Séries
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Parler des l^p, mq ils sont complets
intro sur $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$, trois valeurs de $\sum (-1)^n$, $\sum x^n$ –> pb **convergence**.

def (une séire à valeurs dans E est une suite de la forme $n \mapsto \sum_{i \leq n} u_i$où u est une suite de E), nature, ***sommes parieilles***, ***retes partiels***, on n'en rien à cirer des premier termes pour la cvgernce, mais ils sont importat pour le calcul de la somme

évoquer la défintion formelle de bourbaki.

critère de cauchy -> apparitions des tranches de Cauchy

EXO *soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *cv tq* $\sum a_{n^2}$ *cv. Mq* $\sum c_n = \left\{ \begin{array}{c} a_n \text{ si } n \text{ pas carré} \\ b_{\sqrt{n}} \text{ sinon} \end{array} \right.$ *cv.*

DEM Regardons les tranches de Cauchy $\sum_p^q c_n - \sum_p^q a_n = \sum_{p \leq k^2 \leq q} b_k - \sum_{p \leq k^2 \leq q} a_{k^2}$. Trois séries cv, donc la quatrième aussi.

1 Termes positifs

critère comparison : si $0 \leq a_n \leq b_n$, alors $\sum b_n$cv=>$\sum a_n$cv (d'où la contraposée !!)
cor $a_n = O(b_n)$ avec$\sum b_n$: alors $\sum a_n$ cv
CP : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$
$a_n \sim b_n \implies$ série de meme nature
Rq : il suffit qu'un terme soit > 0 APCR : par exemple $\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
$\sum a_n$ et $\sum \ln(1 + a_n)$ de même nature
COR : $\prod (1 + a_i)$ cv vers une limite non nulle ssi $\sum a_i$ cv
EXO : si $\sum a_n$cv, alors $\sum a_n^2$ cv. Plus généralement : $\sum a_n$ et$\sum b_n$cv => $\sum a_n b_n$ cv (tranche de Cacuhy)

EG : $\text{acs}^\alpha \frac{n}{n+1} = \text{acs}^\alpha \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{n+1}}^\alpha \sim \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, cv ssi $\alpha > 2$

ATTNETINO : toutes ces propsition sont fausses sans l'hypothsé ≥ 0 (ou de signe constant)

s'il n'y pas le control $0 \leq a_n$à gauche, la suite a_n peut Evidemment faire ce qu'elle veut dans les négaifs (et ce n'est pas un signe uniforme qui va changer la nature de la série),par exemple diverger grossièmenet : $-n! < 0$, et pourtant $\sum 0$ cv.

Pour les autres, attendre Leibniz

1.1 Critère usuels pour positives

cauchy : cv si : $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$, div si $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pas conclure sinon ($\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$)

d'alembert : cv si $\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, div si $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, pas conlure sinon

rq : au vue des inégalité $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (car $\sqrt[n]{a_n}$cv=>$\frac{u_{n+1}}{un}$cv), cauchy est pus fotrt que dalmenert, et stricemtn : $u_n = \frac{1}{2^n}$ si pair et $\frac{2}{2^n}$ si impair.

raab duhamel soft (corollaire de critère logarihme) : il précise d'alembert qui plante (les $\sum \frac{1}{n^\alpha}$)

1.2 Séries de références

exponentielle
Neumann (géomtrique) : $\sum a^n = \frac{1}{1-a}$ si $|a| < 1$.

Riemann : soit comparaion série intégrale, soit $\frac{1}{n^\alpha} = \partial \int \frac{1}{n^\alpha} \simeq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$, soit Raab Duhamel (car D'alembert ne marche pas)

Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ cv ssi $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour lexico
EXO : $\sum \frac{1}{e^{\alpha n} n^\beta \ln^\gamma n}$cv ssi $(\alpha, \beta, \gamma) > (1, 1, 0)$? ? ? ?

EXo : $\sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$ où $a,b>0$? TG=$\frac{a^n}{1+\frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}}$. Regardons qui pilote en bas. si $b\leq 1$, c'est 1, donc TG$\sim a^n$ cv ssi $a<1$. Si $b>1$, c'est le second terme, d'où TG $\sim \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$. On regade Cauchy : $\frac{a}{b}2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \longrightarrow \frac{a}{b}$. SEul cas tangent : $a=b$, mais alors TG$\sim 2^{\sqrt{n}}$ qui dv

ATTETIon : ce n'est pas parce qu'on converge qu'on est eq au TG d'une série de référence... En particulier, un TG n'a aucune raison d'être un $o\left(\frac{1}{n}\right)$

CEG prendre $\frac{1}{n}$ sur les2^k et 0 ailleurs

(mais ok si hypohtse croissance)

DE plus, $\frac{1}{n}$ n'est pas la série divegente minimale pour o :$\sum \frac{1}{n\ln n}$div

