

# Théorie de la dimension

Marc SAGE

9 mars 2009

## Table des matières

1	Contre-exemples en dimension infinie	3
2	Mise en jambe	3
3	Suite exacte d'ev	5
4	Endomorphismes stabilisant tous les sev d'une dimension fixée	5
5	Sur les polynômes annulateurs	6
6	Une CNS pour que noyau et image soient en somme directe	6
7	Entremets	7
8	Modulo le groupe linéaire, tout endomorphisme est un projecteur	8
9	Modulo le groupe linéaire, les non inversibles sont les nilpotents	9
10	Sur les produits de nilpotents	10
11	Combinatoire sur les corps finis	11
12	Existence de supplémentaire commun	12
13	Suite des noyaux itérés, indice d'un endomorphisme, décomposition de Fitting	13
14	Factorisation d'applications linéaires et inclusion d'images	16
15	Factorisation d'applications linéaires et inclusion de noyaux	17
16	Rang de formes linéaires et intersections de noyaux	18
17	Idéaux à droite de $L(E, F)$	19
18	Idéaux à gauche de $L(E, F)$	24
19	Idéaux bilatères de $L(E, F)$	31
20	Pour aller plus loin, une incursion dans le bidual	31

On abrégera dans la suite « (sous-)ev » en « (s)ev » et « dimension » en « *dim* ».

Nous serons amenés à parler de cardinaux infinis. Nous rappelons au lecteur quelques éléments prolongeant les propriétés des cardinaux finis qu'il connaît bien, ce afin d'éviter qu'il ne prenne la fuite :

1. *tout cardinal est un ensemble*<sup>1</sup> ;
2. *tout ensemble est en bijection avec un unique cardinal ; ainsi, deux ensembles ont même cardinal ssi ils sont équipotents ;*
3. *les cardinaux sont totalement ordonnés*<sup>2</sup> par la relation « s'injecte dans » ;
4. *on peut additionner et multiplier des cardinaux, la multiplication étant distributive sur l'addition ;*
5. *l'addition et la multiplication par un cardinal fixé sont croissantes.*

La codimension<sup>3</sup> d'un sev  $F$  sera notée  $\text{codim } F$  ou  $\text{codim}_E F$  s'il y a besoin de préciser l'ev sous-jacent. C'est aussi la dimension de l'ev quotient  $E/F$ . On a l'égalité suivante en toute dimension :

$$\dim F + \text{codim } F = \dim E.$$

Bien que cette feuille concerne en partie la *dim* finie, nous regarderons systématiquement ce que deviennent les énoncés lorsqu'on passe en *dim* infinie – le lecteur souhaitant faire ses débuts en toute sécurité pourra toujours laisser de côté ces questions. Nous rappelons donc que, *quelle que soit la dimension* :

1. *une base est une famille libre et génératrice*<sup>4</sup> ;
2. *toutes les bases ont même cardinal ;*
3. *toute famille libre se complète en une base ;*
4. *tout sev admet un supplémentaire ;*
5. *deux sev de  $E$  sont supplémentaires ssi une base de l'un et une base de l'autre sont complémentaires dans une base de  $E$  ;*
6. *deux ev sont isomorphes ssi ils ont même *dim* ;*
7. *deux ev  $E$  et  $F$  vérifient  $\dim E \leq \dim F$  ssi  $E$  est isomorphe*<sup>5</sup> *à un sev de  $F$  ;*
8. *le rang d'une application linéaire est la codimension de son noyau ;*
9. *l'application  $\dim$  est croissante et sous-additive*<sup>6</sup>.

Les propriétés ci-dessus étant à la base de la plupart des démonstrations en *dim* finie, il nous a semblé légitime de regarder la *dim* infinie dans la mesure où que les outils sont (presque) les mêmes<sup>7</sup>.

Signalons deux exceptions :

1. *la *dim* finie permet des raisonnements par récurrence*<sup>8</sup> *sur la dimension ;*
2. *la **stricte** croissance de la dimension n'est valable qu'en *dim* finie*<sup>9</sup>.

Nous invitons le lecteur à commencer par le premier exercice afin de voir les conséquences du second point.

<sup>1</sup>C'est une propriété et non une définition ! On représente ainsi le cardinal fini  $n + 1$  par l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n\}$  des entiers qui le précèdent, en partant du vide pour représenter 0.

<sup>2</sup>La relation « s'injecte dans » est clairement symétrique et transitive, le théorème de Cantor-Bernstein assurant qu'elle est anti-réflexive modulo équipotence. Pour une bonne définition des cardinaux, la relation ci-dessus est un ordre ? L'axiome du choix permet ensuite de montrer que cet ordre est total.

<sup>3</sup>La *codimension* d'un sev  $F$  est la dimension commune  $F$  de tous ses supplémentaires. Pour montrer que deux supplémentaires  $S$  et  $S'$  sont effectivement isomorphes, il suffit de dire que le projecteur  $\pi : F \oplus S \rightarrow S$  induit un isomorphisme sur tout supplémentaire de son noyau  $F$ , en particulier  $S'$ .

<sup>4</sup>C'est une définition.

<sup>5</sup>Fixons des bases  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$  et  $(f_j)_{j \in J}$  de  $F$ . L'inégalité  $\dim E \leq \dim F$ , qui s'écrit aussi  $I \leq J$ , signifie que l'on a une injection  $I \hookrightarrow J$ . En considérant les  $f_j$  dont les  $j$  sont atteints par une telle injection, on obtient un sev de  $F$  de même *dim* que  $E$ , donc qui lui est isomorphe. Réciproquement, si  $E$  est isomorphe à un sev de  $F$ , mettons  $E \xrightarrow{\sim} E'$ , alors on peut compléter la base  $\varphi(e_i)$  de  $E'$  en une base de  $F$ , ce qui définit une injection de  $I \hookrightarrow J$ .

<sup>6</sup>En toute dimension, Grassmann permet d'écrire

$$\dim(A + B) = \underset{A \times B}{\text{codim}}(A \cap B) \leq \dim(A \times B) = \dim A + \dim B.$$

Pour définir  $\dim A + \dim B$ , on prend une base  $(a_i)_{i \in I}$  de  $A$ , une base  $(b_j)_{j \in J}$  de  $B$ , puis on forme la réunion disjointe  $I \amalg J$ .

<sup>7</sup>cf. feuille sur les ev pour une démonstration des points 3 et 4 qui utilisent l'axiome du choix

<sup>8</sup>Le lecteur connaisseur de techniques ordinales pourra toujours en *dim* infinie remplacer ces derniers par des inductions transfinites.

<sup>9</sup>Nous ne pouvons donc plus, en *dim* infinie, montrer qu'un sev  $V \subset E$  vaut tout l'espace  $E$  en montrant l'égalité des dimensions.

# 1 Contre-exemples en dimension infinie

Soit  $E$  un ev de dim infinie.

1. Montrer que l'application  $\dim$  n'est pas strictement croissante.
2. Montrer qu'un endomorphisme de rang  $\dim E$  n'est pas nécessairement surjectif.
3. Montrer qu'un endomorphisme injectif n'est pas nécessairement surjectif. Même question en échangeant « injectif » et « surjectif ».
4. Montrer que deux sev  $F$  et  $G$  en somme directe tels que  $\dim F = \text{codim } G$  ne sont pas forcément supplémentaires.

## Solution proposée.

1.  $E$  contient une suite libre  $(x_n)$  de vecteurs. Les sev  $F_n := \text{Vect}_{k \geq n} \{e_k\}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  forment alors une suite strictement décroissante de  $E$  mais sont tous de même dimension dénombrable<sup>10</sup>.
2. C'est un corollaire du point précédent : prendre par exemple dans  $\mathbb{R}[X]$  la multiplication par  $X$  (ou par n'importe quel polynôme non constant).
3. Toujours dans  $E = \mathbb{R}[X]$ , la multiplication par  $X$  est injective non surjective et la dérivation est surjective non injective. On peut aussi considérer les « tapis roulants » de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  :

$$\begin{aligned}(a, b, c, \dots) &\mapsto (0, a, b, c, \dots), \\ (a, b, c, \dots) &\mapsto (b, c, \dots).\end{aligned}$$

4. C'est encore un corollaire du premier point. Il suffit d'après le théorème du rang de trouver un endomorphisme dont les noyau et image sont en somme directe mais n'engendrent pas tout l'espace – par exemple, un endomorphisme injectif non surjectif.

**Remarque.** Le lecteur doit connaître les ev canoniques  $K^n$  pour  $n \geq 0$  et plus généralement les  $K^{(I)}$  où  $I$  est un ensemble quelconque indexant n'importe quelle base<sup>11</sup>. Ainsi, en classant ces ev selon la taille de  $I$ , le plus « petit » d'entre eux qui soit de dim infinie correspond à  $I = \mathbb{N}$  : c'est l'espace  $K^{(\mathbb{N})} = K[X]$  des polynômes. Il est donc normal d'y penser en premier pour des contre-exemples.

On en profite pour rappeler que la dérivation sur  $K[X]$  n'est rien d'autre, dans la base des  $\frac{X^n}{n!}$ , que le tapis roulant

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots).$$

Dans la base canonique, la dérivation est donc un tapis roulant pondéré. Elle n'est pas l'apanage de  $K^{(\mathbb{N})}$  et se définit très bien sur  $K^{\mathbb{N}}$  comme le montre l'application ci-dessus ; il n'y a donc pas lieu de croire qu'il s'agisse d'un endomorphisme magique très particulier.

## 2 Mise en jambe

1. Soient  $E$  et  $F$  deux ev,  $a \in E$  et  $b \in F$ . Peut-on construire une application linéaire envoyant  $a$  sur  $b$  ?
2. Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un ev  $E$  de dim finie  $n$  dont le produit est nul et la somme inversible. Montrer que  $\text{rg } u + \text{rg } v = n$ . Donner des exemples de tels  $u, v$ .
3. Donner une CNS sur deux sev d'un ev  $E$  de dim finie pour qu'il existe un endomorphisme de  $E$  dont l'image et le noyau soient ces deux sev. Que se passe-t-il en dim infinie ?

## Solution proposée.

<sup>10</sup>Le cardinal est strictement croissant sur les ensembles finis mais seulement croissant sur les infinis. On vient de transformer en linéaire le fait que les intervalles d'entiers  $[n, \infty[$  croissent strictement mais sont tous équipotents (à  $\mathbb{N}$ ).

<sup>11</sup>ce qui montre que  $\dim K^{(I)} = \text{Card } I$

1. Si  $a$  est nul, le vecteur  $b$  n'a pas beaucoup de choix s'il veut être l'image d'une application linéaire : il doit être nul (et réciproquement l'application nulle convient).

Si  $a$  est non nul, on peut considérer un supplémentaire  $E = Ka \oplus S$  puis définir une application linéaire en envoyant  $a$  sur  $b$  et tous les éléments de  $S$  sur 0. Une telle application convient.

Si l'on veut expliciter, on peut prendre une base  $(a_i)$  de  $S$  afin de pouvoir parler de la forme coordonnée  $a^*$  dans la base  $\{a\} \cup \{a_i\}_i$ . L'application construite s'écrit alors  $a^*(\cdot)b$ .

2. En supposant le produit  $uv$  nul, les hypothèses se réécrivent  $\begin{cases} \text{rg}(u+v) = n \\ \text{Im } v \subset \text{Ker } u \end{cases}$ . Prenant la dimension dans la précédente inclusion, il vient (en appliquant le théorème du rang)

$$\text{rg } v \leq \dim \text{Ker } u = n - \text{rg } u.$$

Pour conclure, il s'agit donc de montrer  $\text{rg } u + \text{rg } v \stackrel{?}{\geq} n = \text{rg}(u+v)$ . Or, cette dernière inégalité est toujours vérifiée :

$$\text{rg}(u+v) = \dim \underbrace{\text{Im}(u+v)}_{\subset \text{Im } u + \text{Im } v} \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \stackrel{\text{Grassmann}}{=} \text{rg } u + \text{rg } v - \underbrace{\dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v)}_{\leq 0}.$$

Une manière de construire de tels  $u, v$  est de partir d'une décomposition  $E = A \oplus B$  et de poser  $\begin{cases} u = \text{Id} \oplus 0 \\ v = 0 \oplus \text{Id} \end{cases}$ .

3. Une condition nécessaire est donnée par le théorème du rang : les dimensions de nos sev doivent être complémentaires (à celle de  $E$ ). Insistons lourdement : il n'est pas écrit « nos sev doivent être supplémentaires » !

Soient réciproquement  $I$  et  $K$  deux sev de dim complémentaires. Pour construire un endomorphisme d'image  $I$  et de noyau  $K$ , on doit envoyer une base de  $K$  sur  $\{0\}$  ; ainsi soit-il. Ensuite, pour compléter la définition de  $u$ , il faut définir  $u$  sur un supplémentaire  $S$  de  $K$ . Pour avoir la bonne image, on envoie une base de  $S$  sur une base de  $I$ , ce qui est possible au vu de l'hypothèse sur les dimensions.

Vérifions qu'un  $u$  ainsi construit a les bons noyau et image.

Il est déjà clair que  $K \subset \text{Ker } u$  ; montrons l'inclusion réciproque. Soit  $a$  dans  $\text{Ker } u$  que l'on décompose selon  $K \oplus S$ , mettons  $a = k + s$ . Il vient alors

$$0 = u(a) = u(k) + u(s) = u(s).$$

Or, en notant  $(s_k)$  et  $(i_k)$  les<sup>12</sup> bases de  $S$  et  $I$  qui nous ont servi pour construire  $u$ , le vecteur  $s = \sum \lambda_k s_k$  est envoyé  $\sum \lambda_k i_k$  ; par liberté des  $i_k$ , les  $\lambda_k$  sont tous nuls, donc  $s$  est nul, d'où  $a = k \in \text{Ker } u$ , *CQFD*.

Par ailleurs, l'inclusion évidente  $I \subset \text{Im } u$  devient une égalité en prenant les dimensions et en utilisant le théorème du rang, ce qui termine les vérifications.

En dimension infinie, la démonstration ci-dessus achoppe en un point : passer de l'inclusion  $I \subset \text{Im } u$  à l'égalité nécessite la *stricte* croissance de dim. Pour un contre-exemple, on reprend le tapis roulant du premier exercice

$$(a, b, c, \dots) \mapsto (0, a, b, c, \dots).$$

La condition nécessaire «  $I$  est isomorphe à un supplémentaire de  $K$  » n'est donc plus suffisante.

**Remarque.** Le second point reste valable en dimension infinie sous la seule hypothèse «  $u+v$  surjectif » mais fait appel au calcul des cardinaux infinis. Le point utilisé est qu'une réunion disjointe de deux ensembles infinis est équipotente au plus grand des deux. Ainsi, lorsque  $E$  est de dim infinie, on a toujours

$$\dim E = \text{rg}(u+v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v,$$

donc  $\text{rg } u$  ou  $\text{rg } v$  est infini, donc la somme  $\text{rg } u + \text{rg } v$  vaut le plus grand des deux (c'est clair si le plus petit est fini), a fortiori est  $\leq \dim E$ , d'où l'égalité recherchée.

---

<sup>12</sup>En toute rigueur, on pourrait obtenir le même  $u$  avec d'autres bases – dilater par exemple tous les vecteurs par un même scalaire non nul.

### 3 Suite exacte d'ev

On se donne  $E_0, E_1, \dots, E_n$  des ev de dim finie et  $f_0, \dots, f_{n+1}$  des applications linéaires entre les  $E_i$

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} E_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n+1}} \{0\}$$

telles que<sup>13</sup>  $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$  pour tout  $i = 0, \dots, n$ . Montrer que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim E_i = 0.$$

#### Solution proposée.

Il suffit d'utiliser le théorème du rang :

$$\dim E_i = \underbrace{\dim \text{Ker } f_{i+1}}_{=\text{Im } f_i} + \text{rg } f_{i+1} = \text{rg } f_i + \text{rg } f_{i+1}.$$

En posant  $E_{n+1} := \{0\}$  pour homogénéiser les notations, la relation ci-dessus tient pour  $0 \leq i \leq n+1$ . En faisant la somme alternée pour ces  $i$ , tous les termes se télescopent, donc ne restent que les premier et dernier termes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim E_i &= \text{rg } f_0 + \underbrace{\text{rg } f_1 - \text{rg } f_1}_{=0} - \underbrace{\text{rg } f_2 + \text{rg } f_2}_{=0} + \dots + (-1)^n \text{rg } f_{n+1} \\ &= \text{rg } f_0 + (-1)^n \text{rg } f_{n+1}. \end{aligned}$$

Or, les applications  $f_0$  et  $f_{n+1}$  sont nulles, ce qui conclut.

**Remarque.** La soustraction de cardinaux infinis n'étant pas définie, on ne cherchera pas trop longtemps à donner du sens à cet énoncé en dim infinie.

### 4 Endomorphismes stabilisant tous les sev d'une dimension fixée

1. Soit  $E$  un ev de dim finie et  $d$  un entier tel que  $1 \leq d < \dim E$ . Que dire d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  stabilisant tous les sev de dim  $d$ ? Que se passe-t-il pour  $d = \dim E$ ?
2. Mêmes questions lorsque  $E$  est de dim infinie.

