f_n| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

L'ingégale $\int_1^{\to\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est l'analogue continu de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$: les deux sont semi-convergent.

4 Méthode Laplace

Que dire asymptotiquement de $\int f(t)\, e^{n\theta(t)} dt$ où θ réelle ?
Laplace dit que la contribuion pricipale à $\int f(t)\, e^{n\theta(t)} dt$ se situe autour du maximum de θ.

TH *Soit f, θ réelles continue sur I de minimu 0 tq fe^{θ} L^1 et pour t proche de 0 on ait* $\begin{array}{c} f(t) \sim At^{\alpha-1} \\ \theta(t) = B - \lambda t^{\beta} + o\left(t^{\beta}\right) \\ \sup_{[t,\infty[\cap I} \theta \leq \theta(t) \end{array}$.
Alors $\int fte^{n\theta} \sim Ae^{Bn} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\beta(\lambda n)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$.

DEM Quitte à diviser par le terme pilote Ae^{Bn} (comportement en 0), on peut supposer $A = 1$ et $B = 0$ (ce qui ne change pas le résutlat à montrer). On veut alors obtenir l'équivelnt $u_n := \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\beta(\lambda n)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$

Soit $\varepsilon > 0$. Il y a un voisinage $[0, \delta]$ où $f(t)$ encadré par $(1 \pm \varepsilon)\, t^{\alpha-1}$ et $\theta(t)$ par $-\lambda(1 \pm \varepsilon)\, t^{\beta}$. En intégrant, on encadre $\int_0^{\delta} fe^{\theta}$. On ne regrade que le majorant par commodié : $(1 + \varepsilon) \int_0^{\delta} t^{\alpha} e^{-n\lambda(1-\varepsilon)t^{\beta}} \frac{dt}{t}$. Or, l'asymptotoque de l'intréagle $\int_0^{\delta} t^{\alpha} e^{-n\lambda t^{\beta}} \frac{dt}{t}$ sobtient facimeent en posant $u = n\lambda t^{\beta}$, doù $\frac{du}{u} = \beta \frac{dt}{t}$ et l'intégrale vaut $\int_0^{n\lambda\delta^{\beta}} \frac{1}{\beta} \left(\frac{u}{n\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-u} \frac{du}{u} \sim \frac{\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{(\lambda n)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$. Par conséquent, le majorant est équivalent à $\frac{\frac{1+\varepsilon}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{[\lambda(1-\varepsilon)n]^{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\beta}}} u_n$, et pareil pour le minorant, donc $\frac{\int_0^{\delta} fe^{\theta}}{u_n}$ est encadré par des trucs équivalents à $\frac{1 \pm \varepsilon}{(1 \mp \varepsilon)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ qui peut être rendu ausi proche de 1 que voulu.

Montrons ensuite que la contribution autour de 0 est prépondérante (c'est là que joue la 3e hypohtèse). Quitte à choisir δ plus petit, et vu léquivalent $\theta(t) \sim -t^{\beta}$, on peut supopse $C := -\theta(\delta) > 0$. Alors l'intégrabilité de $fe^{n\theta}$ vient de celle de fe^{θ} et de la majoration $n\theta = \theta + (n-1)\theta \leq \theta - (n-1)C$, delquelel provient aussi $\int_{t \geq \delta} fe^{(n+1)\theta} \leq \left(\int_I |f|\, e^{\theta}\right) e^{-nC}$ qui est négligeable devant toute puissance, en particulier u_n.

Concluons. Soit $E > 0$. On choisit ε pour que $\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ soit encadré par $1 \pm E$, puis δ correspondant, de sorte que APCR $\frac{\int_0^{\delta} fe^{\theta}}{u_n}$ est encadré par $1 \pm 2E$, puis APCR $\left| \frac{\int_{>\delta} fe^{\theta}}{u_n} \right| < E$. TERMINE.

Cor (Laplace) *soit I intervalle, f réelle $C^0 L^1$ sur I, θ réelle C^2 sur I telles que fe^{θ} L^1. Si θ a un maximum en un $a \in \mathring{I}$ où la courbure $\theta''(a) = -\kappa$ est strictement négative et où $f(a) \neq 0$ et tq le sup de θ en dehors de tout voisinge de a est< ce max, alors,*

$$\int_I fe^{n\theta} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \frac{\left[fe^{n\theta}\right](a)}{\sqrt{n}}.$$

Dem.1 Le refaire soi-même !

Dem 2 Quitte à translater, OPS $a = 0$, puis on coupe en deux, et on applique ce qui précède : $f(t) \sim f(0)$ (donc $\alpha = 1$), $\theta(t) = \theta(0) - \kappa \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$ (donc $\beta = 2$ et $\lambda = \frac{\kappa}{2}$). La troisième condition est vérifie puisque localement $\theta < \theta(0)$. On en déduit, après division par le pilote $f(0)\, e^{Bn}$, l'équivalent $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{\kappa}{2} n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\kappa n}}$. On en a deux, *CQFD*.