EXO : aucunde divergente mimal pour o

1.3 Comparaison séries intégrales

$f\geq 0$ décroissant $\implies \sum_1^n f(n) - \int_1^n f$ converge en décroissant (borne inf irrelevant)

DEM par croissance on a $\int_n^{n+1} f \leq f(n)$ d'où en sommant de $n=1,...,N$ l'inégalité $\int_1^{N+1} f \leq \sum_1^N f(n)$, de srote que la suite$\sum_1^N f(n) - \int_1^N f$ est minorée par$\int_N^{N+1} f \geq 0$; cette suite est de plus déroissante : $\delta_n - \delta_{n-1} = f(n) - \int_{n-1}^n f \leq 0$.

si pas décroissant, les deux sens sont faux

CEG : $f(x) = |\sin 2\pi x|$ dv en $\int$ mais $\sum f(n) = 0$cv

CEG : prendre f = pics de plus en plus haut et resserés

Application : H_n

EXO : *à $a>1$ fixé, équivalent de $\sum_{i=1}^{a^n} \sqrt[n]{i}$?*

(mminorer $\sum \sqrt[n]{i} \geq \sum \int_{i-1}^i \sqrt[n]{} = \int_0^{a^n} \sqrt[n]{} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[x^{\frac{1}{n}+1}\right]_0^{a^n} = \frac{n}{n+1}a^{n+1} \sim a^{n+1}$;deme^me, majorer $\sum \sqrt[n]{i} \leq \sum \int_i^{i+1} \sqrt[n]{} = \int_1^{a^n+1} \sqrt[n]{} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[x^{\frac{1}{n}+1}\right]_1^{a^n+1} \sim (a^n+1)^{\frac{n+1}{n}} - 1$; or $(a^n+1)^{\frac{n+1}{n}} \sim a^{n\frac{n+1}{n}} \sim a^{n+1} >> 1$)

EXO : *eq de $\sum \frac{x^n}{1-x^n}$?*

(à $0\leq x<1$ fixé, on a une série de tg $\leq \frac{x^n}{1-x}$, donc géom qui converge. Pour comparer, on introduit $f: t\mapsto \frac{x^t}{1-x^t} = \frac{1}{1-e^{t\ln x}} - 1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\ln(1-x^t)}{-\ln x}\right)$ qui décroit. Alors $\sum_2^N f(n) \leq \sum_2^N \int_{n-1}^n f = \int_1^N f = \frac{\ln(1-x^N)-\ln(1-x)}{-\ln x} \overset{N\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$et dans l'autre sens $\sum_2^N f(n) \geq \sum_2^N \int_n^{n+1} f = \int_2^{N+1} f = \frac{\ln(1-x^{N+1})-\ln(1-x^2)}{-\ln x} \overset{N\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{\ln x} \sim \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ car $\ln(1+x) \sim \ln 2 \prec \ln(1-x)$.)

EXO *calculer $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.* Poser $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ et écrire $\sum_1^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + S_{2N} = \sum_1^N 2\frac{\ln(2k)}{2k} = (\ln 2) H_N + S_N$. Or, par décroissance positive de $t\mapsto \frac{\ln t}{t}$, la suite $\sum_{n=3}^N \frac{\ln n}{n} - \int_3^N \frac{\ln t}{t}dt = Cst + S_N - \int_3^N \ln t\, d(\ln t)$ converge, d'où $S_N = \frac{(\ln n)^2}{2} + Cst + o(1)$. En réinjectant, il vient

$$\sum_1^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln 2N)^2}{2} = (\ln 2)(\ln N + \gamma) + \frac{(\ln N)^2}{2} + o(1)\text{, çàd } \sum_1^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \longrightarrow \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}\text{, CQFD}$$

(on peut le faire direct)

RQ : si f' L^1, alors $\sum f(n) - \int_n^{n+1} f$ acv

COR : si en plus f L^1 alors $\sum f(n)$ acv (mq$\sum \int_n^{n+1} f$ acv)

EG ? ?

1.3.1 Euler Maclaurin

On définit une suite (α_n) de fonction 1-périodiques par $\alpha'_{n+1} = \alpha_n$ et $\int_0^1 \alpha_n = 0$ et $\alpha_0 = 1$ sur $[0,1[$ prolongées sur $\mathbb{R}$ (il correspondent aux $\alpha_n := \frac{\widetilde{B}_n}{n!}$ où $\widetilde{B}_n$ est la fonction 1-périodiqu coincidant avec B_n sur $[0,1[$).

On a $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = X - \frac{1}{2}$, $\alpha'_n = \alpha_{n-1}$ sur $R\backslash Z$ et $\alpha_n(1) = \alpha_n(0)$ noté A_n pour $n \geq 2$.