#### Solution proposée.

1. Lorsque  $d = 1$ , i. e. quand  $u$  stabilise toutes les droites, il est classique que  $u$  est une homothétie. On se ramène à ce cas en exprimant toute droite comme intersection de sev de dim  $d$ .  
Soit  $e_0$  un vecteur directeur de la droite considérée, que l'on complète en une famille libre  $(e_0, \dots, e_d)$  à  $d+1$  éléments (on peut vu que  $d < \dim E$ ). En posant  $F_i := \bigoplus_{j \neq i} K e_j$ , il est clair que

$$K e_0 = F_1 \cap \dots \cap F_d.$$

Lorsque  $d = \dim E$ , le résultat tombe en défaut puisqu'il semblerait qu'il y ait beaucoup d'endomorphismes qui stabilisent l'unique sev de dimension  $\dim E$ .

2. On reprend exactement la même démonstration. Si  $d$  est fini, rien ne change. Si  $d$  est infini, on complète  $e_0$  en une base  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$ , on considère une sous-famille  $(e_j)_{j \in J}$  de cardinal  $d$  (on peut puisque  $d \leq \dim E$ ), on rajoute au besoin l'indice 0 en remplaçant  $J$  par  $J \cup \{0\}$  (ce qui ne change pas son cardinal puisqu'il est infini), puis on pose  $F_j := \bigoplus_{j' \in J \setminus \{j\}} K e_{j'}$  pour  $j \in J$  : les  $F_j$  sont alors tous de dim  $d$  et la droite  $K e_0$  est l'intersection des  $F_j$  pour  $j \neq 0$ , ce qui conclut. Le cas  $d = \dim E$  ne se distingue pas.

<sup>13</sup>Une telle suite d'applications est dite *exacte*.

## 5 Sur les polynômes annulateurs

1. Montrer que tout endomorphisme  $u$  d'un  $ev$  de  $dim$  finie admet un polynôme annulateur (non nul).
2. Montrer de plus que l'on peut toujours supposer ce polynôme de valuation nulle lorsque  $u$  est bijectif.
3. Contre-exemple en  $dim$  infinie ?
4. Soit  $I$  un intervalle infini de  $\mathbb{R}$ . Trouver toutes les sous-algèbres de  $dim$  finie de  $C^0(I, \mathbb{K})$ .

### Solution proposée.

1. Un polynôme annulateur (non nul) est la donnée d'un nombre fini de scalaires  $\lambda_0, \dots, \lambda_d$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=0}^d \lambda_i u^i = 0$ . Il revient au même de dire que la famille  $(u^0, u^1, \dots, u^d)$  est liée. Or cela est vérifiée dès que  $d$  dépasse la dimension de l'espace  $L(E)$  où habitent les  $u^i$ , lequel est de  $dim$  finie ( $dim E$ )<sup>2</sup>.
2. Lorsque  $u$  est bijectif, la relation  $\sum_{i=0}^d \lambda_i u^i = 0$  peut se simplifier par  $u$  tant que  $\lambda_0 = 0$ , processus qui s'arrête vu que les  $\lambda_i$  ne sont pas tous nuls.
3. L'existence d'un polynôme annulateur n'est plus assurée en  $dim$  infinie. On pensera par exemple à la dérivation sur  $K[X]$ , ou plus simplement au tapis roulant  $\gamma : (a, b, c, \dots) \mapsto (b, c, \dots)$ . En effet, pour tout  $n \geq 0$ , le vecteur  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  où le 1 est à la  $(n+1)$ -ième place ne saurait être annulé par un polynôme de degré  $\leq n$ .

On nous reprochera que le contre-exemple  $\gamma$  n'est pas injectif. Mais il y a également des automorphismes sans polynôme minimal. Dès que  $E$  contient une suite libre  $(x_n)$ , mettons  $E = \left(\bigoplus_{n \geq 0} Kx_n\right) \oplus S$ , on peut définir pour toute suite  $(\lambda_n)$  de scalaires tous non nuls un automorphisme  $\alpha_{\vec{\lambda}}$  par  $\left(\bigoplus \lambda_n \text{Id}\right) \oplus \text{Id}$ . En remarquant qu'un polynôme annulateur de  $\alpha_{\vec{\lambda}}$  doit annuler les  $\lambda_n \text{Id}$  et donc admettre chaque  $\lambda_n$  comme racine, il suffit que la suite  $\vec{\lambda}$  soit injective pour que le seul candidat restant soit le polynôme nul.

4. Piochons un élément  $f$  dans une telle algèbre. Il est bon d'observer que les puissances de  $f$  sont (très souvent) libres : en effet, une relation de liaison  $\sum \lambda_n f^n = 0$  signifie que le polynôme  $\sum \lambda_n X^n$  s'annule sur  $\text{Im } f$ , donc est le polynôme nul pour peu que  $\text{Im } f$  soit infini – ce sera le cas si  $f$  n'est pas constante (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Par conséquent,  $f$  doit être une constante (sinon l'algèbre  $K[f]$  est un sev de  $dim$  infinie) et ce pour tout  $f$  dans notre sous-algèbre, ce qui montre que cette dernière est contenue dans  $\mathbb{K}$  ; comme elle doit contenir 1, a fortiori  $\mathbb{K}$  tout entier, on a égalité.

## 6 Une CNS pour que noyau et image soient en somme directe

1. Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $ev$   $E$  de  $dim$   $n$ . Montrer que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont en somme directe ssi  $u$  admet un polynôme annulateur  $P$  dont 0 est racine d'ordre au plus 1.
2. Étudier la question en  $dim$  infinie.

### Solution proposée.

1. Le sens réciproque est valable en  $dim$  quelconque et a déjà été traité dans la feuille sur les  $ev$ , la condition sur  $P$  se réécrit  $P'(0) \neq 0$ .

Concernant le sens direct, le théorème du rang affirme que  $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u$  vaut l'espace  $E$  tout entier (prendre les  $dim$ ) ; pour construire un polynôme annulateur de  $u$  sur  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ , on va donc recoller des polynômes annulateurs des restrictions de  $u$  à  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$ .

Comment s'y prendre ? En notant  $K$  et  $I$  des polynômes annulateurs de  $u$  sur  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  respectivement, on observe que le produit  $KI$  annule  $u$  sur  $E$  tout entier : en effet, en décomposant un vecteur  $x = k + i$  de  $E$  selon  $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 KI(u)(x) &= IK(u)(k) + KI(u)(i) \\
 &= [I(u) \circ K(u)](k) + [K(u) \circ I(u)](i) \\
 &= I(u) \left( \underbrace{K(u)(k)}_{=0} \right) + K(u) \left( \underbrace{I(u)(i)}_{=0} \right) \\
 &= 0, \text{ ceci valant pour tout } x \in E.
 \end{aligned}$$

Il reste à trouver des bons polynômes  $K$  et  $I$ . Comme on veut que 0 soit racine d'ordre au plus 1 de  $KI$ , il serait souhaitable de contrôler l'ordre de 0 en tant que racine de  $K$  et  $I$ .

Déjà, on peut toujours prendre  $K = X$  puisque  $u$  est nul sur  $\text{Ker } u$ . Ensuite, sur l'image, on est bijectif car on est sur un supplémentaire du noyau (toujours par le théorème du rang), donc on dispose d'un polynôme annulateur  $I$  de valuation nulle. Le produit  $KI$  est alors de valuation 1, ce qui conclut.

2. En dimension infinie, tout ce qui précède bloque dès le début à l'argument «  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$  ». En effet, on connaît des endomorphismes dont noyau et image sont en somme directe mais dont la somme de ces derniers ne fait pas  $E$ . Prendre par exemple  $E := \mathbb{R}[X]$  et pour  $u$  le tapis roulant

$$(a, b, c, \dots) \mapsto (0, a, b, c, \dots).$$

On observe alors que  $u$  ne peut admettre de polynôme annulateur (non nul). En effet, si  $P = \sum a_n X^n$  est un tel polynôme, en appliquant  $P(u)$  sur un Dirac  $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , on obtient

$$0 = P(u)(e_i) = \sum a_n u^n(e_i) = \sum a_n e_{i+n},$$

d'où  $\vec{a} = \vec{0}$  par liberté des  $e_n$  et  $P = 0$ , ce qui est absurde.

**Remarque.** On peut rédiger cet exercice avec un peu plus d'aisance si l'on connaît un peu la réduction<sup>14</sup>.

## 7 Entremets

*Montrer que, dans un ev de dim finie, l'intersection d'une famille finie de sev est non nulle dès que la dimension de l'espace dépasse strictement la somme des codimension de ces sev.*

*Ceci reste-il valable pour une famille infinie de sev ? Si l'espace global est de dim infinie ?*

### Solution proposée.

Notons  $E$  l'ev considéré,  $n$  sa dimension et  $F_1, \dots, F_k$  nos sev. Il s'agit de montrer l'implication

$$\sum \text{codim } F_i < n \implies \bigcap F_i \neq \{0\},$$

la prémisse pouvant également s'écrire  $\sum \dim F_i > n(k-1)$ .

Nous proposons trois méthodes.

1. Les hypothèse et conclusion passant bien « au rang d'après », il est naturel de procéder par récurrence. Pour  $k=0$ , on veut  $\sum_{\emptyset} < n \implies \bigcap_{\emptyset} \neq \{0\}$ , i. e.  $n > 0 \implies E \neq \{0\}$ , ce qui est trivial.

Soit  $k \geq 0$  et  $F_0, \dots, F_k$  des sev tels que  $\sum_0^k \text{codim } F_i < n$ . La conclusion  $\bigcap_0^k F_i \neq \{0\}$  est équivalente à  $\bigcap_1^k F'_i \neq \{0\}$  où l'on a noté  $F'_i := F_i \cap F_0$ . On cherche donc à montrer  $\sum_1^k \dim F'_i > (k-1) \dim F_0$ . Un coup de Grassmann et d'hypothèse de récurrence suffisent :

$$\begin{aligned} \sum_1^k \dim F'_i &= \sum_1^k [\dim F_0 + \dim F_i - \dim (F_0 + F_i)] \\ &= k \dim F_0 + \sum_1^k \dim F_i - \underbrace{\sum_1^k \dim (F_0 + F_i)}_{\leq n} \\ &\geq (k-1) \dim F_0 + \underbrace{\sum_0^k \dim F_i}_{> nk - nk = 0} - \sum_1^k n \\ &> (k-1) \dim F_0, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

<sup>14</sup> cf. feuille 1 sur la réduction

2. Une autre idée est d'exprimer  $\bigcap F_i$  comme noyau d'une application linéaire dont l'injectivité sera mise en défaut par la condition sur les dimension. Le lecteur connaisseur des ev quotients pourra apprécier la concision de ce qui suit.

Pour construire une telle application, remarquons déjà que les projections canoniques  $E \rightarrow E/F_i$  sont de noyau  $F_i$ . Leur produit  $E \rightarrow \prod E/F_i$  fournit donc une application de noyau  $\bigcap F_i$ . La dimension au départ vaut  $n$ , celle à l'arrivée vaut

$$\dim \left( \prod E/F_i \right) = \sum \dim (E/F_i) = \sum \text{codim } F_i < n,$$

donc notre application ne saurait être injective, *CQFD*.

Cette preuve<sup>15</sup> fonctionne quel que soit le nombre de sev et quelle que soit la dimension de  $E$ .

3. On peut reprendre la même idée qu'au deuxième point sans quotients. En cherchant un peu, on voit que l'application

$$f : \begin{cases} \prod F_i & \longrightarrow & E^{k-1} \\ (a_i) & \longmapsto & (a_{i+1} - a_i) \end{cases}$$

satisfait à notre bonheur. Les éléments du noyau sont de la forme  $(a, a, \dots, a)$  avec  $a \in \bigcap F_i$ , donc  $\text{Ker } f$  est isomorphe à  $\bigcap F_i$ . Le théorème du rang nous donne alors

$$\dim \bigcap F_i = \dim \text{Ker } f = \dim \prod F_i - \text{rg } f \geq \underbrace{\sum \dim F_i}_{>n(k-1)} - \underbrace{\dim E^{k-1}}_{=n(k-1)} > 0, \text{ CQFD.}$$

## 8 Modulo le groupe linéaire, tout endomorphisme est un projecteur

Soit  $E$  un ev de dim finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer qu'il existe un isomorphisme  $\varphi$  tel que  $u\varphi$  soit un projecteur.

Que dire en dim infinie ?

### Solution proposée.

Raisonnons par analyse-synthèse en cherchant des conditions nécessairement vérifiées par  $\varphi$ .

Déjà, le noyau et l'image du projecteur  $u\varphi$  doivent être en somme directe, ce qui s'écrit

$$\text{Ker } u\varphi \oplus \text{Im } u\varphi = E \implies \varphi^{-1}(\text{Ker } u) \oplus \text{Im } u = E \implies \text{Ker } u \oplus \varphi(\text{Im } u) = E.$$

En notant  $\overline{F}$  un supplémentaire d'un sev  $F$ ,  $\varphi$  doit donc envoyer  $\text{Im } u$  sur  $\overline{\text{Ker } u}$ . De plus,  $\varphi$  devant envoyer une base sur une base,  $\varphi$  envoie  $\overline{\text{Im } u}$  sur  $\overline{\text{Ker } u}$ , par exemple  $\text{Ker } u$ .

L'analyse étant effectuée, contruisons  $\varphi$  : on envoie une base de  $\overline{\text{Im } u}$  sur une base de  $\overline{\text{Ker } u}$  (possible car les deux ont même dimension en vertu du théorème du rang) puis une base de  $\text{Im } u$  sur une base de  $\overline{\text{Ker } u}$  (ce qu'on peut faire en considérant  $(u|_{\overline{\text{Ker } u}})^{-1}$  toujours par le théorème du rang)<sup>16</sup> :

$$\varphi : \begin{array}{c|c} \text{Im } u & \overline{\text{Im } u} \\ \downarrow u^{-1} & \downarrow \\ \overline{\text{Ker } u} & \text{Ker } u \end{array}$$

On vérifie alors que  $u\varphi$  est un projecteur en regardant son action<sup>17</sup> sur un vecteur de  $\text{Im } u$  ou  $\overline{\text{Im } u}$  :

$$\begin{cases} x \in \text{Im } u \implies u\varphi(x) = uu^{-1}(x) = x \\ x \in \overline{\text{Im } u} \implies \varphi(x) \in \text{Ker } u \implies u\varphi(x) = 0 \end{cases} ;$$

<sup>15</sup>Pour la reproduire sans quotients, il suffit de remplacer chaque  $E/F_i$  par un supplémentaire de  $F_i$  et chaque projection canonique  $E \rightarrow E/F_i$  par la projection sur ce supplémentaire parallèlement à  $F_i$ .

<sup>16</sup>Si le lecteur n'est pas convaincu, on peut expliciter les bases. En notant  $r$  le rang de  $u$ , on complète une base  $(k_1, \dots, k_p)$  de  $\text{Ker } u$  en une base  $(k_1, \dots, k_p, e_1, \dots, e_r)$  de  $E$ , on complète la base  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  de  $\text{Im } u$  en une base  $(u(e_1), \dots, u(e_r), s_1, \dots, s_p)$  de  $E$ , puis on définit  $\varphi$  par  $\begin{cases} \forall i = 1, \dots, r, u(e_i) \mapsto e_i \\ \forall i = 1, \dots, p, s_i \mapsto k_i \end{cases}$ .

<sup>17</sup>Avec les notations de la précédente remarque, on peut aussi écrire

$$\begin{cases} u(e_i) \xrightarrow{\varphi} e_i \xrightarrow{u} u(e_i) \\ s_i \xrightarrow{\varphi} k_i \xrightarrow{u} 0 \end{cases} .$$



cela dit exactement que  $u\varphi$  est le projecteur sur  $\text{Im } u$  parallèlement à  $\overline{\text{Im } u}$ .

En dim infinie, tout fonctionne encore, à l'exception de l'argument dimensionnel qui nous permettait d'envoyer une base de  $\overline{\text{Im } u}$  sur une base de  $\text{Ker } u$ . Et pour cause : la condition nécessaire  $\varphi(\text{Im } u) \oplus \text{Ker } u = E$  est impossible à réaliser dès que  $\text{Im } u = E$  et  $\text{Ker } u \neq \{0\}$ , autrement dit  $u$  surjectif non injectif, par exemple la dérivation sur  $E := K[X]$ .

**Remarque.** Le lecteur est encouragé à expédier cet exercice à l'aide de considérations matricielles<sup>18</sup>.

## 9 Modulo le groupe linéaire, les non inversibles sont les nilpotents

Soit  $E$  un ev de dim finie  $\geq 1$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $u$  est non inversible ssi il existe un isomorphisme  $\varphi$  tel que  $\varphi u$  soit nilpotent.

Que se passe-t-il en dim infinie ?

### Solution proposée.

Déjà, si  $\varphi u$  est nilpotent, alors  $u$  ne saurait être inversible, sinon  $\varphi u$  serait inversible, donc toutes ses puissances aussi, ce qui contredirait sa nilpotence (il n'y a qu'en dimension nulle que l'endomorphisme nul est inversible, puisqu'il y vaut l'identité...).