RQ : il suffit en fait que $fe^{n\theta}$ L^1 APCR. EN effet, si N est un tel rang, notons $f^* := fe^{N\,\mathrm{Id}}$: alors

$$\int fe^{n\theta} = \int f^* e^{-(n-N)\theta} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \frac{\left[f^* e^{(n-N)\theta}\right](a)}{\sqrt{n-N}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \frac{\left[fe^{n\theta}\right](a)}{\sqrt{n}}.$$

RQ : il faudra souvent rendre fixer le max dans l'intégrand par un CDV judieux.

EG : $\Gamma(x) = \int_{R^+} t^x e^{-tx} \frac{dt}{t}$. Que dire de $\Gamma(x+1) = \int_{R^+} e^{x \ln t - t} dt$? l'exposant se dérive en $\frac{x}{t} - 1$ donc est max pour $t = x$. On fait donc le CDV $t = ux$, d"où $\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_{R^+} e^{x(\ln u - u)} dt$. Alors $\ln u - u$ est bien max en $u = 1$ (on s'est arrangé pour !) de courbure -1, donc Laplace conclut :

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

et on retrouve Stirling.

Gén à pluisuers variables ?

5 Phase stationnaire

Que dire asymptotiquement de $\int fe^{in\theta}$?

Lorsque n grand, la phase $in\theta$ oscille très vite, tuant l'intégrale. Ainis, prépondéra là où θ varie le moins vite (phase stationnaire).

LEMME : $\int_R e^{it^2} dt$? son carré vaut $i \int_R e^{-t^2} dt$. (ou exo Gourdon) (ou perturbation réelle de la phase)

Idée : si tout est régulier, un IPP de l'intégrande $\frac{f}{in\theta'} e^{in\theta} in\theta'$ donne $\frac{1}{in} \left[\frac{fe^{in\theta}}{\theta'}\right] - \frac{1}{in} \int \left(\frac{f}{\theta'}\right)' e^{in\theta}$ où la seconde intégrande tend vers 0. Ainsi, si $\frac{f}{\theta'}$ a un limite aux bornes de I, le premier terme est $\left[\frac{fe^{in\theta}}{\theta'}\right]_I$ qui domine l'inégrale d'après (et on recommnce).

TH

Soit I intervalle boné, f $C0$ θ C^2 tq θ' s'annule en un unique $a \in I$ où $\kappa := \theta''(a) \neq 0$ et $f(a) \neq 0$. On suppose de plus $\frac{f}{\theta'}$ et $\left(\frac{f}{\theta'}\right)'$ bornées autour de a. Alors $\int fe^{in\theta} \sim f(a) e^{in\theta} e^{\iota \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{n\kappa}}$.

DEM En dehors d'un voisinage de a, une IPP de l'intégrande $\frac{f}{in\theta'} e^{in\theta} in\theta'$ donne un $O\left(\frac{1}{n}\right)$ par hypothèse car I borné (c'est lemme lebesgue génralisé).

Morse nous dit que $\theta = \theta(0) + \frac{\kappa}{2}\varphi^2$ où φ difféo local (avec $\varphi'(0)^2 = 1$). Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour rendre ok ce difféo. Alors $\int fe^{ni\theta} = e^{ni\theta_0} \int fe^{ni\frac{\kappa}{2}\varphi^2}$. On fait CDV, d'où $e^{ni\theta_0} \int f\left(\varphi^{-1}(t)\right) \varphi'(t) e^{ni\frac{\kappa}{2}t^2} dt$. Le terme $\varphi'(t) f \circ \varphi^{-1}(t)$ vaut $f(0) + tg(t)$ où g C^0 donc bornée. LA partie en $tg(t)$ est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$ par une IPP. Reste donc $e^{ni\theta_0} \int e^{ni\frac{\kappa}{2}t^2} dt$. OR, l'intégrale$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{ni\lambda t^2} dt$ vaut$\frac{1}{\sqrt{\lambda n}} \int_{-?n}^{?n} e^{it^2} dt \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda n}} \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

RQ : si $f(a) = 0$, ou si l'on regarde le DL plus loin, l'existence des limites finies de $\frac{f}{\theta'}$ et $\left(\frac{f}{\theta'}\right)'$ suffit. EG : $\int_0^{\varepsilon} \sin t \; e^{in \sin t^2} dt$? $\theta'(t) = 2t \cos t^2$ s'annule qu'en $t = 0$. On$\frac{f}{\theta'} \longrightarrow \frac{1}{2}$, et