ATETNON : les α_n sont tous continus à l'exceptino de α_1 !

pour f C^p, mq

$$\int_0^1 f = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_2^p A_k \left[f^{(k-1)}\right]_0^1 + (-1)^p \int_0^1 \alpha_p f^{(p)}.$$

DEMDes ipp sucessivies donnent

$$\int f = [f\alpha_1] - [f'\alpha_2] + \cdots + (-1)^{p-1}\left[f^{(p-1)}\alpha_p\right] + (-1)^p \int f^{(p)}\alpha_p$$

et il suffit de vérifier que $[f\alpha_1] = f(1)\alpha_1(1^-) - f(0)\alpha_1(0^+) = f(1)\frac{1}{2} - f(0)\left(-\frac{1}{2}\right)$, puis que les α_k pour $k \geq 2$ donnent la même valeur évalué en 0 et 1. Pour le signe, vue la nullité des A_k pour $k \geq 2$ impair, on peut remplacer les $(-1)^k A_k$ par A_k.

un coro immédiat est par sommation et 1-périodicité

$$\frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} = \int_1^n f + \sum_2^p A_k \left[f^{(k-1)}\right]_1^n - (-1)^p \int_1^n \alpha_p f^{(p)}.$$

La moitié des crochet ainsi que $\frac{f(1)}{2}$ donne une constante :

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = Cste + \frac{f(n)}{2} + \int_1^n f + \sum_{2 \leq \ k \text{ pair } \leq p} A_k f^{(k-1)}(n) + R_p.$$

avec $R_p = (-1)^{p-1}\int_1^n \alpha_p f^{(p)}$ mais aussi $-A_{p+2}\sum_{i=1}^{n-1} f^{(p+2)}(x_i)$ avec $i < x_i < i+1$

Application : $f = \ln$. On a $\ln^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}$ pour $k \geq 1$.

La somme étudié est $\ln n!$.

Elle commence par

$$Cste + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln = Cste + \frac{\ln n}{2} + n\ln n - n = \ln\left(Cste\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right).$$

Puis vient la somme

$$\sum_{k=2 \text{ (pair}}^p A_k \frac{(-1)^{k-2}(k-2)!}{n^{k-1}} = \sum_1^{p-1} \frac{A_{k+1}(k-1)!}{n^k}$$

et enfin le reste

$$R_p = \int_1^n \alpha_p(t)\frac{(p-1)!}{t^{p-1}}dt$$

qui vaut une constante (l'intégrale sur $[1,\infty]$ à mettre dans le ln) plus un grand O de $\int_n^\infty \frac{dt}{t^p} = O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$. Le reste TL serait plus précis, mais comme $p \geq 2$ est quelconque, on peut conclure :

$$\ln n! = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right) + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 2}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{B_{2p}}{2p(2p-1)}\frac{1}{n^{2p-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

Application : $f(t) = \frac{1}{t}$ on a $f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}$ pour $k \geq 0$.

La somme étudiée est la série harmonique

Elle commence par

$$Cste + \frac{1}{2n} + \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n + Cste + \frac{1}{2n}.$$

La somme ensuite vaut $\sum_2^p \frac{-A_k(k-1)!}{n^k}$.

Puis le reste R_p vaut $-p!\int_1^n \frac{\alpha_p(t)}{t^{p+1}}dt$, soit une constante plus un grand O de $\int_n^\infty \frac{dt}{t^{p+1}} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
On en déduit

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{B_2}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{B_4}{4}\frac{1}{n^4} - \cdots - \frac{B_{2p}}{2p}\frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)$$

Application : $f(t) = \frac{1}{t^\lambda}$ pour $\lambda > 0$ autre que 1 On a $f^{(k)}(t) = (-1)^k \frac{\lambda^{\uparrow k}}{t^{\lambda+k}}$ pour $k \geq 1$,
La somme étudiée est $\frac{1}{1^\lambda} + \frac{1}{2^\lambda} + \cdots + \frac{1}{n^\lambda}$.
Elle commence par

$$Cste + \frac{1}{2n^\lambda} + \int_1^n \frac{dt}{t^\lambda} = Cste + \frac{1}{2n^\lambda} - \frac{1}{\lambda - 1}\frac{1}{n^{\lambda-1}}$$

La somme d'après vaut $\sum_1^{p-1} A_{k+1}\frac{\lambda^{\uparrow k}}{n^{\lambda+k}}$
Puis le reste $R_p$vaut $-\lambda^{\uparrow p}\int_1^n \frac{\alpha_p(t)}{t^{p+\lambda}}dt$, soit (pour $p \geq 2$) une constante plus un grand O de $\int_n^\infty \frac{dt}{t^{p+\lambda}} = O\left(\frac{1}{n^{p+\lambda-1}}\right)$.