Soit maintenant  $u$  non inversible. Complétons une base  $(k_1, \dots, k_p)$  de son noyau en une base  $(e_1, \dots, e_r, k_1, \dots, k_p)$  de  $E$ . L'espace  $S$  engendré par  $(e_1, \dots, e_r)$  étant un supplémentaire de  $\text{Ker } u$ ,  $u|_S$  est un isomorphisme, donc envoie  $(e_1, \dots, e_r)$  sur une famille libre  $(f_1, \dots, f_r)$  :

$$u : \begin{array}{cccccc} e_1 & \cdots & e_r & k_1 & \cdots & k_p \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ f_1 & \cdots & f_r & 0 & \cdots & 0 \end{array} .$$

Pour regarder l'action de  $\varphi u$  sur l'espace  $E$ , il convient de regarder l'action de  $\varphi$  sur  $u(E) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_r)$ . Puisqu'on veut itérer  $\varphi u$ , il serait pratique que  $\varphi$  envoie les  $f_i$  sur des vecteurs de  $(e_1, \dots, e_r, k_1, \dots, k_p)$  – là où l'on sait précisément ce que fait  $u$ . La première idée qui vient est d'envoyer  $f_i$  sur  $e_i$  (dessiner une flèche verticale  $\uparrow$  sur le schéma ci-dessus), mais alors  $\varphi u$  est le projecteur sur  $S$  parallèlement à  $\text{Ker } u$ , qui n'a pas grande chance d'être nilpotent. En revanche, si l'on décale les flèches  $\uparrow$  de  $\varphi$  d'un cran, disons  $\nearrow$  en envoyant  $f_i$  sur  $e_{i+1}$  (et  $f_r$  sur  $k_1$ , ce qui est possible car  $\text{Ker } u$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ ), alors il est clair que tout vecteur de base est envoyé sur 0 au bout de  $n$  d'itérations de  $u\varphi$  :

$$e_1 \xrightarrow{\varphi u} e_2 \xrightarrow{\varphi u} e_3 \xrightarrow{\varphi u} \cdots \xrightarrow{\varphi u} e_r \xrightarrow{\varphi u} k_1 \xrightarrow{\varphi u} 0,$$

les  $k_i$  étant tués par  $\varphi u$  au bout d'une seule étape.

On construit donc notre isomorphisme de la façon suivante : en notant  $f_{r+1}, \dots, f_n$  des vecteurs qui complètent la famille  $f_1, \dots, f_r$  en une base de  $E$ , on pose

$$\varphi : \begin{cases} f_i \mapsto e_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i < r \\ f_i \mapsto k_{i-r+1} \text{ pour } r \leq i < n \\ f_n \mapsto e_1 \end{cases} .$$

En dim infinie, la démonstration ci-dessus échoue au niveau de l'argument « les  $e_i$  sont tués au bout de  $n$  étapes » pour peu que le rang  $r$  soit infini ; cela peut être réalisé par l'opérateur  $\delta$  de dérivation sur  $K[X]$ . Montrons que ce dernier fournit bien un contre-exemple.

Si l'y avait un automorphisme  $\varphi$  de  $K[X]$  tel que  $[\varphi\delta]^n = 0$ , alors l'image de  $\delta[\varphi\delta]^{n-1}$  serait nulle, donc  $\text{Im } [\varphi\delta]^{n-1}$  ne contiendrait que des polynômes constants, en particulier serait de dim finie, donc son image  $\text{Im } \delta[\varphi\delta]^{n-2}$  par  $\varphi^{-1}$  serait également de dim finie, donc  $[\varphi\delta]^{n-2}$  également, et ainsi de suite jusqu'à la contradiction  $\dim \text{Im } \delta < \infty$ .

**Remarque.** La même qu'à l'exercice précédent : chercher le pendant matriciel de la solution ci-dessus.

<sup>18</sup> cf. première feuille sur les matrices

## 10 Sur les produits de nilpotents

Soit  $E$  un  $ev$  de  $\dim$  finie  $n \geq 1$ .

1. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ . Montrer que  $u^n = 0$ .
2. Soit  $n$  endomorphismes nilpotents  $u_1, \dots, u_n$  commutant deux à deux. Montrer que  $u_1 \cdots u_n = 0$ . Que se passe-t-il si l'on retire l'hypothèse de commutativité ?
  - (a) Soit  $I$  un intervalle infini de  $\mathbb{R}$ . Trouver les endomorphismes de  $C^\infty(I, \mathbb{K})$  dont le carré (pour la composition) vaut la dérivation.
  - (b) Plus généralement, donner une CNS sur des entiers  $a, b \geq 1$  pour qu'il existe un endomorphisme de  $C^\infty(I, \mathbb{K})$  dont la puissance  $a$ -ième soit la puissance  $b$ -ième de la dérivation.

### Solution proposée.

1. Soit  $p \geq 1$  l'indice de nilpotence de  $u$ . On veut montrer que  $p \leq n = \dim E$ . Pour cela, nous allons exhiber une famille libre à  $p$  éléments. Une manière simple de créer des familles *ex nihilo* est d'itérer un vecteur de l'espace. Cherchons donc une condition sur un  $x \in E$  donné pour que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  soit libre.

Si cette dernière est liée, on a une relation de liaison

$$\lambda_1 x + \lambda_2 u(x) + \dots + \lambda_p u^{p-1}(x) = 0.$$

Comme les  $\lambda_i$  sont non tous nuls, il y a un plus petit indice  $k$  tel que  $\lambda_k \neq 0$ . En appliquant  $u^{p-1-k}$ , il reste

$$\lambda_k u^{p-1}(x) + \underbrace{\lambda_{k+2} u^p(x) + \dots + \lambda_p u^{2p-2-k}(x)}_{=0} = 0 \implies \lambda_k u^{p-1}(x) = 0 \implies u^{p-1}(x) = 0.$$

Ainsi, en choisissant rétrospectivement  $x$  hors de  $\text{Ker } u^{p-1}$  (ce que l'on peut faire puisque  $u^{p-1} \neq 0$ ), l'égalité ci-dessus conduit à une contradiction, d'où la liberté voulu.

2. Regardons comment évolue l'espace  $E$  quand on fait agir dessus les  $u_i$  successivement un par un – l'ordre ayant peu d'importance vu que les  $u_i$  commutent. Donnons pour cela un nom aux sev

$$F_i := \text{Im } u_1 \cdots u_i$$

qui apparaissent naturellement dans le processus

$$E = F_0 \xrightarrow{u_1} F_1 \xrightarrow{u_2} \dots \longrightarrow F_{i-1} \xrightarrow{u_i} F_i \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{u_n} F_n = \text{Im } u_1 \cdots u_n.$$

Nous voulons  $u_1 \cdots u_n = 0$ , ce qui s'exprime par  $F_n = \{0\}$ .

Remarquons que les  $F_i$  sont stables par tous les  $u_j$  vu que tout le monde commute. La suite  $F_i$  est donc décroissante. Si l'un des  $F_{i < n}$  est réduit à  $\{0\}$ , on a gagné. Supposons le contraire par la suite. On va montrer que dans ce cas la décroissance des  $F_i$  est en fait stricte, ce qui forcera

$$\dim F_n \leq \dim F_{n-1} - 1 \leq \dim F_{n-2} - 2 \leq \dots \leq \dim F_0 - n = 0.$$

Il s'agit de voir pourquoi  $F_{i+1} = u_{i+1}(F_i) \subsetneq F_i$  (avec  $i < n$ ). Puisque  $F_i$  est stable par  $u_{i+1}$ , on peut parler de l'endomorphisme de  $F_i$  induit par  $u_{i+1}$ , qui est nilpotent puisque  $u_{i+1}$  l'est, donc non injectif puisque  $F_i$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , *CQFD*.

L'hypothèse de commutativité est cruciale : considérer par exemple les deux endomorphismes nilpotents suivants<sup>19</sup> de  $K^n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{\delta} (0, a_1, \dots, a_{n-1}) \\ (a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{\gamma} (a_2, \dots, a_n, 0) \end{array} \right. .$$

Le produit  $\gamma\delta$  envoie une suite  $\vec{a}$  sur  $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ , donc est le projecteur sur les  $n - 1$  premières coordonnées parallèlement à la dernière. De même, le produit  $\delta\gamma$  est le projecteur sur les  $n - 1$  dernières coordonnées parallèlement à la première. Pour  $n \geq 2$ , ces projecteurs sont non nuls, donc ne sauraient être nilpotents.

<sup>19</sup>On pourra voir ces derniers comme des *tapis roulant* en les coordonnées, lesquels mettent un 0 en début de chaîne et poubellisent la dernière coordonnée en fin de chaîne.

- (a) Notons  $\delta$  la dérivation et soit  $u$  une raciné carrée de  $\delta$  (pour la composition). Nous allons utiliser le fait qu'un endomorphisme  $f$  nilpotent d'un  $ev$  de  $\dim n$  vérifie  $f^n = 0$ .

Les sev  $V_n := \text{Ker } \delta^n$  sont de dimension  $n$ , mais ils valent également  $\text{Ker } u^{2n}$ . Ainsi, la restriction de  $u$  à  $V_n$ , qui est nilpotente car annulé par  $X^{2n}$ , est  $(n+1)$ -nilpotente. Pour  $n = 2k - 1$  impair, on obtient  $u|_{V_{2k-1}}^{2k} = 0$ , *i. e.*  $\delta^k$  nulle sur  $V_{2k-1}$ , d'où  $V_{2k-1} \subset \text{Ker } \delta^k = V_k$ . Prenant les dimensions, il vient  $2k - 1 \leq k$ , ce qui pose problème pour  $k \geq 2$ .

Finalement, la dérivation n'admet pas de racine carrée pour la composition.

- (b) Soit  $u$  tel que  $u^a = \delta^b$ . Puisque  $\delta$  est surjectif, l'endomorphisme  $u^a = \delta^b$  l'est aussi, donc  $u$  également (car  $b \geq 1$ ). Par ailleurs,  $u$  commute avec  $u^a = \delta^b$ , donc stabilise le noyau  $\text{Ker } \delta^b$ , ce qui doit nous inciter à regarder la restriction de  $u$  à  $K_a$  (on a noté  $K_n := \text{Ker } u^n$  pour  $n \geq 0$ ).

Soit  $n \geq 1$ . Le morphisme  $u$  induit un morphisme  $K_n \rightarrow K_{n-1}$  de noyau  $\text{Ker } u \cap K_n = \text{Ker } u$ . On voit aisément qu'il est surjectif : puisque  $u$  l'est, tout  $y \in K_{n-1}$  s'écrit  $u(x)$  avec  $u(u^{n-1}(x)) = u^{n-1}(y) = 0$ , *i. e.*  $x \in K_n$ . Le théorème du rang permet alors d'affirmer  $\dim K_n = \dim K_1 + \dim K_{n-1}$ , d'où par une récurrence immédiate  $\dim K_n = n \dim K_1$ . Prenant  $n = a$ , il vient  $a \dim K_1 = \dim \text{Ker } u^a = \dim \text{Ker } \delta^b = b$ , d'où  $a \mid b$ .

Réciproquement, si  $a \mid b$ , on peut toujours écrire  $\delta^b = \left(\delta^{\frac{b}{a}}\right)^a$ , ce qui conclut.

**Remarque.** La CNS trouvée au troisième point reste valable en remplaçant la dérivation par n'importe quel endomorphisme  $\delta$  surjectif tel que  $\text{corg } \delta^n = n$  pour tout  $n \geq 0$ .

## 11 Combinatoire sur les corps finis

Soit  $E$  un  $ev$  de  $\dim$  finie  $n \geq 1$  sur un corps fini<sup>20</sup>  $K$  de cardinal  $q$ .

Déterminer le cardinal de  $GL(E)$  et en déduire le nombre de sev de  $E$  de  $\dim d$  fixée.

### Solution proposée.

On notera  $|A|$  ou  $\#A$  le cardinal d'un ensemble  $A$ .

Fixons une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Un isomorphisme de  $E$  est entièrement déterminé par l'image  $\mathcal{B}'$  de cette base, laquelle doit être une base de  $E$ , et réciproquement le choix d'une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  définit un unique isomorphisme qui envoie  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{B}'$ . Par conséquent, il y a autant d'éléments dans  $GL(E)$  que de bases de  $E$ .

Pour choisir une base de  $E$ , on choisit un premier vecteur  $u_1$  non nul, ce qui se fait en  $q^n - 1$  choix (remarquer que  $|E| = q^n$  puisque  $E \simeq K^n$ ), puis on choisit le deuxième  $u_2$  hors de la droite  $Ku_1$  (pour que  $u_1$  et  $u_2$  soient libres), ce qui se fait en  $q^n - q$  choix (vu que la droite  $Ku_1$  a  $|K| = q$  éléments), et ainsi de suite. On trouve finalement le produit de  $n$  termes (un pour le choix de chaque vecteur)

$$\#GL(E) = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

Notons  $\text{Libre}_d$  l'ensemble des familles de  $E$  libres à  $d$  éléments (dont on calcule le cardinal par la méthode ci-dessus) et  $\text{Sev}_d$  l'ensemble des sev de  $E$  de  $\dim d$ . L'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Libre}_d & \rightarrow \text{Sev}_d \\ (u_1, \dots, u_d) & \mapsto \text{Vect}(u_1, \dots, u_d) \end{array} \right.$$

est surjective et les antécédents d'un  $V$  de  $\text{Sev}_d$  sont exactement les familles libres (de  $E$ ) engendrant  $V$ , *i. e.* les bases de  $V$ , lesquelles sont en nombre  $\#GL(V)$  d'après ce qui précède. Par le lemme du berger, on en déduit

$$\begin{aligned} \# \text{Sev}_d &= \frac{\# \text{Libre}_d}{\#GL(K^d)} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{d-1})}{(q^d - 1)(q^d - q)(q^d - q^2) \cdots (q^d - q^{d-1})} \\ &= \frac{(q^n - 1) q (q^{n-1} - 1) q^2 (q^{n-2} - 1) \cdots q^{d-1} (q^{n-d+1} - 1)}{(q^d - 1) q (q^{d-1} - 1) q^2 (q^{d-2} - 1) \cdots q^{d-1} (q - 1)} \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-d+1} - 1)}{(q^d - 1)(q^{d-1} - 1) \cdots (q - 1)}. \end{aligned}$$

<sup>20</sup>On rappelle au besoin qu'un tel corps est nécessairement commutatif : c'est le (petit) théorème de Wedderburn.

On trouve successivement

$$\begin{aligned}
 |S_0| &= 1, \\
 |S_1| &= \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \dots + q^{n-1}, \\
 |S_2| &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)} = \frac{1 + q + \dots + q^{n-1}}{1 + q} (1 + q + \dots + q^{n-2}), \\
 &\vdots \\
 |S_{n-2}| &= \frac{(q^n - 1) \dots (q^3 - 1)}{(q^{n-2} - 1) \dots (q - 1)} = \frac{q^n - 1}{q^2 - 1} \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = \#S_{n-2}, \\
 |S_{n-1}| &= \frac{(q^n - 1) \dots (q^2 - 1)}{(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \#S_1, \\
 |S_n| &= \frac{(q^n - 1) \dots (q - 1)}{(q^n - 1) \dots (q - 1)} = 1.
 \end{aligned}$$

**Remarque.** Il apparaît une symétrie  $|S_d| = |S_{n-d}|$  : cela découle directement de considérations de dualité, vu que les sev de  $E$  de dimension  $d$  sont en bijection avec les sev de  $E^*$  de dimension  $n - p$  via l'orthogonalisation duale  $V \mapsto V^\perp$  de réciproque  $W \mapsto W^\circ$ .

## 12 Existence de supplémentaire commun

Comme à l'exercice précédent, on notera  $|A|$  le cardinal d'un ensemble  $A$ .

On donne le résultat suivant<sup>21</sup> : un recouvrement d'un ev  $E$  par une famille de sev  $F_i$  stricts indexée par un ensemble  $I$  n'est possible que si  $|K| \leq |I|$ , condition se précisant en  $|K| < |I|$  pour  $I$  fini.

1. Dans un ev de dim finie, montrer pour tout ensemble  $I$  l'équivalence des propositions suivantes (les familles sont indexées par un même ensemble  $I$ ) :

*toute famille de sev de même dim admet un supplémentaire commun,  
aucune famille d'ev stricts ne peut recouvrir tout l'espace.*

2. Montrer, en dim finie, que deux sev de même dim ont toujours un supplémentaire commun.
3. Donner une CNS pour pouvoir généraliser à un nombre quelconque (fini) de sev.
4. Donner une CNS pour pouvoir généraliser à une famille quelconque (infinie) de sev.
5. Que se passe-t-il en dim infinie ?

### Solution proposée.

1.  $\Rightarrow$  Supposons  $\bigcup F_i = E$ . Quitte à plonger chaque  $F_i$  dans un hyperplan (on peut car ils sont tous stricts), on peut supposer que les  $F_i$  ont même dimension. Considérons une droite  $Ka$  supplémentaire à tous ces hyperplans. Le vecteur  $a$  tombe dans  $E = \bigcup F_i$ , donc dans l'un des  $F_i$ , donc dans  $F_i \cap Ka = \{0\}$ , ce qui est impossible.

$\Leftarrow$  L'idée est de voir qu'en dim finie un supplémentaire est un sev en somme directe de dim maximale. Soit  $(F_i)$  une famille de sev de même dim. La famille des sev en somme directe avec les  $F_i$  est non vide (elle contient le sev nul), donc admet un élément  $S$  de dim maximale (les dimensions sont toutes bornées par  $\dim E$ ). Si l'un des  $F'_i := F_i \oplus S$  n'est pas  $E$ , aucun ne l'est (ils ont tous même dimension) ; cherchons à rajouter une droite  $Ka$  en somme directe avec les  $F'_i$  pour contredire la maximalité de  $S$  (le sev  $S \oplus Ka$  sera alors en somme directe avec tous les  $F_i$ ). Il suffit pour cela d'exhiber un vecteur hors de  $\bigcup F'_i$ , ce qui est permis par les hypothèses.

<sup>21</sup> cf. feuille sur les ev

2. D'après le premier point, il s'agit de montrer que deux sev stricts ne peuvent recouvrir l'espace tout entier. Si cela était possible, on aurait la majoration  $|K| < |I| = 2$ , ce qui est impossible vu qu'un corps contient au moins deux éléments.

On peut également conclure en invoquant le résultat classique suivant : la réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe ssi l'un est inclus dans l'autre<sup>22</sup>.

3. On peut tout de suite s'intéresser au cas  $\dim E \geq 2$ , l'existence de supplémentaire commun ne devant pas trop poser de problèmes en dimension 0 ou 1.

Toujours d'après le premier point, on peut écarter le cas nuisible en imposant la minoration  $|K| \geq |I|$ , ce qui sera réalisé dès que  $K$  est infini.

Pour  $K$  fini, on montre que cette condition est en fait nécessaire en construisant un recouvrement de  $E$  par  $|K| + 1$  hyperplans. On procède par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ .

Pour  $n = 2$ , il suffit de considérer toutes les droites du plan. Les droites de pente  $\lambda$  sont dirigées par  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ , tandis que la droite « verticale » l'est par  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ce qui donne du sens au recouvrement

$$K^2 = K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \bigcup_{\lambda \in K} K \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour un  $n \geq 2$ , on peut réaliser  $K^n$  comme sev de  $K^{n+1}$  en oubliant la dernière coordonnée. En écrivant  $K^n = \bigcup F_i$  avec  $\dim F_i < n$  pour tout  $i$ , il vient  $K^{n+1} = K^n \oplus K = \bigcup (F_i \oplus K)$  avec  $\dim (F_i \oplus K) = \dim F_i + 1 < n + 1$  pour tout  $i$ , *CQFD*.

Finalement, la CNS cherchée est

$$\dim E \leq 1 \text{ ou } |K| \geq |I|.$$

4. Comme noté ci-dessus, il n'y a aucun problème en dimension  $\leq 1$ . On supposera donc  $\dim E \geq 2$ .

Si  $K$  est fini, alors  $E \simeq K^{\dim E}$  est fini et l'on pourra toujours écrire  $E = \bigcup_{a \in E} Ka$ , cas nuisible. On supposera donc  $K$  infini.

Comme précédemment, imposer  $|K| > |I|$  tient les recouvrement nuisibles à distance. Dans le cas contraire, puisque  $K$  est infini,  $K$  est en bijection avec  $K$  auquel on a rajouté un élément, donc le procédé décrit au point précédent reste valable. Par exemple, dans le plan complexe vu comme  $\mathbb{R}$ -ev, on obtient un recouvrement  $\mathbb{C} = \bigcup_{|\theta| \leq \pi} \mathbb{R}e^{i\theta}$  par un faisceau de droites en l'origine.

Finalement, la CNS cherchée est encore

$$\dim E \leq 1 \text{ ou } |K| \geq |I|.$$

5. En dimension infinie, le résultat reste valable pour un nombre fini de sev de même dim finie. En effet, pour  $F_i$  de tels sev, l'ev  $\sum F_i$  est de dim finie, donc on peut trouver un supplémentaire commun aux  $F_i$  dans  $\sum F_i$ ; en lui rajoutant un supplémentaire (dans  $E$  cette fois) de  $\sum F_i$ , on obtient un supplémentaire commun dans  $E$ , *CQFD*.

Le résultat est mis en défaut pour une infinité de sev de même dim finie. En effet, si  $E$  s'écrit  $\bigoplus Ke_i$ , alors les droites  $Ke_i$  ne sauraient avoir de supplémentaire commun : un élément  $s$  d'un tel supplémentaire ne pourrait pas avoir de composantes selon  $Ke_i$  (car  $S \cap Ke_i$  est nul) et ce pour tout  $i$ , d'où la nullité du dit supplémentaire.

De même, on ne peut pas conclure en général pour des sev de dim infinie (même en nombre fini). En effet, si  $F$  est un tel sev, il est isomorphe à  $F \oplus Ka$  pour tout vecteur  $a \notin F$ ; s'il y avait un supplémentaire commun  $S$ , le vecteur  $a$  se décomposerait en  $f + s$  dans  $F \oplus S$ , mais l'unicité de la décomposition dans  $F \oplus Ka \oplus S$  imposerait  $a = 0$ , ce qui est impossible.

### 13 Suite des noyaux itérés, indice d'un endomorphisme, décomposition de Fitting

Soit  $u$  un endomorphisme d'un ev  $E$  de dim finie  $n$ . Pour un entier  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\begin{cases} K_p := \text{Ker } u^p \\ I_p := \text{Im } u^p \end{cases}$ .

<sup>22</sup>Soient en effet  $G, H$  et  $G \cup H$  des sous-groupes. Considérons par l'absurde des éléments  $\begin{cases} g \in G \setminus H \\ h \in H \setminus G \end{cases}$ . Le produit  $gh$  reste dans  $G \cup H$ ; s'il tombe dans  $G$ , l'élément  $g^{-1}(gh)$  reste dans  $G$ , ce qui est absurde; s'il tombe dans  $H$ , l'élément  $(gh)h^{-1}$  reste dans  $H$ , contradiction.

1. Montrer que la suite des noyaux itérés  $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante puis stationnaire à partir d'un rang  $r$ . Montrer que la suite des images itérées  $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante puis stationnaire à partir du même rang  $r$  (appelé indice de  $u$ ).
2. Que vaut l'indice d'un nilpotent ? D'un projecteur ? D'un isomorphisme ?
3. Montrer que  $r$  est le plus petit entier  $\geq 1$  tels que

$$\text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p = E$$

(c'est la décomposition de Fitting associée à  $u$ ) et préciser le cas pathologique échappant à cet énoncé.

4. Montrer que  $u|_{I_r}$  est un automorphisme et que  $u|_{K_r}$  est nilpotent.
5. **Complément sur la réduction.** Montrer que l'indice d'un endomorphisme est égal à la valuation de son polynôme minimal.
6. **Complément sur les quotients.** Montrer que la suite  $(\dim K_p)$  s'essouffle, i. e. croît de moins en moins vite.
7. Reprendre les questions précédentes en dim infinie.

### Solution proposée.

Observer déjà que la suite des noyaux itérés est trivialement croissante et commence à  $\text{Ker } u^0 = \text{Ker } \text{Id} = \{0\}$ , tandis que les  $I_p$  décroissent à partir de  $\text{Im } u^0 = \text{Im } \text{Id} = E$ .

1. Ensuite, vu qu'une suite d'inclusions strictes  $K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_p$  implique une suite strictement croissante de dimensions  $\dim K_0 < \dim K_1 < \dots < \dim K_p$ , forçant ainsi par une récurrence immédiate  $\dim K_p \geq p$ , la suite  $(K_p)$  ne peut croître strictement indéfiniment (la dimension des  $K_p$  est bornée par la dimension de l'espace). Il y a donc un plus petit indice  $r$  tel que  $\text{Ker } u^{r+1} = \text{Ker } u^r$ .

Montrons que les  $K_p$  stationnent pour  $p \geq r$ . En supposant montré  $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^r$  pour un entier  $p > r$ , on vérifie que

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } u^{p+1} &\implies u^p(u(x)) = 0 \implies u(x) \in \text{Ker } u^p = \text{Ker } u^r \\ &\implies u^r(u(x)) = 0 \implies x \in \text{Ker } u^{r+1} = \text{Ker } u^r, \end{aligned}$$

d'où l'inclusion  $\text{Ker } u^{p+1} \subset \text{Ker } u^r$  et l'égalité par hypothèse de croissance.

Concernant les images, elles décroissent de la même manière que les noyaux en vertu du théorème du rang : écrire  $\dim K_p + \dim I_p = n$  pour tout  $p$  permet de renverser l'ordre des dimensions dans la suite

$$\dim K_0 < \dim K_1 < \dots < \dim K_r = \dim K_{r+1} = \dots,$$

ce qui donne

$$\dim I_0 > \dim I_1 > \dots > \dim I_r = \dim I_{r+1} = \dots, \text{ CQFD.}$$

2. Lorsque  $u$  est nilpotent, en appelant  $r$  son indice de nilpotence, les images stationnent à  $\{0\}$  à partir du rang  $r$  exactement : l'indice d'un nilpotent n'est autre que son indice de nilpotence.

Pour un projecteur, l'identité  $u^2 = u$  montre que les deux suites stationnent dès le rang 1 (ou 0 si le projecteur est l'identité) : on retrouve dans la décomposition de Fitting ci-après le fait que le noyau et l'image d'un projecteur sont en somme directe.

Pour un isomorphisme, les noyaux sont tous nuls, donc l'indice vaut 0.

3. Vérifions que  $K_r$  et  $I_r$  sont en somme directe, le théorème du rang montrant alors que cette somme vaut  $E$ . Un élément  $u^r(x)$  dans  $K_r \cap I_r$  doit vérifier  $u^{2r}(x) = 0$ , i. e.  $x \in K_{2r} = K_r$  (car  $2r \geq r$ ), d'où  $u(x) = 0$ . Ploum.

Montrons ensuite que  $K_p$  et  $I_p$  ne sont pas en somme directe pour  $1 \leq p < r$ . Il suffit de piocher un  $u^p(x)$  non nul qui soit dans  $K_p$ . Ceci sera vérifié pour  $x \in \text{Ker } u^{p+1} \setminus \text{Ker } u^p$ , vu que  $u^{p+1}(x) = 0$  et que  $2p \geq p + 1$ .

Ce qui précède est une preuve de l'énoncé voulu, sauf dans le cas où  $r = 0$  correspondant à un endomorphisme injectif. L'énoncé parle en effet de plus petit entier supérieur à 1 car l'égalité  $K_0 \oplus I_0 = E$  est une trivialité.

4. Par définition de  $K_r$ ,  $u|_{K_r}$  devient nul une fois élevé à la puissance  $r$ . Par définition de  $r$ , l'image de  $u|_{I_r}$  vaut  $\text{Im } u|_{I_r} = u(I_r) = I_{r+1} = I_r$ , d'où la surjectivité de l'endomorphisme  $u|_{I_r}$ . Son noyau vaut par ailleurs  $\text{Ker } u \cap I_r \subset K_r \cap I_r = \{0\}$ , donc  $u|_{I_r}$  est surjectif, CQFD.

5. Notons  $v$  la valuation du polynôme minimal de  $u$  : on peut donc écrire  $\mu_u = X^v A$  où  $X$  ne divise pas  $A$ . Le lemme des noyaux donne alors

$$E = \text{Ker } u^v \oplus \text{Ker } A(u).$$

Or, on dispose de l'inclusion  $\text{Im } u^v \subset \text{Ker } A(u)$  ainsi de l'égalité des dimensions, d'où  $E = K_v \oplus I_v$ , ce qui montre  $v = 0$  ou  $r \leq v$ . Dans le premier cas,  $u$  est injectif d'indice  $r = 0$ , *CQFD*. Dans le second cas, si on avait  $r < v$ , on aurait  $K_v = K_{v-1}$ , d'où

$$E = \text{Ker } u^{v-1} \oplus \text{Ker } A(u)$$

et le polynôme  $X^{v-1}A$  annulerait  $u$ , contredisant la minimalité de  $\mu_u$ .

6. Puisqu'on dispose des inclusions  $\begin{cases} u(K_{p+1}) \subset K_p \\ u(K_p) \subset K_{p-1} \end{cases}$ ,  $u$  induit une application linéaire entre les quotients

$$\tilde{u} : K_{p+1}/K_p \longrightarrow K_p/K_{p-1},$$

laquelle est injective vu que

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \tilde{0} \iff u(x) \in K_{p-1} \iff x \in K_p \iff \tilde{x} = \tilde{0}.$$

En prenant les dimensions, il vient

$$\dim K_{p+1} - \dim K_p \leq \dim K_p - \dim K_{p-1}, \text{ CQFD.}$$

7. (a) En dim infinie, l'implication ( $K_{r+1} = K_r \implies \forall p \geq r, K_p = K_r$ ) reste valide (de même pour les images<sup>23</sup>), mais l'existence d'un tel  $r$  est mise en défaut : penser à un tapis roulant type dérivation. Par ailleurs, le  $r$  n'a pas de raison d'être le même pour les noyaux et les images ; le tapis roulant  $(a, b, c, \dots) \mapsto (b, c, \dots)$  a ses noyaux itérés strictement croissant (donc pas d'indice fini) mais ses images itérées constantes (donc un indice nul).
- (b) Les indices trouvés en question 2 restent valables. On peut même préciser qu'un endomorphisme est d'indice nul ssi il est injectif.
- (c) À la question 3, dans l'hypothèse où la suite  $(K_p)$  stationne à partir d'un rang  $r \geq 0$ , le reste de la preuve suit (avec le même cas pathologique). En revanche, la somme  $K_r + I_r$  ne vaudra pas nécessairement tout l'espace : penser au tapis roulant  $(a, b, c, \dots) \mapsto (0, a, b, c, \dots)$ . Toutefois, si les images veulent bien stationner à partir du même rang  $r$ , on pourra (s'inspirant des projecteurs) décomposer un vecteur  $x$  quelconque selon  $(x - u^r(x)) + u^r(x)$ , ce qui montre que la somme directe  $K_r \oplus I_r$  fait encore tout l'espace.
- (d) Question 4, tout fonctionne à condition de supposer que  $(K_p)$  et  $(I_p)$  stationnent à partir d'un même rang  $r \geq 1$ . En revanche, si  $u$  est injectif non surjectif, la restriction à  $I_r = I_0 = E$  ne saurait être bijective.
- (e) En dim infinie, nous allons montrer que, si  $u$  admet un polynôme minimal, alors  $u$  est d'indice val  $\mu_u$ , mais que  $u$  peut très bien être d'indice fini sans admettre de polynôme minimal (s'il en admet un, l'assertion qui précède montre que sa valuation vaudra l'indice de  $u$ ).

Supposons  $u$  annulé par un polynôme  $X^v A$ . L'espace  $E$  se casse toujours en  $K_v \oplus \text{Ker } A(u)$ , mais aussi (car  $X^{v+1}A$  annule encore  $u$ ) en  $K_{v+1} \oplus \text{Ker } A(u)$ . Prenant un supplémentaire  $S$  de  $K_v$  dans  $K_{v+1}$ , on a alors

$$K_v \oplus \text{Ker } A(u) = E = S \oplus K_v \oplus \text{Ker } A(u),$$

d'où  $S = 0$  et  $K_{v+1} = K_v$ , ce qui montre que  $u$  est d'indice fini  $\leq v$ . L'argument donné à la question 5 montre la contradiction amenée par  $r < v$  si  $X$  ne divise pas  $A$ .

Par ailleurs, si  $u$  est d'indice fini  $r$ , la décomposition de Fitting nous permet d'écrire  $u = u|_{K_r} \oplus u|_{I_r}$ . Ce dernier admettra un polynôme minimal ssi  $u|_{K_r}$  et  $u|_{I_r}$  en admettent. Pas de problème pour  $u|_{K_r}$  (prendre  $X^r$ ), mais l'automorphisme  $u|_{I_r}$  n'a pas de raison d'être. Pour s'en rendre compte, prendre directement pour  $u$  un automorphisme sans polynôme minimal<sup>24</sup>.

<sup>23</sup>Il faut le faire à la main car l'argument de stricte croissance de la dimension utilisé n'est plus valide. Supposant  $I_r = I_{r+1} = I_p$  pour un  $p \geq r$ , un élément  $y$  de  $I_{p+1}$  s'écrit  $u(x)$  avec  $x \in I_p = I_r$ , d'où  $y \in I_{r+1} = I_r$  et l'égalité  $I_{p+1} = I_r$ , *CQFD*.

<sup>24</sup>*cf.* exercice « Sur les polynômes annulateurs » pour un exemple





un isomorphisme (par exemple, on envoie une base d'un supplémentaire du Vect des  $rg\ v$  vecteurs choisis dans  $\text{Im } u$  sur une base d'un supplémentaire de  $\text{Im } v$ ).

En dim infinie, tout fonctionne encore. Pour le sens  $\boxed{\Leftarrow}$ , l'inégalité  $rg\ f|_V \leq rg\ f$  est générale et découle de la croissance de dim. Pour le sens  $\boxed{\Rightarrow}$ , on réécrit l'hypothèse  $rg\ u \leq rg\ v$  sous la forme d'une injection  $\iota : I \hookrightarrow J$  avec deux bases  $(e_i)_{i \in I}$  de  $\text{Im } u$  et  $(f_j)_{j \in J}$  de  $\text{Im } v$ . On envoie alors les  $f_{\iota(i)}$  sur  $e_i$  puis un supplémentaire de  $\text{Im } u$  sur un supplémentaire de  $\text{Vect}_{i \in I} \{f_{\iota(i)}\}$  (on peut car les supplémentaires de  $\text{Im } u$  et  $\text{Vect}_{i \in I} \{f_{\iota(i)}\}$  ont même codimension  $I$ ).

**Remarques.** Le lecteur connaisseur des matrices aura noté que l'on a repris la démonstration classique de la proposition « deux matrices sont équivalentes ssi elle ont même rang ». À lui de rédiger cet exercice de façon purement matricielle!