d'où le DL

$$\text{si } \lambda > 1 : \sum_1^n \frac{1}{k^\lambda} = \zeta(\lambda) - \frac{1}{\lambda-1}\frac{1}{n^{\lambda-1}} + \frac{1}{2n^\lambda} + \frac{B_2}{2}\frac{\lambda}{n^{\lambda+1}} + \frac{B_4}{4}\frac{\lambda^{\downarrow 3}}{n^{\lambda+3}} + \cdots + \frac{B_{2p}}{2p}\frac{\lambda^{\downarrow(2p-1)}}{n^{\lambda+2p-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\lambda+2p}}\right)$$

$$\text{si } 0 < \lambda < 1 : \sum_1^n \frac{1}{k^\lambda} = \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda} + cst + \frac{1}{2n^\lambda} + \frac{B_2}{2}\frac{\lambda}{n^{\lambda+1}} + \frac{B_4}{4}\frac{\lambda^{\downarrow 3}}{n^{\lambda+3}} + \cdots + \frac{B_{2p}}{2p}\frac{\lambda^{\downarrow(2p-1)}}{n^{\lambda+2p-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\lambda+2p}}\right)$$

1.4 critère condensation Caucy

si $a_n$décoît vers 0, alors $\sum a_n$ et $\sum 2^n a_{2^n}$ sont de même nature

CEG : $a_n = \frac{1}{n}$ sur les 2^k et 0 sinon
CEG : $a_n = 0$ sur les 2^k et $\frac{1}{n}$ sinon

INTERET ? ? ?

2 Se ramener à terme positifs

2.1 Absolue convergenc

acv=>cv dans R ; poser $0 \leq u_n^\pm \leq |u_n|$ et écrire $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$
(pour preuve, dire $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$)

Réciproque fausse : attendre Leibniz

on se ramène à du positif avec $a_n = O(b_n)$ et $\sum b_n$ acv => acv
EG : $\sum \frac{\sin e^{-n} \operatorname{th} \ln n}{n^2} = \sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
ATTNETINo : pas de version divergente : $O\left(\frac{1}{n}\right)$ peut div (si$O$ constant), cv (si $=(-1)^n$), voire être nul !

EXO : $\sum a_n$ acv => $\sum a_n^2$ acv : en effet, $a_n \longrightarrow 0$, donc $0 \leq |a_n| \leq |a_n|^2$ APCR
évidememet, sans les signes, pb.

INtro : que dire de $\sum a_n \sum b_n$? le calul formel fait apparaître un produit de cauchy.
produit de caucyr de deux séreis acv est acv

(dvelopper !)
généralise en remplaçant produit usuel par forme bilinéaire (continue).

Th Mertens : acv*cv = cv :
montrons $|C_{2n}-A_nB_n| \longrightarrow 0$ et $|C_{2n-1}-A_nB_n| \longrightarrow 0$
Faire un dessin : triable isorect $2n\times 2n$ (les couple p,q apparaisant dans C_{2n}) vidé d'un carré $n\times n$ (ceux de A_nB_n) : il reste $\leq$deux termes $\sum |a_p| \left|\sum b_q\right|$ où $p,q>n$, donc tend vers 0.
mais cv*cv peut div : perndre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour les deux, le TG du * est $\geq \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$, donc $\neq o(1)$
rigolo : dv*dv peut cv : $\left(2,2,2^2,2^3\right)$ et $(-1,1,1,1,...)$

PROP dans un evn, si $a_n \sim \lambda_n a$ où $\lambda_n \geq 0$,alors $\sum a_n$cv ssi$\sum \lambda_n$ cv.

2.2 Leiniz

dessin...
EG : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ cv ssi $\alpha>0$
En particulier, pour $r_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum r_n$cv mais pas $\sum r_n^2=H_n$, d'où plein de contre exemple

AUCUNE THeorèm sur les SATP n'est valable en génrale sans l'hypothèse de signe : tout véirifer à la main

CEG si pas décroissance : $\frac{(-1)^n}{n^{1 \text{ ou } 2}}$: somme partielles
CEG pour TG équivalent : $(-1)^n r_n + r_n^2 \sim (-1)^n r_n$, multipier par $(-1)^n$ fait cv à gauche mais diverger à droite
CEG pour $|a_n|<|b_n|$et$\sum b_n$cv => $\sum a_n cv$: $\frac{1}{n+1}<r_n$
CEG éq TG si pas ≥ 0 : $r_n+r_n^2 \sim r_n$
IMPORTANT : ce ne sont pas nécessairement les terme prépoondérant qui font diverger la série !
CEG $a_n=o(b_n)$et$\sum b_n$cv =>$\sum a_n$cv : $a_n=(-1)^n r_n^{2\text{ou}4}$ et $b_n=r_n$
CEG : $\sum r_n$ cv mais $\sum \ln(1+r_n)$ div
CEG : $\sum e^{r_n}-1$ div mais $\sum \ln(1+a_n)=\sum r_n$ div
eg : $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n \sqrt[n]{n}}$. On veut la croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} \ln x = e^{\frac{\ln x}{x}} \ln x$, qui croît comme $u \mapsto ue^{ue^{-u}}$. On dérive : on factori l'exp, il reste $1+u\frac{d}{du}\left(ue^{-u}\right)=1+ue^{-u}(1-u) \longrightarrow 1$,donc >0 Apcr