Le lemme de factorisation est utile dans de nombreux contextes, il est bon de le garder en mémoire :

$$\text{Im } f \subset \text{Im } u \iff \exists \alpha, f = u\alpha.$$

Il nous servira en particulier (avec ses généralisation) à déterminer les idéaux à droite<sup>26</sup> de  $L(E)$ .

## 15 Factorisation d'applications linéaires et inclusion de noyaux

Soit  $E, F, G$  trois ev,  $u \in L(E, F)$  et  $f \in L(E, G)$  telles que  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } f$  :

$$E \xrightarrow[u]{u} F \longrightarrow G.$$

Montrer que l'ensemble  $A := \{\alpha \in L(F, G) ; f = \alpha u\}$  est un sous-espace affine de  $L(F, G)$  et donner sa dimension.

### Solution proposée.

Les éléments de  $A$  sont les vecteurs  $\alpha \in L(F, G)$  solutions de l'équation affine  $f = \alpha u$ ; il s'agit donc d'un espace affine (ou du vide). Explicitons-le afin d'avoir sa dimension. Nous noterons de façon générique  $\overline{V}$  un supplémentaire d'un sev  $V$ .

On cherche un  $\alpha \in L(F, G)$  tel que  $f = \alpha u$ . Nécessairement, un tel  $\alpha$  doit valoir  $f u^{-1}$  là où  $u$  s'inverse, par exemple sur  $\text{Im } u$ , et nous n'avons pas d'autre contrainte puisque l'égalité  $f = \alpha u$  ne contraint  $\alpha$  que sur  $\text{Im } u$  : le choix de  $u$  est donc libre sur  $\overline{\text{Im } u}$ . En termes plus formels, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \alpha \in A &\iff f = \alpha u \iff \begin{cases} f|_{\text{Ker } u} = \alpha u|_{\text{Ker } u} = 0 \\ f|_{\overline{\text{Ker } u}} = \alpha u|_{\overline{\text{Ker } u}} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Ker } f \subset \text{Ker } u \\ f|_{\overline{\text{Ker } u}} = \alpha|_{\text{Im } u} u|_{\overline{\text{Ker } u}} \end{cases} \\ &\iff \alpha|_{\text{Im } u} = f u^{-1}|_{\overline{\text{Ker } u}} \iff \begin{cases} \alpha|_{\overline{\text{Im } u}} \in L(\overline{\text{Im } u}, G) \\ \alpha|_{\text{Im } u} = f u^{-1}|_{\overline{\text{Ker } u}} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, choisir  $\alpha$  revient à choisir  $\alpha|_{\overline{\text{Im } u}}$  dans  $L(\overline{\text{Im } u}, G)$  : on en déduit que  $A$  est en bijection avec  $L(\overline{\text{Im } u}, G)$ , d'où sa dimension

$$\dim A = \dim L(\overline{\text{Im } u}, G) = \dim \overline{\text{Im } u} \times \dim G = (\text{codim } \text{Im } u) \times \dim G = \text{corg } u \times \dim G.$$

**Remarque.** Comme pour les images, il peut être utile de retenir

$$\text{Ker } u \subset \text{Ker } f \iff \exists \alpha, f = \alpha u.$$

On généralisera ce lemme pour déterminer les idéaux à gauche<sup>27</sup> de  $L(E)$ .

<sup>26</sup> objet des derniers exercices de cette feuille

<sup>27</sup> cf. l'antépénultième exercice de cette feuille

## 16 Rang de formes linéaires et intersections de noyaux

Soit  $E$  un ev de dim finie  $n$ . On considère  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  des formes linéaires sur  $E$ .

1. *Montrer que*

$$\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \text{codim} \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } \varphi_i.$$

*Que dire de la dim infinie ?*

2. *En déduire que l'équivalence*

$$\bigcap_{i=1}^r \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \psi \iff \psi \in \text{Vect} \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}.$$

*Cela reste-il en dim infinie ?*

3. *Que se passe-t-il si l'on considère une famille infinie de formes linéaires ?*

### Solution proposée.

1. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer la famille libre, car cela ne change ni le rang (clair), ni l'intersection des noyaux puisque

$$\psi \in \text{Vect} \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \implies \bigcap_{i=1}^r \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \psi.$$

On observe ensuite que  $\bigcap \text{Ker } \varphi_i$  est le noyau de l'application

$$\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : E \longrightarrow K^r.$$

Le théorème du rang nous donne alors

$$\text{codim} \bigcap \text{Ker } \varphi_i = \text{rg } \varphi$$

que l'on souhaite égal à  $r$ , dimension de l'espace d'arrivée. Pour conclure, il suffit donc de montrer que  $\varphi$  est surjective.

Si cela n'était pas possible, on pourrait inclure le sev strict  $\text{Im } \varphi$  dans un hyperplan  $H$  de  $K^r$ . Considérons une équation de  $H$ , mettons  $\sum a_i x_i = 0$  avec  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . La condition  $\text{Im } \varphi \subset H$  se traduit alors par  $\sum a_i \varphi_i = 0$ , contredisant la liberté des  $\varphi_i$ .

Aucun modification en dim infinie.

2. Le sens  $\boxed{\Leftarrow}$  est clair. Pour le sens  $\boxed{\Rightarrow}$ , on se souvient qu'un vecteur  $a$  est lié à une partie  $A$  ssi  $\text{rg}(A \cup \{a\}) = \text{rg } A$ . On regarde donc

$$\begin{aligned} \text{rg} \{\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} &= \text{codim} \left( \text{Ker } \psi \cap \bigcap \text{Ker } \varphi_i \right) = \text{codim} \left( \bigcap \text{Ker } \psi \cap \text{Ker } \varphi_i \right) \\ &= \text{codim} \left( \bigcap \text{Ker } \varphi_i \right) = \text{rg} \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}, \text{ d'où } \psi \text{ liée aux } \varphi_i, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

Aucune intervention de la dimension finie.

3. Si  $E$  reste de dim finie, le lemme est encore valide pour les familles infinies : en effet,  $E^*$  étant alors de dim finie, il n'y pas de famille libre de formes linéaires infinie !

Quand  $E$  est de dimension infinie, le lemme tombe en défaut pour une famille infinie, même si  $F$  est de dim finie. Prenons carrément  $F = K$ . En notant  $e_i^*$  les formes linéaires coordonnées dans une base  $(e_i)$  de  $E$ , il est clair que  $\bigcap \text{Ker } e_i^* = \{0\}$ , donc la validité du lemme impliquerait que toute forme linéaire soit engendrée par les  $e_i^*$ , ce qui est faux : la forme « diagonale »  $\sum x_i e_i \mapsto \sum x_i$  ne saurait être engendré par un nombre fini  $(e_j^*)_{j \in J}$ , sinon n'importe quel<sup>28</sup>  $e_i$  avec  $i \notin J$  serait d'image nulle (or, tous les  $e_i$  sont envoyés sur 1).

<sup>28</sup>il en existe puisque  $\dim E$  est infini

**Remarques.** Le lecteur ayant quelques notions de dualité pourra trivialisier cet exercice en dim finie en observant que

$$\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \left( \sum K\varphi_i \right) = \left( \bigcap (K\varphi_i)^\circ \right)^\perp = \left( \bigcap \text{Ker } \varphi_i \right)^\perp,$$

puis que

$$\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \dim \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \text{codim} [\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)^\circ] = \text{codim} \bigcap \text{Ker } \varphi_i.$$

En dim finie, le premier point se traite aisément avec les matrices : en introduisant  $A := \text{Mat}_{e_i^*}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  de sorte que  $\text{rg } A = \text{rg} \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ , on montre aisément que  $\text{Ker } A = \bigcap \text{Ker } \varphi_i$ .

En dim quelconque, si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont des formes linéaires et  $\varphi$  l'application  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , il n'est pas bien difficile de voir que  $\text{rg } \varphi = \text{rg} \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Lorsque les  $\varphi_i$  sont libres, on retrouve la surjectivité de  $\varphi$ .

Nous généraliserons en fin de feuille l'équivalence en prenant pour espace d'arrivée n'importe quel ev autre que le corps de base.

Finissons cette feuille d'exercices en étudiant les idéaux de l'anneau  $L(E)$  ainsi que leurs analogues dans  $L(E, F)$ . Comme ce dernier n'est en général pas commutatif, il faut distinguer les idéaux à gauche des idéaux à droite et des idéaux bilatères.

En ce qui concerne  $L(E, F)$ , on ne peut plus étudier ses idéaux à proprement parler puisque  $L(E, F)$  n'est pas un anneau (pour  $E \neq F$ ). Ce dernier est cependant muni d'une action à droite de  $L(E)$  et une action à gauche de  $L(F)$  définies par la composition. On dit que  $L(E, F)$  est un  $L(E)$ -module à droite ou un  $L(F)$ -module à gauche.

On peut alors parler de ses *sous- $L(E)$ -modules à droite*, *i. e.* de ses sous-groupes additifs stables par l'action à droite, la notions de *sous- $L(F)$ -module à gauche* se définissant de manière analogue.

Lorsque  $E = F$ , l'anneau  $L(E)$  est un  $L(E)$ -module (à droite ou à gauche) sur lui même, de sorte que ses sous- $L(E)$ -modules sont exactement ses idéaux<sup>29</sup>.

Pour ne pas alourdir le discours, nous parlerons d'idéal à droite/gauche dans tous les cas.

Pour des raisons de dualité, les idéaux à droite et les idéaux à gauche « ont le même comportement ». Ils sont intimement reliés à deux lemmes de factorisation d'applications linéaires, l'un parlant de sommes d'images, l'autre (par dualité) d'intersections de noyaux. On ne s'étonnera donc guère que les deux exercices qui suivent aient été forgés dans le même métal.

## 17 Idéaux à droite de $L(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux ev.

Pour  $W$  sev de  $F$ , on pose

$$I_W := \{u \in L(E, F) ; \text{Im } u \subset W\}.$$

Pour  $U$  partie de  $L(E, F)$ , on notera  $I_U$  l'idéal à droite de  $L(E, F)$  engendré par  $U$

$$I_U := \sum_{u \in U} uL(E)$$

et  $W_U$  le sev de  $F$  engendré par les images des éléments de  $U$

$$W_U := \text{Vect } U(E) = \sum_{u \in U} \text{Im } u.$$

On notera  $\text{Facto } U$  le lemme de factorisation

$$\forall f \in L(E, F), \left[ \text{Im } f \subset \sum_{u \in U} \text{Im } u \iff f \in \sum_{u \in U} uL(E) \right],$$

ce qui s'écrit de façon plus concise

$$\text{Facto } U \stackrel{\text{définition}}{\iff} I_{W_U} = I_U.$$

<sup>29</sup>Ce fait est commun à tous les anneaux. Un idéal d'un anneau  $A$  n'est autre qu'un sous- $A$ -module.

Le but du problème est de déterminer les idéaux à droite de  $L(E, F)$  lorsque  $E$  ou  $F$  est de dim finie.

### Questions préliminaires.

1. Montrer que l'application  $W \mapsto I_W$  est injective (modulo une condition pathologique que l'on précisera). Expliciter la réciproque.
2. En déduire, pour  $I$  idéal à droite de  $L(E, F)$ , l'équivalence

$$(\exists W \subset F \text{ sev}, I = I_W) \iff \text{Facto } I.$$

Expliciter la bijection sous-jacente.

3. Soit  $U$  une partie de  $L(E, F)$ . Montrer l'équivalence

$$\text{Facto } U \iff (\exists W \subset F \text{ sev}, I_U = I_W).$$

La description des idéaux à droite est donc intimement liée aux lemmes Facto  $U$ .

### Les idéaux à droite de $L(E, F)$ sont des $I_W$ lorsque $E$ ou $F$ est de dim finie.

1. On suppose  $E = F$  de dim finie : quels sont les idéaux à droite de  $L(E)$  ?
2. On suppose  $F$  de dim finie : déterminer les idéaux à droite de  $L(E, F)$ .
3. Que se passe-t-il lorsque  $F$  n'est plus de dim finie ? Étudier le cas où  $E$  est de dim finie.
4. Montrer qu'en toute dimension les idéaux à droite de type fini<sup>30</sup> sont de la forme  $I_W$ . La réciproque est-elle vraie ?

### Question supplémentaires (pour tâter la dim infinie).

1. Soit  $I$  un idéal à droite de  $L(E, F)$ .
  - (a) Montrer que  $\dim I \geq \dim E$  dès que  $I$  n'est pas l'idéal nul.
  - (b) Montrer que le sev engendré par  $E^* \cdot W_I$  est constitué des éléments de  $I$  de rang fini :

$$I \cap \{\text{rang fini}\} = E^* \cdot W_I.$$

2. (a) Soient  $U' \subset U$  deux parties de  $L(E, F)$  telles que  $W_{U'} = W_U$ . Prouver l'implication

$$\text{Facto } U' \implies \text{Facto } U.$$

- (b) On suppose  $E$  de dim infinie. Exhiber une partie  $U \subset L(E, F)$  infirmant Facto  $U$ , puis montrer que ce dernier est toujours mis en défaut dès qu'il existe une partie  $U' \subset U$  infinie telle que

$$\forall u' \in U', \text{Im } u' \not\subset \sum_{u \in U, u \neq u'} \text{Im } u.$$

Cette condition est-elle réalisable lorsque  $F$  est de dim finie ?

- (c) Montrer qu'il n'y a aucun lien logique entre les parties  $U'$  de la question (a) et celles de la question (b) Exhiber carrément un  $U$  dont aucune partie  $U' \subset U$  ne peut vérifier les deux conditions à la fois<sup>31</sup>.
3. On suppose  $E$  et  $F$  de dim infinie. Montrer que, pour avoir Facto  $U$ , il suffit d'avoir Facto  $U'$  pour une partie  $U' \subset U$  finie et il faut que les  $u \in U$  tels que  $\text{Im } u \not\subset W_{U \setminus \{u\}}$  soient en nombre fini.

<sup>30</sup>Un idéal à droite  $I$  d'un anneau  $A$  est dit de type fini lorsqu'il est engendré par un nombre fini d'éléments, i. e. lorsqu'on peut écrire

$$I = i_1 A + \dots + i_n A$$

où  $i_1, \dots, i_n$  sont des éléments de  $A$ .

<sup>31</sup>En toute rigueur, dans ce cas précis, les deux conditions seront équivalentes car vides – mais sans intérêt aucun.

**Solution proposée (préliminaires).**

Il est immédiat que les  $I_W$  sont des idéaux à droite. Soit réciproquement  $I$  un tel idéal. Au vu du résultat attendu, il serait bien de trouver un sev qui contient tous les  $\text{Im } i$  pour  $i \in I$ . Un bon candidat est le plus petit<sup>32</sup> sev vérifiant cela, à savoir

$$W := \text{Vect} \left( \bigcup_{i \in I} \text{Im } i \right) = \sum_{i \in I} \text{Im } i = W_I.$$

On va donc s'intéresser au caractère (espérons-le) bijectif de l'application suivante

$$\begin{cases} \{\text{sev de } F\} & \longrightarrow & \{\text{idéaux à droite de } L(E, F)\} \\ W & \longmapsto & I_W \\ W_I & \longleftarrow & I \end{cases}$$

qui paramètrera (espérons-le) les idéaux à droite de  $L(E, F)$  par les sev de  $F$ .

- Pour montrer l'injectivité de  $W \mapsto I_W$ , on montre que l'application  $I \mapsto W_I$  en est un inverse à gauche. Pour cela, on fixe un sev  $W$  de  $F$  et on montre  $W_{I_W} = W$ , *i. e.*  $\sum_{\text{Im } u \subset W} \text{Im } u = W$ . L'inclusion  $\subset$  est évidente et la somme précédente contiendra  $W$  si<sup>33</sup> l'on peut trouver pour tout  $v \in W$  un  $u \in L(E, F)$  d'image  $\subset W$  qui atteint  $v$ . Pour ce faire, on prend un vecteur  $a \in E$  non nul<sup>34</sup> et on l'envoie sur un  $v \in W$  quelconque; en envoyant un supplémentaire de  $Ka$  sur 0, on définit ainsi autant d'applications linéaires d'images  $Kv$  dont la somme va reformer le sev  $W$  cherché, *CQFD*.
- Soit  $I$  un idéal à droite. Le lemme *Facto I* s'énonce  $I_{W_I} \stackrel{?}{=} I$ . La somme  $I_I = \sum_{i \in I} iL(E)$  restant incluse dans  $I$  par idéalité à droite de ce dernier et contenant clairement tous les  $i \in I$ , elle vaut  $I$ . Le lemme *Facto I* devient donc  $I_{W_I} \stackrel{?}{=} I$ .  
 $\boxed{\implies}$  Supposons  $I$  de la forme  $I_W$ . D'après l'égalité  $W_{I_W} = W$  du premier point, on peut écrire  $I_{W_I} = I_{W_{I_W}} = I_W = I$ , *CQFD*.  
 $\boxed{\impliedby}$  Clair : supposer *Facto I* revient à écrire  $I$  sous la forme  $I_{W_I}$ .
- Fixons un  $U \subset L(E, F)$  et notons  $I := I_U$ . Vu la question précédente, il s'agit de montrer l'équivalence

$$\text{Facto } U \iff \text{Facto } I.$$

Il est clair que  $I$  est un idéal à droite, donc (comme l'on a déjà vu) vaut également  $I_I$ . Par ailleurs, les images des éléments de  $I$  sont toutes incluses dans  $W_U$  et l'inclusion  $U \subset I$  implique l'inclusion réciproque  $W_U \subset W_I$ . De l'égalité  $W_U = W_I$  ainsi montrée, on déduit les équivalences

$$\text{Facto } I \iff I_{W_I} = I_I \iff I_{W_U} = I \iff \text{Facto } U, \text{ CQFD.}$$

**Solution proposée (description des idéaux à droite en dim finie).**

- Vue les questions préliminaires, il suffit montrer le caractère bijectif de

$$\begin{cases} \{\text{sev de } E\} & \longrightarrow & \{\text{idéaux à droite de } L(E)\} \\ W & \longmapsto & I_W \\ W_I & \longleftarrow & I \end{cases}.$$

Toujours d'après les premières questions, il suffit de montrer<sup>35</sup> *Facto U* pour toute partie  $U \subset L(E)$ . Le sens  $\boxed{\impliedby}$  du lemme étant trivial, on ne s'intéresse qu'à  $\boxed{\implies}$ .