RQ : mq $\sum \frac{(-1)^n}{n}=\ln 2$: appliquer TL à ln entre 1 et 2

2.3 Abel & IIP

$\int a=O(1)$
$b_n=o(1)$
$\sum [\partial b]_n$ acv
ALORS $\sum a_nb_n$ Cv
(idem pour les intégrale)
cp : les hphothèse sur b_n sont vérifiée pour b_n décroissante ->0
cp : $a_n=e^{in\theta}$ où $\theta \notin 2\pi Z$ -> DESSIN !
pour $\theta=\pi$, on rrtouve Leibniz, ce qui monrte que ABel est plus fort que Leibniz ; Dailleurs $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$vérifie les hypod'abel, mais n'est pas monoto

EG : $\sin\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}=\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}-\frac{\sin^3 n}{6n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$. ON linéairse tous les sinus -> Abel !

2.4 La méthode ultime qui utilise tout ce qui précède : DLifier le TG

On vient de la voir :

DL : séries de références plus un OACV (souvent $O\frac{1}{n^2}$)

EG : $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pas beosin d'écrire le terme d'ordre 2 du DL, la constante ne nous apportera aucune information sur la nature de la série -> on met tout dans la poubelle $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

EG : $\cos\left(\pi\frac{2n^3+n^2+an+b}{2n^2}\right) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi a}{2n} + \frac{\pi b}{2n^2}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi a}{2n} + \frac{\pi b}{2n^2}\right) = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi a}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ alternée plus acv

si ACV pas controlable (présence d'un paramètre ?), on DL à un signe **constant** (besoin de o, même s'il n'inlfue pas le dernier terme car éuivalent à signe consstane, il faut s'emmerder à le réécrire)

EG : $\sum \operatorname{th}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{3n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$: le dernier terme est $\sim \frac{1}{n^{3\alpha}}$ qui cv en $\sum$ ssi $\alpha > \frac{1}{3}$ (car tout le monde est ≥ 0)

EG (faux paramètre) $\cos\left(\frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{\frac{a}{2n}+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{a}{2n}+\frac{1}{2n^2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4n}\left[a+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) = \frac{\pi a}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ cv ssi $a \neq 0$

EG : équiavalent de $\prod_2^n\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$? On fait un DL à $o(1)$ du ln :$\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3\cdot/2}}\right) = cst - \frac{1}{2}\ln n + o(1)$ d'où $\sim \frac{e^C}{\sqrt{n}}$ (qui du coup$\longrightarrow 0$).

Rq : des fois, pour montrer que TG tendd vers 0, on a besoin de faire un DL pour voir la limite. Ne pas hésiter à pousser le DL jusqu'au premier terme acv.

3 Lien suites séries : dérvie et intérgales discretes

l'*intégrale discret* d'une suite a_n est $\left[\int a\right]_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_0$

La *dérivée discret* d'une suite a_n est $[\partial a]_n = a_n - a_{n-1}$ (avec $a_{-1} = 0$)

on retrouve $\int \partial a = a - a_0$ (télescopage) et $\partial \int a = a$ (un terme suirvant).

Ainsi, pour étudier a_n, on pourra regarder $\sum a_n - a_{n-1}$, ou $\sum f(a_n) - f(a_{n-1})$ si f est gentille.

Cela permet d'obtnir un équivalent de la suite cf théo fin cours

EG : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$: on regarde la série des différences de $H_n - \ln n$ pour avoir γ (ou on applique compa série intégrale)

EXO : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$ ($u_0 > 0$) : CNS pour que u_n cv ?($\alpha > 1$) Rapidité convergence ?

$$l - u_N = \sum_{n>N}(u_{n+1} - u_n) \sim \frac{1}{l(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

EXO : eq de $\prod_1^n\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right)$? On fait un DL du ln à $o(1)$, d'où $\sim \frac{C}{n}$

3.1 Un peu de Produits

le produi $\prod(1+u_n)$ cv (vers $\neq 0$) si $\sum u_n$ acv :

DEM : $|P_n - P_{n-1}| = |u_n P_{n-1}| \leq u_n \prod(1+|u_i|) \leq u_n e^{\sum|u_i|} = O(u_n)$.