On part de  $\text{Im } f \subset W_U$  avec  $U \subset L(E)$ . Considérons une base finie  $(a_j)$  de  $W_U = \sum \text{Im } u$  et récupérons des  $u$  en nombre fini qui suffisent à exprimer les  $a_j$ , mettons

$$a_j = \sum_{k=1}^n u_k \left( b_k^j \right) \text{ pour tout } j.$$

<sup>32</sup>Si l'on en prend un plus grand, les conditions seront plus lâches et nous pourrions alors autoriser d'autres gens que les habitants de  $I$ .

<sup>33</sup>Dans le cas simple où  $E = F$ , on peut directement trouver un  $u \in L(E)$  d'image  $V$ , (considérer un projecteur d'image  $V$ ), mais cela force  $E$  à contenir un sev isomorphe à  $V$ , d'où la condition  $\dim E \geq \dim V$  qui pourrait très bien ne pas être réalisée.

<sup>34</sup>Ne pas oublier le cas pathologique où  $E$  est nul : l'ev  $L(E, F)$  l'est alors également, donc tous ses idéaux à droite aussi. L'application considérée est ainsi d'image nulle, donc sera injective ssi les sev de  $F$  sont au nombre de 1, *i. e.* ssi  $F$  est nul.

<sup>35</sup>Le lecteur vérifiera que la bijection donnée en est toujours une dans le cas pathologique où  $E$  est nul.

L'inclusion peut se réécrire

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K^E, \forall x \in E, f(x) = \sum \lambda_j(x) a_j$$

où les  $\lambda_i$  sont linéaires par liberté des  $a_j$ . On peut alors directement écrire

$$f = \sum_j \lambda_j(\cdot) a_j = \sum_j \lambda_j(\cdot) \sum_k u_k \left( b_k^j \right) = \sum_k u_k \left( \sum_j \lambda_j(\cdot) b_k^j \right) \in I_U, \text{ CQFD.}$$

2. On fait exactement comme pour la question 1 : si  $E$  est non nul, il suffit de montrer le lemme de factorisation<sup>36</sup> et surtout le sens  $\boxed{\implies}$ . Nous proposons une solution différente que permet la différence entre  $E$  et  $F$ .

On regarde d'abord le cas d'un singleton  $U = \{u\}$ , mais nous allons le généraliser en considérant trois ev  $E, F, G$  avec  $G$  de dim finie : pour  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{u} G$ , on sait<sup>37</sup> que

$$\text{Im } f \subset \text{Im } u \implies f \in uL(E, F)$$

Soit un tel  $f$ . En considérant une base finie  $(u(a_i))$  de  $\text{Im } u$  (on peut car on est dans  $F$ ), on écrit comme ci-dessus  $f = \sum \lambda_i(\cdot) u(a_i)$  où les  $\lambda_i$  sont des formes linéaires par liberté des  $u(a_i)$ , d'où

$$f = u \left( \sum \lambda_i(\cdot) a_i \right) \in uL(E, F), \text{ CQFD.}$$

Supposons ensuite  $\text{Im } f \subset W_U$  pour un  $U \subset L(E, F)$ . On va exprimer  $W_U = \sum \text{Im } u$  comme l'image d'une seule application  $v$  pour appliquer ce qui précède. Un bon candidat est  $\begin{cases} E^{(U)} & \longrightarrow & F \\ (x_u) & \longmapsto & \sum u(x_u) \end{cases}$  (il est en effet clair que son image est  $\sum \text{Im } u$ ). Pour des questions de finitude, considérons d'abord une base (finie) de  $\sum \text{Im } u$  et récupérons les  $u$  utilisés pour exprimer les vecteurs de cette base. Ces  $u$  sont en nombre fini, mettons  $u_1, \dots, u_n$ . On regarde alors plutôt

$$v : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & \sum u_i(x_i) \end{cases}.$$

Puisque  $\text{Im } f \subset \text{Im } v$  et que l'ev  $F$  à l'arrivée est de dim finie, on peut d'après le premier point factoriser  $f = v\varphi$  où  $\varphi \in L(E, E^n)$ . En posant  $\varphi_i := \pi_i \varphi$  où  $\pi_i : E^n \rightarrow E$  désigne la projection canonique sur la  $i$ -ième coordonnée, on peut écrire  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  où tous les  $\varphi_i$  sont dans  $L(E)$ , d'où

$$f = v \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum u_i \varphi_i, \text{ CQFD.}$$

3. Lorsque  $F$  n'est plus de dim finie, l'étape cruciale dans les démonstrations ci-dessus qui était de considérer une base finie de  $W_U$  ne marche plus!

Si l'on dispose d'une partie  $U$  finie, on s'en sort encore, au prix toutefois d'une utilisation de l'axiome du choix. Explicitons  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ . On choisit<sup>38</sup> une section linéaire  $s : W_U \rightarrow E^n$  de la surjection  $v : \begin{cases} E^n & \twoheadrightarrow & W_U \\ \vec{x} & \longmapsto & \sum u_i(x_i) \end{cases}$ , on explicite les fonctions coordonnées de  $s = (s_1, \dots, s_n)$ , ce qui permet d'écrire pour un  $f$  d'image incluse dans  $W_U$

$$f = \text{Id}_{W_U} \circ f = v s f = v \circ (s_1, \dots, s_n) \circ f = \left( \sum u_i s_i \right) \circ f = \sum u_i \circ (s_i f) \in I_U, \text{ CQFD.}$$

Cependant, la question préliminaire 4.(b) montre que le lemme peut tomber en défaut pour une infinité de  $u_n$ , même si ceux-ci sont de rang 1.

Dans le cas où  $E$  est de dim finie, montrons que les idéaux à droite sont bien de la forme attendue<sup>39</sup>.

Notons  $(e_k)$  une base de  $E$ . Soit  $I$  un idéal à droite de  $L(E, F)$ . Notons  $W := W_I$  et montrons que  $I = I_W$ , l'inclusion  $\subset$  étant claire. Puisque tout  $f : E \rightarrow F$  s'écrit  $\sum e_k^*(\cdot) f(e_k)$ , les éléments de  $I_W$  sont combinaisons linéaires des  $e_k^*(\cdot) v_k$  pour  $v_k$  dans  $W$ . Les  $v_k$  étant combinaisons linéaires d'éléments  $\iota(x)$  pour  $\iota$  dans  $I$  et  $x = \sum x_k e_k$  dans  $E$ , les éléments de  $I_W$  sont combinaisons linéaires des  $e_k^*(\cdot) \iota(e_l) = \iota \circ (e_k^*(\cdot) e_l)$ , lesquels sont dans  $I$  puisque ce dernier est un idéal à droite. Finalement, on a montré l'inclusion  $I_W \subset I$ , CQFD.

<sup>36</sup> Si  $E$  est nul, notre application  $V \mapsto I_V$  reste surjective, ce qui nous suffit.

<sup>37</sup> cf. exercice « Factorisation d'applications linéaires et inclusion d'images »

<sup>38</sup> comme dans l'exercice « Factorisation d'applications linéaires et inclusion d'images »

<sup>39</sup> ce qui montrera, d'après la question 1.(c), le lemme Facto $U$  pour tout  $U$

4. Soit  $I = i_1L(E) + \dots + i_nL(E)$  un idéal à droite de type fini. Le lemme Facto  $U$  appliqué à la partie  $U := \{i_1, \dots, i_n\}$  permet d'écrire

$$I = I_U = I_{W_U} \text{ qui est bien du type } I_W.$$

La réciproque est fautive dès que  $\dim F > \dim E$  sont infinies. Considérons en effet un idéal  $I = i_1L(E) + \dots + i_nL(E)$  de type fini. En notant  $(u_r)$  une base de  $L(E)$ , l'ev  $I$  est engendré par la famille  $(i_k u_r)_{k,r}$ , donc sa dimension est majorée par  $n(\dim E)^2 < \dim E \dim F = \dim L(E, F)$ . Les idéaux de la forme  $I_W$  ne pourront donc jamais atteindre l'idéal total  $I_F = L(E, F)$ .

**Solution proposée (pour tâter la dim infinie).**

1. (a) Soit  $(e_k)$  une base de  $E$  et  $I$  idéal à droite de  $L(E, F)$  non nul. Il y a donc un  $\iota$  dans  $I$  et un indice  $k_0$  tels que le vecteur  $a := \iota(e_{k_0})$  soit non nul. En composant  $\iota$  à droite par la projection  $\pi_{k_0}$  sur la  $k_0$ -ième coordonnée parallèlement aux autres, on obtient une application linéaire  $\iota\pi_{k_0}$  qui envoie  $e_{k_0}$  sur  $a$  et les autres  $e_k$  sur  $0$  : c'est l'application  $e_{k_0}^*(\cdot)a$ . En composant ensuite (toujours à droite pour rester dans  $I$ ) par les endomorphismes  $e_k^*(\cdot)e_{k_0}$  afin d'échanger  $e_k$  et  $e_{k_0}$ , on récupère dans  $I$  tous les  $e_k^*(\cdot)a$

Montrons que ces derniers sont libres dans  $I$ , ce qui conclura. Partant d'une relation de liaison  $\sum \lambda_k e_k^*(\cdot)a = 0$ , évaluer en chaque  $e_k$  donne  $\lambda_k a = 0$ , d'où  $\lambda_k = 0$  puisque  $a$  est non nul, *CQFD*.

- (b) Notons  $W := W_I$ . Soit un élément de  $\text{Vect}(E^* \cdot W)$ . Il s'écrit  $\sum_1^n \varphi_i(\cdot)w_i$  pour un entier  $n \geq 0$  et pour des  $(\varphi_i, w_i) \in E^* \times W$ , donc est de rang  $\leq n$ . Pour montrer qu'il appartient à  $I$ , il suffit de montrer que chaque  $\varphi_i(\cdot)w_i$  est dedans. Puisque les  $w_i$  se décomposent dans  $\sum_{\iota \in I} \text{Im } \iota$ , il suffit de montrer que tous les  $\varphi(\cdot)\iota(a)$  sont dans  $I$  avec  $(\varphi, \iota, a) \in E^* \times I \times E$ . Il suffit d'écrire  $\varphi(\cdot)\iota(a)$  comme produit d'un élément de  $I$  par n'importe quoi d'autre (à droite), par exemple

$$\varphi(\cdot)\iota(a) = \iota \circ [\varphi(\cdot)a].$$

Soit réciproquement  $\iota \in I$  de rang fini. Considérant une base  $(y_1, \dots, y_n)$  de son image, on peut écrire

$$\forall x \in E, \iota(x) = \lambda_1(x)y_1 + \dots + \lambda_n(x)y_n$$

où les  $\lambda_i$  sont uniques par liberté des  $y_i$ , donc linéaires. L'élément  $\iota$  est par conséquent combinaison linéaire d'éléments  $\lambda_i(\cdot)y_i$  de  $E^* \cdot \text{Im } \iota \subset E^* \cdot W$ , donc reste dans  $\text{Vect}(E^* \cdot W)$ .

2. L'idée des propriétés vérifiées par les deux  $U'$  est d'élaguer dans  $\sum \text{Im } u$  les  $u$  qui ne changent pas la valeur  $W_U$  de la somme.

- (a) Supposant Facto  $U'$ , il vient

$$I_{W_U} = I_{W_{U'}} = I_{U'} \subset I_U;$$

l'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité  $I_{W_U} = I_U$ , *i. e.* Facto  $U$ .

- (b) Considérer l'ev  $\mathbb{R}[X]$  et les endomorphismes  $u_n$  définis comme étant les projections sur  $\mathbb{R}X^n$  parallèlement à  $\bigoplus_{i \neq n} \mathbb{R}X^i$ . La somme de leurs images recouvre tout l'espace, donc Facto  $\{u_n\}$  impliquerait que tout endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  s'écrive comme somme finie de  $u_n f_n$ , donc soit de rang fini (puisque les  $u_n$  le sont), ce qui n'est pas le cas de l'identité.

Pour le cas général, aidons-nous de l'exemple précédent. Il suffit<sup>40</sup> de construire un  $f : E \rightarrow F$  dont l'image est incluse dans  $\sum_U \text{Im } u$  mais non incluse dans  $\sum_{\tilde{U}} \text{Im } u$  pour toute partie  $\tilde{U} \subset U$  finie. En effet, si Facto  $U$  était vrai,  $f$  devrait tomber dans  $\sum_U uL(E)$ , donc dans une somme finie  $\sum_{\tilde{U}} uL(E)$ , donc son image serait incluse dans  $\sum_{\tilde{U}} \text{Im } u$ , contradiction.

Pour cela, il suffit de définir  $f$  en envoyant une suite libre  $(e_n)$  de vecteurs de  $E$  sur une famille  $(f_n)$  de  $F$  telle que

$$\forall n, u_n \in U \text{ et } f_n \in \text{Im } u_n \setminus \sum_{u \in U, u \neq u_n} \text{Im } u,$$

puis de prolonger  $f$  par  $0$  sur un supplémentaire de  $\text{Vect}\{e_n\}$ . En effet, l'image de  $f$ , qui vaut  $\text{Vect}\{f_n\} = \sum \text{Im } u_n$ , sera bien incluse dans  $\sum_U \text{Im } u$ , mais, si elle était incluse dans une somme finie  $\sum_{\tilde{U}} \text{Im } u$ , on pourrait trouver un  $u_n$  différent<sup>41</sup> des  $u \in \tilde{U}$ , d'où un vecteur  $f_n$  dans  $\text{Im } f$  (par construction de  $f$ ) hors de  $\sum_{u \neq u_n} \text{Im } u \supset \sum_{u \in \tilde{U}} \text{Im } u$ , d'où la contradiction.

<sup>40</sup>le lecteur pourra vérifier la nécessité de la condition qui suit

<sup>41</sup>il y a une infinité de  $u_n$

Puisque  $E$  est de dim infinie, on dispose bien d'une suite libre  $(e_n) \in E^{\mathbb{N}}$ . Pour obtenir la condition sur les images, on prend une suite  $(u_n)$  injective dans  $U'$  (on peut car  $U'$  est infini), puis on utilise la propriété

$$\forall u' \in U', \text{Im } u' \not\subset \sum_{u \in U, u \neq u'} \text{Im } u$$

qui nous permet de piocher pour tout  $n$  un  $f_n$  dans  $\text{Im } u_n$  privé de  $\sum_{u \in U, u \neq u_n} \text{Im } u$ , *CQFD*.

Cette condition est impossible à réaliser lorsque  $F$  est de dim finie. En effet, elle va impliquer

$$\dim W_U \geq |U'|.$$

Pour le voir, vu que  $W_{U'} \subset W_U$ , il suffit de le montrer pour  $U = U'$ . Il s'agit alors d'exhiber une famille libre de  $W_U$  indexée par  $U$ . Or, l'on dispose pour tout  $u \in U$  d'un  $f_u \in \text{Im } u \setminus W_{U \setminus \{u\}}$  : aucun  $f_u$  ne saurait être lié aux autres, sinon on aurait un  $f_u$  dans  $W_{U \setminus \{u\}}$ , ce qui est impossible.

On voit ainsi que la condition n'est réalisable que pour  $F$  de dim infinie.

- (c) Prenons une partie  $U$  formée de (au moins deux) projecteurs sur un même sev  $W \subset E$  (par exemple  $U = L(E, F)$ ) Alors, pour toute partie  $U' \subset U$ , on a  $W_{U'} = W = W_U$ , mais il est impossible de réaliser la seconde condition puisque<sup>42</sup>

$$\forall u \in U, \text{Ker } u = W = \bigcap_{u' \neq u} \text{Ker } u'.$$

Autre exemple : prenons n'importe quelle partie  $U^-$  telle que  $W_{U^-} = F$  et réunissons-là avec n'importe quelle partie  $U'$  (non incluse dans  $U^-$ ) pour former  $U := U^- \cup U'$ . Puisque  $W_U$  contient  $W_{U^-} = F$ , il vaut  $F$ , mais, pour un  $u' \in U'$ , on aura  $U \setminus \{u'\} \supset U^-$ , d'où  $W_{U \setminus \{u'\}} \supset W_{U^-} = F$ , de sorte que  $\text{Im } u' \not\subset W_{U \setminus \{u'\}}$  est toujours faux.

Pour l'autre sens, il suffit de prendre  $U'$  vide (la seconde condition est alors tautologiquement vérifiée) et  $U$  non nulle (afin que  $W_U \neq \{0\} = W_{\emptyset} = W_{U'}$ ).