DM de randé

3.2 Système dynamique

si $\alpha := |f'(a)| < 1$ (point attractif), on mq qu'il y a une constante C tq $|u_n - l| \sim C\alpha^n$. C'est dire ln $\frac{u_n - l}{\alpha^n}$ cv, ie série des différences converge. on mq le tg vaut $\ln(O(|u_n - l|)) = O(\lambda^n)$ pour $\alpha < \lambda < 1$, CQFD

EG : $\sqrt{2+\cdot}$ en 2

si point attraticif lent (dérviée vaut 1), eg $f(x) = x + o(x)$ en l'inifni

EXO : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda}{u_n^\alpha}$ pour $\lambda > 0$ et $0 < \alpha < 1$. Mq $u_n \longrightarrow \infty$, puis (comparaison $\sum \int$ de t^α) que $u_n \sim (\lambda\alpha n)^{\frac{1}{\alpha}}$

EXO : $u_n \longrightarrow \infty > 1$ en croissant, $u_{n+1} - u_n \sim \ln n$: Mq $u_n \sim n \ln n$ (comparaison $\sum \int$ de $\frac{1}{\ln t}$)

EXO : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n^\alpha u_n^2}$ pour $\alpha \leq 1$. Mq (comparaison $\sum \int$ de t) que $u_n \sim \sqrt{\frac{2}{1-\alpha} n^{1-\alpha}}$

Plus généralement, si $\frac{f(t)}{t} = 1 - \lambda t^\alpha + o(t^\alpha)$, on regarde $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour une bonne puissance ($\beta = -\alpha$), d'où Cesàro et équivalent.

VOIR TOSEL FIN COURS SERIES NUME

3.3 FAF

par l'exemple : $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Il n' s'agit pas d'un $\sum f(u_{n+1}) - f(u_n)$, mais presque : ici le f dépend du n. Cela ne nous empehce pas d'pplqiuer la FAF : $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1}{n} \frac{1}{c_n^{1-\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{c_n} \sim \frac{1}{n^2}$ CV

On aurrait aussi pu DLifier :

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = O(1)\left(e^{O\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3.4 Raab Duhamel

forme optimisée ? ? ? ? chercher $\varepsilon_n = o(1) > 0$ tq $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \varepsilon_n + o(\varepsilon_n) => \sum a_n$cv

EG : $\sum \sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \ldots \sin \frac{x}{\sqrt{n}}$. On écrit $\prod \sqrt{k} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$, et on écrit $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \sim x$ (si $x \neq 0$), d'où réglé si $x \neq 1$. Si $x = 1$, on regarde plus loin :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc cv (et même $u_n \sim \frac{C}{\sqrt[6]{n}}$)

EG : soit f C^2. Regarder $\sum \prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

3.5 Stirling

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

APP : $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

4 Somamtion par paquest

On ne peut pas regourpe comme on veut, puisqu'une série est une suite et qu'on peut changer le comportement d'une suite en réordonnément ses termes ! (cf th Riemann)

$U_n = \sum_{\varphi_n \leq i < \varphi_{n+1}} u_i$

$\sum u_n$cv => $\sum U_n$ cv.
Recip fausse : paquest pairs de $(-1)^n$.
Il faut $u_n \longrightarrow 0$ de toute façon. Sil 'on rajoute "tout paquet chacun de signe constant" ou "taille paquet borne", alors ok.
(Autre cas où ok : si la série est ACV : en effet, la différence entre la somme partielle et celle des pasquest est majorée par une tranche, laquelle est majorée par le reste de la série des modules)

EG paquet signe constant : $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$: on regarde $\sum_{n^2}^{n^2+2n} \frac{1}{k} = H_{n^2+2n} - H_{n^2} = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ CV par alternance.
EG taille bornée $\sum \frac{a_n}{n}$ où a_n périodiqe : cv ssi $\sum a_n = 0$. Pour $a_n = (1, -1, 1, -1)$, on retrouve classique.
(parallèl avec $\int^{\to\infty} \frac{f(t)}{t}$ où f périodique, qui cv ssi $\langle f \rangle = 0$: EG $\frac{\sin x}{x}$)

EXO *Soit (a_n) positive décroissante vérifiant $a_n \geq \frac{1}{n}$ pour une infinité de n. Montrer que $\sum a_n$ diverge.*
DEM Notons n_k une infinité comme dans l'énoncé. La série étant à termes positifs, sa divergence équivaut à celle de ses paquets :

$$\sum_{n_{k-1} < i \leq n_l} a_i \geq \sum_{n_{k-1} < i \leq n_l} a_{n_k} \geq (n_k - n_{k-1}) \frac{1}{n_k}.$$

Si ce dernier ne tend pas vers 0, on a terminé. Sinon $\frac{n_k - n_{k-1}}{n_k} \sim -\ln\left(1 - \frac{n_k - n_{k-1}}{n_k}\right) = \ln \frac{n_k}{n_{k-1}}$, donc la divergence de $\sum \frac{n_k - n_{k-1}}{n_k}$ équivaut à celle de $\sum \ln \frac{n_k}{n_{k-1}}$, donc à celle de la suite n_k, ce qui est vrai.

5 Th de Fubini : cas des familles sommables

funbini faux : $\sum \sum a_{n,p} - a_{n,p-1}$ où $a_{n,p} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$

Th Riemann sur semi convergentes

6 Accelération convergence

soit unesérie cv de TG a_n
Idée générale : trouver un b_n tq le TG $a_n - \delta b_n$ tende plus vite vers 0 que a_n.
Alors la somme partielle de $a_n - \delta b_n$, qui vait $S_N - b_N$, approchera miux la somme

EG : Suppos un DL du TG $a_n$en puissance de $\frac{1}{n}$ (de d à D). Alors $S_n = O\left(\frac{1}{n^{d+1}}\right)$
On cherche b_n en pusisance de $\frac{1}{n}$ (de $d-1$ à $D-1$) tq $a_n - \delta b_n = O\left(\frac{1}{n^{D+1}}\right)$.
Le calcul montre qu'on a un système triangulaire à résoudre.
Alors le rete paritle $\sum a_n - \delta b_n$est un $O\left(\frac{1}{n^D}\right)$, Donc $S_n - b_n$ approche mieux S que S_n (si $D > d+1$)

marche aussi pour DA des restes : si $a_n - \delta b_n = o(c_n)$, alors $R_n(a) - b_n = o(R_n(c))$.

si $\sum a_n$ div, on cherche b_n tq $a_n - \delta b_n$ cv. Alors $S_n = b_n + (?) + R_n(a - b')$. La contate est à deviner, mais on est ramner au cas précédent.

7 Thoérème de comparaison

grande analogie discret continu

TH : sous l'hypothèse f' L^1, on a l'équivalence $\sum f(n)$cv ssi $\int^n f$ cv

dem : montrons $\sum \left|\int_n^{n+1} - f(n)\right|$cv. On borne par $\sum \int_n^{n+1} |f - f(n)| \leq \sum \int_n^{n+1} \left|\int_n^t f'\right| dt \leq \sum \int_n^{n+1} |f'|\, dt = \int |f'|$. Alors $\int^n f - \sum^n f(k)$ cv.

EG : $\frac{\cos \sqrt[3]{n}}{n^{\frac{2}{3}}}$. Sommation par paquets pas évidente : la taille croit, contrairement à $\frac{\sin n}{n}$.

On regarde $\frac{e^{ir}}{r^2} \longrightarrow \frac{e^{ir}}{r^2}\left(i - \frac{2}{r}\right) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$. On mulitplie par la dérivée de $r = x^{\frac{1}{3}}$, qui est $O\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$, d'où un tout en $O\left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$ qui est L^1. On est donc ramne à l'intégrae $\int \frac{\cos r}{r^2} dx$ où $x = r^3$ et $dx = 3r^2 dr$,d'où $\int \cos r = \sin r_n$, qui dv par oscillation.

7.1 cas continu : les intégrales

Enoncé six théo sur intégrale div/cv avec $\Theta \in \{o, O, \tilde{}\}$ et $x \in \overline{R^+}$
DIV : $f\Theta g \implies \int_1^x f \Theta \int_1^x g$ (restes $\int_x^\infty$ pas définis de toute façon)
CV : $f\Theta g \implies \int_x^\infty f \Theta \int_x^\infty g$ (les intégrales cv, donc on connaît l'ordre 0 de $\int_1^x$)

EG : en 0, $\int_1^x \frac{\sin t}{t^3} dt \sim \int_1^x \frac{dt}{t^2} \sim \frac{1}{x}$
EG : en 0, $\text{acs}(1-x) = \int_0^{1-x} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \sim \int_0^{1-x} \frac{-dt}{\sqrt{1-t}} = \int_1^x \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{2x}$
EG : en ∞ $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t + \ln t - 1}} \sim \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$
EG : en ∞ $\int_2^x \frac{\text{atn}\, t dt}{t \ln t} \sim \int_2^x \frac{\frac{\pi}{2} dt}{t \ln t} \sim \frac{\pi}{2} \ln \ln t$

Utiliser l'ipp pour rendre négligeable la nouvelle intégrale (heursique : si polynôme, dériver ralentit la croissance)–> juste à se oucier du corchet
EG (dvi) :$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x - \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}$: la nouvelle intégrande est un $o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$, donc un o de l'intégrande de départ ! D'où l'équivalent $\frac{x}{\ln x}$
EG : $\int_1^x e^{-\sqrt{\ln t}} dt = \left[t e^{-\sqrt{\ln t}}\right]_2^x \pm \int_1^x \frac{e^{-\sqrt{\ln t}}}{2\sqrt{\ln t}} dt$ ($e^{-\sqrt{\ln t}} \geq e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$ pas L^1) $\sim x e^{-\sqrt{\ln x}}$
EG (cv) $\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$: la nouvelle intégrande est un $o\left(e^{-t^2}\right)$, donc un o de l'intégrande de départ, d'où l'équivalent $\frac{e^{-x^2}}{2x}$

EXO : eq de $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ en 1 ? heuristiqe :$\simeq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \ln \frac{x^2-1}{x-1} \longrightarrow \ln 2$.
Propre : $|f(x) - \ln(x+1)| \leq \int_x^{x^2} \left|\frac{dt}{\ln t} - \frac{dt}{t-1}\right|$, et l'intégrane est bornée, donc l'intégrale tend vers 0.