Pour un exemple moins pathologique, prenons  $U^-$  n'importe quelle partie telle que  $W_{U^-} \subsetneq F$  et  $u$  une application telle que  $W_{U^-} \subsetneq \text{Im } u$  (on pourra toujours si  $\dim F \geq \dim E$ ). Noter qu'un tel  $u$  ne peut être dans  $U^-$ , sinon  $\text{Im } u \subset W_{U^-} \subsetneq \text{Im } u$ . Posant  $U' := \{u\}$  et  $U := U^- \amalg U'$ , l'image de  $u$  ne saurait être incluse dans  $W_{U \setminus \{u\}} = W_{U^-}$ , mais  $W_U = W_{U^-} + \text{Im } u = \text{Im } u$  est différent de  $W_{U'}$  (il le contient strictement).

Pour la dernière question, prenons un  $U$  formé des éléments d'une suite  $(u_n)$  non nulle d'endomorphismes dont les images croissent<sup>43</sup>. Chaque  $u \in U$  est un  $u_n$ , donc d'image incluse dans  $\text{Im } u_{n+1} \subset \sum_{u \neq u_n} \text{Im } u$ , ce qui montre que la seule partie  $U'$  possible est le vide ; cela impliquerait  $W_U = W_{U'} = W_{\emptyset} = \{0\}$ , imposant  $U = \{0\}$ , d'où  $u_n = 0$  pour tout  $n$ , contradiction.

3. Nous avons montré que  $\text{Facto } U$  est impliqué par «  $U$  fini » (*cf.* question 3 précédente) ou «  $\exists U' \subset U$ ,  $\text{Facto } (U')$  » (*cf.* question 2.(a)) ; il sera donc impliqué par «  $\exists U' \subset U$  fini,  $\text{Facto } U'$  ». Par ailleurs, la question 2.(b) nous donne la condition nécessaire.

La question 3.(c) ruine cependant tout espoir de réunir ces deux conditions en une seule CNS.

**Remarque.** On retiendra de toute cela le lemme de factorisation suivant :

$$\text{Im } f \subset \text{Im } u_1 + \cdots + \text{Im } u_p \iff \exists f_1, \dots, f_p, f = u_1 f_1 + \cdots + u_p f_p.$$

Le cas d'une famille  $(u_i)$  quelconque fonctionne si  $\dim E$  ou  $\dim \sum_{u \in U} \text{Im } u$  est fini.

## 18 Idéaux à gauche de $L(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux ev.

Pour un sev  $V$  de  $E$ , on pose

$$J_V := \{u \in L(E, F) ; u|_V = 0\} = \{u \in L(E, F) ; V \subset \text{Ker } u\}.$$

<sup>42</sup>la somme comporte au moins une image  $V$  puisqu'on a pris  $|U| \geq 2$

<sup>43</sup>Par exemple, dans  $E = F = \mathbb{R}[X]$ , les projecteurs sur  $\mathbb{R}_n[X]$  pour  $n$  décrivant  $\mathbb{N}$ .



Pour  $U$  partie de  $L(E, F)$ , on notera  $J_U$  l'idéal à gauche de  $L(E, F)$  engendré par  $U$

$$J_U = \sum_{u \in U} L(F)u$$

et  $V_U$  l'intersection des noyaux des éléments de  $U$

$$V_U := \bigcap_{u \in U} \text{Ker } u.$$

On notera  $\text{Facto } U$  le lemme de factorisation suivant

$$\forall f \in L(E, F), \left[ \bigcap_{u \in U} \text{Ker } u \subset \text{Ker } f \iff f \in \sum_{u \in U} L(F)u \right],$$

ce qui s'écrit de manière plus concise

$$\text{Facto } U \stackrel{\text{définition}}{\iff} J_{V_U} = J_U.$$

Le but du problème est de déterminer les idéaux à gauche de  $L(E, F)$  lorsque  $E$  ou  $F$  est de dim finie.

### Questions préliminaires.

1. Montrer que l'application  $V \mapsto J_V$  est injective (modulo une condition pathologique que l'on précisera).  
Expliciter la réciproque.
2. En déduire, pour  $J$  idéal à gauche de  $L(E, F)$ , l'équivalence

$$(\exists V \subset F \text{ sev}, J = J_V) \iff \text{Facto } J.$$

Expliciter la bijection sous-jacente.

3. Soit  $U$  une partie de  $L(E, F)$ . Montrer l'équivalence

$$\text{Facto } U \iff (\exists V \subset F \text{ sev}, J_U = J_V).$$

La description des idéaux à gauche est donc intimement liée aux lemmes  $\text{Facto } U$ .

### Description des idéaux à gauche de $L(E, F)$ lorsque $E$ ou $F$ est de dim finie.

1. Montrer la proposition

$$\forall u, v \in L(E, F), \exists \alpha, \beta \in L(F), \text{Ker}(\alpha u + \beta v) = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v.$$

2. On suppose  $E$  de dim finie. Décrire les idéaux à gauche de  $L(E, F)$ .
3. Proposer une autre démonstration du point précédent lorsque  $E$  et  $F$  sont de dim finie.
4. Donner une autre démonstration de  $\text{Facto } U$  pour  $U$  finie utilisant la différence de  $E$  et  $F$ .
5. Pour  $S$  sev du dual  $E^*$ , on pose

$$J_S := \{f \in L(E, F) ; F^* \circ f \subset S\}.$$

Vérifier<sup>44</sup> que  $J_{V^\perp} = J_V$  pour tout sev  $V$  de  $E$ , puis que tous les idéaux à gauche de  $L(E, F)$  sont des  $J_S$  lorsque  $F$  est de dim finie. Contre-exemple ?

6. Montrer qu'en toute dimension les idéaux à gauche de type fini<sup>45</sup> sont de la forme  $J_V$ . La réciproque est-elle vraie ?

<sup>44</sup> On rappelle que l'orthogonal d'un sev  $V$  de  $E$  est le sev  $V^\perp$  de  $E^*$  formé des formes linéaires s'annulant sur  $V$ .

<sup>45</sup> Un idéal à gauche  $J$  d'un anneau  $A$  est dit de type fini lorsqu'il est engendré par un nombre fini d'éléments, i. e. lorsqu'on peut écrire

$$J = Aj_1 + \dots + Aj_n$$

où  $j_1, \dots, j_n$  sont des éléments de  $J$ .

**Question supplémentaires (pour tâter la dim infinie).**

1. Soit  $J$  un idéal à gauche de  $L(E, F)$ .
  - (a) Montrer que  $\dim J \geq \dim F$  dès que  $J$  n'est pas l'idéal nul.
  - (b) Montrer que le sev  $\text{Vect}[(F^* \circ J) \cdot F]$  est constitué des éléments de  $J$  de rang fini.
2. (a) Soient  $U' \subset U$  deux parties de  $L(E, F)$  telles que  $V_{U'} = V_U$ . Prouver l'implication

$$\text{Facto } U' \implies \text{Facto } U.$$

- (b) On suppose  $F$  non nul. Exhiber une partie  $U \subset L(E, F)$  infirmant  $\text{Facto } U$ , puis montrer que ce dernier est toujours mis en défaut dès qu'il existe une partie  $U' \subset U$  infinie telle que

$$\forall u' \in U', \quad \bigcap_{u \in U, u \neq u'} \text{Ker } u \not\subset \text{Ker } u'.$$

Cette condition est-elle réalisable lorsque  $E$  est dim finie ?

- (c) Montrer qu'il n'y a aucun lien logique entre les parties  $U'$  de la question (a) et celles de la question (b) Exhiber carrément un  $U$  dont aucune partie  $U' \subset U$  ne peut vérifier les deux conditions à la fois<sup>46</sup>.
3. On suppose  $E$  et  $F$  de dim infinie. Montrer que, pour avoir  $\text{Facto } U$ , il suffit d'avoir  $\text{Facto } U'$  pour une partie  $U' \subset U$  finie et il faut que les  $u \in U$  tels que  $V_{U \setminus \{u\}} \not\subset \text{Ker } u$  soient en nombre fini.

**Solution proposée (préliminaires).**

Il est immédiat que les  $J_V$  sont des idéaux à gauche. Soit réciproquement  $J$  un tel idéal. Au vu du résultat attendu, il serait bien de trouver un sev inclus dans tous les  $\text{Ker } j$  pour  $j \in J$ . Un bon candidat est le plus grand<sup>47</sup> sev vérifiant cela, à savoir

$$V := \bigcap_{j \in J} \text{Ker } j.$$

On va donc s'intéresser au caractère (espérons-le) bijectif de l'application suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{\text{sev de } E\} & \longrightarrow \{\text{idéaux à gauche de } L(E, F)\} \\ V & \longmapsto J_V \\ \bigcap_{j \in J} \text{Ker } j & \longleftarrow J \end{array} \right.$$

qui paramètrera (espérons-le) les idéaux à gauche de  $L(E, F)$  par les sev de  $E$ .

1. Pour montrer l'injectivité de  $V \mapsto J_V$ , on montre que l'application  $J \mapsto V_J$  en est un inverse à gauche. Pour cela, on fixe un sev  $V$  sev de  $E$  et on montre  $V_{J_V} = V$ , i. e.  $\bigcap_{V \subset \text{Ker } u} \text{Ker } u = V$ , l'inclusion  $\supset$  étant évidente. L'inclusion réciproque le deviendra si l'on peut trouver un  $u \in L(E, F)$  de noyau  $V$ ; mais cela force (par le théorème du rang)  $F$  à contenir un sev isomorphe à  $S$  avec  $E = V \oplus S$ , d'où la condition  $\dim F \geq \text{codim } V$  qui pourrait très bien ne pas être réalisée. On s'en sort autrement. Soit par l'absurde un vecteur  $x$  dans l'intersection précédente qui soit hors de  $V$ . Pour avoir une contradiction, il suffit de trouver un  $u \in L(E, F)$  s'annulant sur  $V$  mais pas en  $x$ . Pour ce faire, on considère un élément  $y \in F$  non nul<sup>48</sup> et une décomposition  $E = V \oplus Kx \oplus S$  : envoyer  $x$  sur  $y$  et le reste sur 0 fournit une application permettant de conclure.
2. Soit  $J$  idéal à gauche. Le lemme  $\text{Facto } J$  s'énonce  $J_{V_J} \stackrel{?}{=} J_J$ . La somme  $J_J = \sum_{j \in J} L(F)j$  restant incluse dans  $J$  par idéalité à gauche de ce dernier et contenant tous les  $j \in J$ , elle vaut  $J$ . Le lemme  $\text{Facto } J$  devient donc  $J_{V_J} \stackrel{?}{=} J$

$\implies$  Supposons  $J$  de la forme  $J_V$ . D'après l'égalité  $V = V_{J_V}$  du premier point, on peut écrire  $J_{V_J} = J_{V_{J_V}} = J_V = J$ , CQFD.

$\impliedby$  Clair : supposer  $\text{Facto } J$  revient à écrire  $J$  sous la forme  $J_{V_J}$ .

<sup>46</sup>En toute rigueur, dans ce cas précis, les deux conditions seront équivalentes car vides – mais sans intérêt aucun.

<sup>47</sup>Si l'on en prend un plus petit, les conditions seront plus lâches et nous pourrions alors autoriser d'autres gens que les habitants de  $J$ .

<sup>48</sup>Tout comme pour les images, dans le cas pathologique où  $F$  est nul, l'application  $V \mapsto J_V$  est surjective d'image nulle, donc injective ssi  $E$  est nul.

3. Fixons un  $U \subset L(E, F)$  et notons  $J := J_U$ . Vu la question précédente, il s'agit de montrer l'équivalence

$$\text{Facto } U \iff \text{Facto } J.$$

Il est clair que  $J$  est un idéal à gauche, donc (comme l'on a déjà vu) vaut également  $J_J$ . Par ailleurs,  $V_U$  contient les noyaux de tous les éléments de  $J$  et l'inclusion  $U \subset J$  implique l'inclusion réciproque  $V_U \subset V_J$ . De l'égalité  $V_U = V_J$  ainsi montrée, on déduit les équivalences

$$\text{Facto } J \iff J_{V_J} = J_J \iff J_{V_U} = J \iff \text{Facto } U, \text{ CQFD.}$$

**Solution proposée (description des idéaux à gauche en dim finie).**

1. Soit  $v$  et  $w$  dans  $L(E, F)$ . Posons  $\begin{cases} V := \text{Ker } v \\ W := \text{Ker } w \end{cases}$  et  $X := V \cap W$ . Afin de contrôler les interférences entre  $V$  et  $W$ , on se ramène à des sommes directes en introduisant trois supplémentaires  $V'$ ,  $W'$  et  $S$  :

$$\begin{aligned} V &= X \oplus V', \\ W &= X \oplus W', \\ E &= \underbrace{V' \oplus X \oplus W'}_{V+W} \oplus S. \end{aligned}$$

Vouloir  $\text{Ker}(\alpha v + \beta w) = X$  revient à imposer  $\alpha v + \beta w$  nul sur  $X$  et injectif sur  $V'$ ,  $W'$  et  $S$  (en effet, ces trois derniers sev sont en somme directe avec  $X$ ). Sur  $X$ , la condition souhaitée est automatique. Sur  $V'$ , on veut  $0 + \beta w$  injectif; puisque  $w$  est injectif sur  $V'$  (on est sur un supplémentaire de son noyau), on peut définir  $\beta|_{w(V')} = \text{Id}$ . De même, on posera  $\alpha|_{v(W')} = \text{Id}$ . Enfin, sur  $S$ , on peut imposer  $\alpha|_{v(S)} = 0$  puis  $\beta|_{w(S)} = \text{Id}$ . Comme il n'y a aucune autre condition, on peut mettre 0 là on nous n'avons pas défini  $\alpha$  et  $\beta$ .

Enfinement, en posant<sup>49</sup>

$$\begin{cases} \alpha := \text{Id} \oplus 0 \oplus 0 \text{ selon } F = v(W') \oplus v(S) \oplus \dots \\ \beta := \text{Id} \oplus \text{Id} \oplus 0 \text{ selon } F = w(V') \oplus w(S) \oplus \dots \end{cases},$$

l'application  $\alpha v + \beta w \in L(E, F)$  s'écrit<sup>50</sup>  $w|_{V'} \oplus 0 \oplus v|_{W'} \oplus w|_S$  où chacun des trois bouts non nuls est injectif, ce qui permet de conclure  $\text{Ker}(\alpha v + \beta w) = X$ , CQFD.

2. Vus les préliminaires, on va montrer le caractère bijectif de

$$\begin{cases} \{\text{sev de } E\} & \longrightarrow & \{\text{idéaux à gauche de } L(E, F)\} \\ V & \longmapsto & J_V \\ J_V & \longleftarrow & J \end{cases}$$

en montrant<sup>51</sup>  $\text{Facto } U$  pour toute partie  $U$  de  $L(E, F)$ . La troisième question préliminaire nous dit qu'il suffit pour cela d'avoir les  $\text{Facto } J$  pour  $J$  idéal à gauche.

Nous affirmons que, pour un tel  $J$ , l'intersection  $\bigcap_{j \in J} \text{Ker } j$  est atteinte pour un  $j_0 \in J$ . Cela permettra d'appliquer le lemme (restreint aux parties à un élément)<sup>52</sup>

$$J_{V_J} = J_{V_{\{j_0\}}} = J_{\{j_0\}} \subset J;$$

l'inclusion réciproque étant triviale, on aura l'égalité  $J_{V_J} = J$ , *i. e.*  $\text{Facto } J$  comme voulu.

Pour trouver un tel  $j_0$ , on voit qu'il doit minimiser la dimension de  $\text{Ker } j$  pour  $j$  décrivant  $J$ . On considère donc un élément  $j_0 \in J$  minimisant la dimension<sup>53</sup> du noyau associé. Prenons un autre élément  $j \in J$ . La question précédente nous donne deux endomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\text{Ker}(\alpha j_0 + \beta j) = \text{Ker } j_0 \cap \text{Ker } j.$$

La minimalité de  $\text{Ker } j_0$ , conjointe au fait que  $\alpha j_0 + \beta j$  reste dans  $J$  par idéalité à gauche de ce dernier, impose alors l'inclusion  $\text{Ker } j_0 \subset \text{Ker } j$ ; intersectant ces inclusions pour  $j$  décrivant  $J$ , il vient  $\text{Ker } j_0 \subset V_J$ , l'inclusion réciproque venant de ce que  $\text{Ker } j_0$  apparaît dans l'intersection  $V_J$ . On en déduit l'égalité souhaitée.

<sup>49</sup> la notation  $v(W') \oplus v(S)$  est valide puisque  $v$  est injectif sur  $W' \oplus S$ , de même pour  $w(V') \oplus w(S)$

<sup>50</sup> toujours selon la décomposition  $E = V' \oplus X \oplus W' \oplus S$

<sup>51</sup> Le lecteur vérifiera que la bijection donnée reste surjective dans le cas pathologique où  $F$  est nul.

<sup>52</sup> C'est un cas particulier de l'exercice « Factorisation d'applications linéaires et intersections de noyaux ».

<sup>53</sup> Ceci fait sens car  $E$  est de dim finie!