TH : si $f \longrightarrow l$, alors moyenne de f ($\frac{1}{x} \int_0^x f$) tend aussi vers l (dem : différencier les cas $l = 0$ et $l \neq 0$)

7.2 Cas discrte : les sésries

même 6 théos !
DIV : $a_n \Theta b_n \implies \sum_1^n a_k \Theta \sum_1^n b_k$ (restes pas définis de toute façon)
CV : $a_n \Theta b_n \implies \sum_n^\infty a_k \Theta \sum_n^\infty b_k$ (les sséries cv, donc aucune info en comprant des constntes)

EG : *soit* $\sum a_n$ *de somme nulle. Mq* $\sum_1^N n a_n = o(N)$
DEM On écrit

$$\sum_1^{N-1} n a_n = \sum_0^{N-1} n(r_n - r_{n+1}) = \sum_1^{N-1} n r_n - \sum_1^N (n+1) r_n = -N r_N - \sum_1^N r_n$$

puis $r_n = o(1)$ implique $\sum r_n = o(n)$ et la conclusion.

EG : Cesàro

EG div : $\sum_1^n \frac{1}{\sqrt{k^2+5k+1}} \sim \sum_1^n \frac{1}{\sqrt{k^2}} \sim \ln n$

EG cv : $\sum_n^\infty \frac{1}{(k^2+5)\ln(k+1)} \sim \sum_n^\infty \frac{1}{k^2 \ln k} ???\int_n^\infty \frac{dt}{t^2 \ln t} \sim \frac{1}{n \ln n}$

sur dernier exxemple, il nous faut un PONT :

théo de comparaison série intégrale pour fonctions mono

(d'abord cas où varie lentement, ied $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$, Puis cas où vairation rapide, ie $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l > 1$)

7.3 Comparaison série intégrale pour vairation lente

f mono sur $[1, \infty[$, $f(n) = o\left(\int_1^n f\right) => \sum_1^n f(k) \sim \int_1^{n+1} f$

(pour décroissant, on sait déjà que $\sum_1^n f(k) = \int_1^n f + cst + o(1)$)

$f \geq 0$ L^1 décroît sur $[1, \infty[$, $f(n) = o\left(\int_n^\infty f\right) => \sum_n^\infty f(k) \sim \int_n^\infty f$

EG : $\sum_2^n \frac{1}{\ln k} \sim \int^n \frac{dt}{\ln t}$: on veut $\frac{1}{\ln n} = o \int^n \frac{dt}{\ln t}$; or $\frac{1}{t} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$, puis intégration. POur finir, IPP donne $\sim \frac{n}{\ln n}$.

EG : $(\alpha > 0)$: $\sum_1^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$: on veut $n^\alpha = o\left(\int_n^\infty t^\alpha dt\right) = o\left(n^{\alpha+1}\right)$ ok. PLUS simple : passer par les sommes de Riemann

EG $\sum \ln^2 k \sim \int_1^n = [(t \ln t - t) \ln t] - \int (\ln t - 1) = [(t \ln t - t) \ln t] - [t \ln t - 2t] \sim n \ln^2 n$

EG : $\sum_n^\infty \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

EG : $\sum_n^\infty \frac{1}{k \ln^\alpha k} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\ln^{\alpha-1} n}$

EG : $\sum_1^n e^{-\sqrt{\ln k}} \sim \int_1^n e^{-\sqrt{\ln t}} dt$ car IPP mq $\int \sim \frac{n}{e^{\sqrt{\ln n}}}$

EG : DA de H_n : on a vu que si $x_n := H_n - \ln$ alors $x_{n+1} - x_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, d'où $\gamma - x_n = -\sum_n^\infty \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$

EG : DA de $n!$: on a vu que si $x_n := \ln \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ alors $x_{n+1} - x_n \sim \frac{-1}{12n}$, d'où $x_n - ccst \sim \frac{1}{12n}$, doù $n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

7.4 Comparaison série intégrale pour vairation rapide

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l > 1$ ou ∞, alors $S_n \sim \frac{l}{l-1} a_n$ (idée : $u_{n-k} \simeq \frac{u_n}{l^k}$)

Dem : Mq $T_n := S_n - \frac{l}{l-1} a_n = o(S_n)$. l suffit de mq $T_n - T_{n-1} = o(u_n)$

EG : $\sum 2^k (k-1) \ln^2 k \sim \frac{2}{2-1} 2^n (n+1) \ln^2 n \sim 2^n n \ln \ln n$

EG : $\sum_1^{n!} k^\alpha \sim n!^\alpha$

Pour les restes :

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l < 1$, alors $R_n \sim \frac{u_n}{1-l}$

EG : $\sum_{k \geq n} \frac{1}{k!^\alpha} \sim \frac{1}{n!^\alpha}$ $(l = 0)$

EG : $\sum_{k \geq n} \frac{1}{e^k \ln k} \sim \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \frac{1}{e^n \ln n}$