3. Lorsque  $E$  et  $F$  sont de dim finie,  $L(E, F)$  l'est aussi, donc toute partie  $U \subset L(E, F)$  également. Or, on dispose de l'égalité  $V_{\text{Vect } U} = V_U$  (appliquer le sens  $\boxed{\Leftarrow}$  du lemme). Il suffit par conséquent de montrer  $\text{Facto } U$  pour les parties  $U$  finies.

Pour  $U$  singleton, on l'a déjà fait. L'équivalence montrée s'écrivant

$$J_{\text{Ker } u} = L(E)u,$$

on en déduit une réécriture de l'équivalence souhaitée :

$$J_{\bigcap \text{Ker } u_i} = \sum J_{\text{Ker } u_i}.$$

Une récurrence immédiate permet alors de se ramener au cas de deux  $u_i$ , que nous nommerons  $v$  et  $w$ . Observer que l'inclusion  $\supset$  est immédiate.

On reprend les notations  $V, V', W, W', X, S$  de la première question, laquelle nous donne des endomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $L(F)$  tels que  $\alpha v + \beta w$  soit de noyau  $X$ . On peut donc écrire

$$J_{V \cap W} = J_X = J_{\text{Ker}(\alpha v + \beta w)} = L(F)(\alpha v + \beta w) \subset L(F)v + L(F)w = J_V + J_W, \text{ CQFD.}$$

4. On regarde d'abord le cas d'une famille à un élément, généralisé au cas de trois ev. On renvoie à l'exercice « Factorisation d'applications linéaires et intersections de noyaux » qui n'utilise aucune considération de dimensions.

On suppose maintenant que  $f$  s'annule sur  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } u_i$ . Pour appliquer le point précédent, il s'agit d'exprimer  $\bigcap \text{Ker } u_i$  comme noyau d'une seule application ; il suffit de considérer  $v : \begin{cases} E & \longrightarrow & F^n \\ x & \longmapsto & (u_i(x)) \end{cases}$ . On peut donc factoriser  $f = \varphi \circ v$  où  $\varphi \in L(F^n, F)$ . Si  $\varphi$  était de la forme<sup>54</sup>  $\vec{x} \mapsto \sum \varphi_i(x_i)$ , on pourrait conclure

$$f = \varphi v = \sum \varphi_i u_i \in \sum L(F)u_i.$$

Or, en notant  $\iota_i : F \hookrightarrow F^n$  l'injection canonique sur la  $i$ -ème coordonnée, on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum \iota_i(x_i)\right) = \sum \varphi \iota_i(x_i) = \sum \varphi_i(x_i) \text{ avec } \varphi_i := \varphi \iota_i \in L(F), \text{ CQFD.}$$

5. Les  $J_S$  sont bien des idéaux à gauche : pour  $j \in J_S$  et  $u \in L(F)$ , on vérifie que

$$F^* \circ (uj) = (F^* \circ u) \circ j \subset F^* \circ j \subset S.$$

Soit  $V$  un sev de  $E$ . On a les équivalences

$$\begin{aligned} f \in J_{V^\perp} & \iff F^* \circ f \text{ nul sur } V \\ & \iff \forall v \in V, [F^* \circ f](v) = 0 \\ & \iff \forall v \in V, F^*(f(v)) = 0 \\ & \iff \forall v \in V, f(v) = 0 \\ & \iff f \in J_V. \end{aligned}$$

On montrerait de même l'identité

$$(F^*J)^\circ = V_J.$$

En effet, un  $x$  dans  $(F^*J)^\circ$  est annulé par  $F^*J$ , *i. e.*  $Jx$  est annulé par  $F^*$ , *i. e.*  $Jx$  est nul, *i. e.*  $x$  est dans  $\bigcap_{j \in J} \text{Ker } j = V_J$ .

Soit  $J$  un idéal à gauche. S'il s'écrit  $J_S$ , le sev  $S$  doit contenir tous les  $F^* \circ j$ , donc un bon candidat est  $S := \langle F^* \circ J \rangle$ . On s'intéresse par conséquent au caractère bijectif de

$$\begin{array}{ccc} \{\text{sev de } E^*\} & \longrightarrow & \{\text{idéaux à gauche}\} \\ S & \longmapsto & J_S \\ \langle F^*J \rangle & \longleftarrow & J \end{array}.$$

Montrons que  $F^*J_S = S$  pour  $S$  un sev de  $E^*$ . Le sens  $\subset$  est clair. Soit réciproquement  $\varphi \in S$ . En l'écrivant  $\varphi = b^*(\varphi(\cdot)b)$  où  $b$  est un vecteur non nul de  $F$  (complété en une base de  $F$ ) il suffit de vérifier

<sup>54</sup>Lorsque  $F = K$ , notre  $\varphi$  est une forme linéaire, donc s'écrit  $\vec{x} \mapsto \sum \lambda_i x_i$ , ce qui est bien de la forme recherchée.

que  $j := \varphi(\cdot)b \in J_S$ . Pour cela, on note que toute forme de  $F^*j$  s'annule sur  $\text{Ker } j = \text{Ker } \varphi$ , donc est colinéaire à  $\varphi$ , donc reste dans  $S$ , *CQFD*.

Montrons  $J = J_{F^*J}$  pour  $J$  idéal à gauche. L'inclusion  $\subset$  est claire. Soit maintenant  $f$  dans  $J_{F^*J}$ . Pour tenter de récupérer  $f$ , on regarde les  $f_k^* \circ f$  où  $(f_k)$  est une base de  $F$ . Chaque  $f_k^* \circ f$  est par hypothèse un  $\varphi_k \circ j_k$  où  $(\varphi_k, j_k) \in F^* \times J$ . Lorsque  $F$  est de dim finie, on peut récupérer

$$f(\cdot) = \sum f_k^*(f(\cdot)) f_k = \sum [f_k^* \circ f](\cdot) f_k = \sum [\varphi_k \circ j_k](\cdot) f_k = \sum [\varphi_k(\cdot) f_k] \circ j_k \in J, \text{ CQFD.}$$

On a toujours  $J \subset J_{V_J}$ , d'où  $J_S \subset J_{V_{J_S}} = J_{(F^*J_S)^\circ} = J_{S^\circ}$

Si l'idéal des application de rang fini était un  $J_S$ , le sev  $S$  serait engendré par  $F^* \circ \{\text{app de rg fini}\}$ , donc vaudrait tout  $E^*$  (on a vu qu'une forme linéaire  $\varphi$  s'écrivait  $b^* \circ j$  avec  $\text{rg } j \leq 1$ ). On en déduirait  $J_S = J_{E^*} = L(E, F)$ , ce qui est faux dès que  $E$  et  $F$  sont de dim infinie.

6. Soit  $J = L(F)j_1 + \dots + L(F)j_n$  un idéal à gauche de type fini. Le lemme *FactoU* appliqué à la partie  $U := \{j_1, \dots, j_n\}$  permet d'écrire

$$J = J_U = J_{W_U} \text{ qui est bien du type } J_W.$$

La réciproque est fautive dès que  $F$  est de dim infinie  $> \dim E$ . Considérons en effet un idéal  $J = L(F)j_1 + \dots + L(F)j_n$  de type fini. En notant  $(u_r)$  une base de  $L(F)$ , l'ev  $I$  est engendré par la famille  $(u_r j_k)_{k,r}$ , donc sa dimension est majorée par  $(\dim E)^2 n < \dim E \dim F = \dim L(E, F)$ . Les idéaux de la forme  $J_V$  ne pourront donc jamais atteindre l'idéal total  $J_{\{0\}} = L(E, F)$ .

### Solution proposée (pour tâter la dim infinie).

1. (a) Soit  $(f_k)$  une base de  $F$  et  $J$  idéal à gauche de  $L(E, F)$  non nul. Il y a donc un indice  $k_0$  et un  $y = j(x)$  avec  $(j, x) \in J \times E$  dont la  $k_0$ -ième coordonnée  $\lambda$  est non nulle. En composant  $j$  à gauche par la projection  $\pi_{k_0}$  sur la  $k_0$ -ième coordonnée parallèlement aux autres, renormalisée par  $\lambda$ , on obtient une application linéaire  $\frac{1}{\lambda} \pi_{k_0} j$  qui envoie  $x$  sur  $f_{k_0}$ . En composant ensuite (toujours à gauche pour rester dans  $J$ ) par les endomorphismes  $f_{k_0}^*(\cdot) f_k$  (qui remplacent  $f_{k_0}$  par n'importe quel  $f_k$ ), on récupère dans  $J$  des applications  $j_k$  envoyant le même  $x$  sur n'importe quel  $f_k$ .

Montrons que ces dernières sont libres dans  $J$ , ce qui conclura. Partant d'une relation de liaison  $\sum \lambda_k j_k = 0$ , évaluer en  $x$  donne  $\sum \lambda_k f_k = 0$ , d'où  $\vec{\lambda} = \vec{0}$  par liberté des  $f_k$ , *CQFD*.

- (b) Les éléments de  $\langle (F^* \circ J) \cdot F \rangle$  étant des combinaisons linéaires de termes  $\varphi(\cdot) f$  de rang (au plus) 1, ils sont tous de rang fini.

Par linéarité, montrer que les  $j \in J$  de rang 1 sont dans  $(F^* \circ J) \cdot F$  suffit pour montrer que tous les  $j \in J$  de rang fini sont dans leur Vect. Soit donc  $j = \varphi(\cdot) y$  un tel  $j$  où  $y = j(x)$  pour un  $x \in E$ . On aimerait écrire  $\varphi \in E^*$  dans  $F^* \circ J$ . Puisque  $J$  est un idéal à gauche, on peut espérer mettre  $\varphi$  sous la forme  $\psi \circ u j$  pour  $(\psi, u) \in F^* \times L(F)$ . On va prendre  $u := \pi$  la projection sur  $Ky$  parallèlement à un supplémentaire  $S$  et  $\psi := y^*$  la forme linéaire coordonnée selon  $y$  dans la décomposition  $F = Ky \oplus S$ . Décrivons l'action de l'élément  $y^* \pi j \in F^* \circ J$  dans la décomposition  $E = Kx \oplus H$  où  $H := \text{Ker } \varphi = \text{Ker } j$ :

$$\begin{cases} x \xrightarrow{j} y \xrightarrow{\pi} y \xrightarrow{y^*} 1 \\ H \xrightarrow{j} 0 \xrightarrow{y^* \pi} 0 \end{cases}.$$

On obtient exactement l'action de  $\varphi$ , ce qui suffit à notre bonheur.

2. Tout se fait comme pour les idéaux à droite.

- (a) Supposant *FactoU'*, il vient

$$J_{V_U} = J_{V_{U'}} = J_{U'} \subset J_U;$$

l'inclusion réciproque étant claire, on a l'égalité  $J_{V_U} = J_U$ , *i. e.* *FactoU*.

- (b) Pour  $F = K$ , il s'agit de voir<sup>55</sup> que les formes linéaires coordonnées  $(e_i^*)$  dans une base  $(e_i)$  de  $E$  ne forment pas une base de  $E^*$ .

Pour le cas général, aidons-nous de l'exemple précédent. Il suffit de construire un  $f : E \rightarrow F$  s'annulant sur  $\bigcap_U \text{Ker } u$  mais pas sur  $\bigcap_{\tilde{U}} \text{Ker } u$  pour toute partie  $\tilde{U} \subset U$  finie. En effet, si *FactoU* était

<sup>55</sup>On revoit à l'exercice « Rang de formes linéaires et intersections de noyaux ».

vrai,  $f$  devrait tomber dans  $\sum_U L(F)u$ , donc dans une somme finie  $\sum_{\tilde{U}} L(F)u$ , donc s'annulerait sur  $\bigcap_{\tilde{U}} \text{Ker } u$ , contradiction.

Pour cela, il suffit de définir  $f$  en envoyant des vecteurs  $x_n \in \bigcap_{i \neq n} \text{Ker } u_i \setminus \text{Ker } u_n$  de  $E$  sur un vecteur non nul<sup>56</sup> fixé de  $F$  (avec les  $u_n$  dans  $U$  pour tout  $n$ ) puis de prolonger  $f$  par 0 sur un supplémentaire de  $\text{Vect } \{x_n\}$  contenant  $\bigcap \text{Ker } u_n$ . En effet, un tel  $f$  s'annulera bien sur  $\bigcap \text{Ker } u_n$ , mais s'il s'annule sur une intersection finie  $\bigcap_{\tilde{U}} \text{Ker } u$ , on pourra trouver un  $u_n$  différent des  $u \in \tilde{U}$ , d'où un vecteur  $x_n$  dans  $\bigcap_{u \neq u_n} \text{Ker } u \subset \bigcap_{\tilde{U}} \text{Ker } u \subset \text{Ker } f$ , ce qui est impossible par construction de  $f$ .

Pour ce faire, On prend une suite  $(u_n)$  injective dans  $U'$  (on peut car  $U'$  est infini), puis on utilise la propriété

$$\forall u' \in U', \quad \bigcap_{u \in U, u \neq u'} \text{Ker } u \not\subset \text{Ker } u',$$

on peut piocher pour tout  $n$  un  $x_n$  dans  $\bigcap_{i \neq n} \text{Ker } u_i$  privé de  $\text{Ker } u_n$ . Les  $x_n$  sont alors libres<sup>57</sup> et aucun d'eux n'appartient à  $\bigcap \text{Ker } u_n$ , ce qui montre que  $\text{Vect } \{x_n\}$  et  $\bigcap \text{Ker } u_n$  sont en somme directe. On peut donc compléter  $\bigcap \text{Ker } u_n$  en un supplémentaire de  $\text{Vect } \{x_n\}$ . Enfin, puisque  $F$  est non nul, on peut piocher un vecteur non nul dedans. Ceci achève les vérifications.

Cette condition est impossible à réaliser lorsque  $E$  est de dim finie. En effet, elle va impliquer

$$\dim V_U \geq |U'|.$$

Pour le voir, vu que  $V_{U'} \subset V_U$ , il suffit de le montrer pour  $U = U'$ . Il s'agit alors d'exhiber une famille libre de  $V_U$  indexée par  $U$ . Or, l'on dispose pour tout  $u \in U$  d'un  $x_u \in V_{U \setminus \{u\}} \setminus \text{Ker } u$  et l'on montre comme au paragraphe précédent que ces derniers sont libres.

- (c) Prenons une partie  $U$  formée de (au moins deux) projecteurs parallèlement à un même sev  $V \subset E$  (par exemple  $U = L(E, F)$ ) Alors, pour toute partie  $U' \subset U$ , on a  $V_{U'} = V = V_U$ , mais il est impossible de réaliser la seconde condition puisque<sup>58</sup>

$$\forall u \in U, \text{Ker } u = V = \bigcap_{u' \neq u} \text{Ker } u'.$$

Autre exemple : prenons n'importe quelle partie  $U^-$  telle que  $V_{U^-} = \{0\}$  et réunissons-là avec n'importe quelle partie  $U'$  (non incluse dans  $U^-$ ) pour former  $U := U^- \cup U'$ . Puisque  $V_U$  est inclus dans  $V_{U^-} = \{0\}$ , il vaut  $\{0\}$ , mais, pour un  $u' \in U'$ , on aura  $U \setminus \{u'\} \supset U^-$ , d'où  $V_{U \setminus \{u'\}} \subset V_{U^-} = \{0\}$ , de sorte que  $V_{U \setminus \{u'\}} \not\subset \text{Ker } u'$  est toujours faux.

Pour l'autre sens, il suffit de prendre  $U'$  vide (la seconde condition est alors tautologiquement vérifiée) et  $U$  non nulle (afin que  $V_U \neq E = V_\emptyset = V_{U'}$ ).

Pour un exemple moins pathologique, prenons  $U^-$  n'importe quelle partie telle que  $V_{U^-} \neq \{0\}$  et  $u$  une application telle que  $\text{Ker } u \subsetneq V_{U^-}$  (on pourra toujours si  $\dim E \geq \dim F$ ). Noter qu'un tel  $u$  ne peut être dans  $U^-$ , sinon  $V_{U^-} \subset \text{Ker } u \subsetneq V_{U^-}$ . Posant  $U' := \{u\}$  et  $U := U^- \amalg U'$ , le noyau de  $u$  ne saurait contenir  $V_{U \setminus \{u\}} = V_{U^-}$ , mais  $V_U = V_{U^-} \cap \text{Ker } u = \text{Ker } u$  est différent de  $V_{U'}$  (car strictement inclus dedans).

Pour la dernière question, prenons un  $U$  formé des éléments d'une suite  $(u_n)$  non nulle d'endomorphismes dont les noyaux décroissent<sup>59</sup>. Chaque  $u \in U$  est un  $u_n$ , donc de noyau contenant  $\text{Ker } u_{n+1} \supset \bigcap_{u \neq u_n} \text{Ker } u$ , ce qui montre que la seule partie  $U'$  possible est le vide ; cela impliquerait  $V_U = V_{U'} = V_\emptyset = E$ , imposant  $U = \{0\}$ , d'où  $u_n = 0$  pour tout  $n$ , contradiction.

3. Nous avons montré que  $\text{Facto } U$  est impliqué par «  $U$  fini » (cf. question 3 précédente) ou «  $\exists U' \subset U$ ,  $\text{Facto}(U')$  » (cf. question 2.(a)) ; il sera donc impliqué par «  $\exists U' \subset U$  fini,  $\text{Facto } U'$  ». Par ailleurs, la question 2.(b) nous donne la condition nécessaire.

La question 3.(c) ruine cependant tout espoir de réunir ces deux conditions en une seule CNS.

<sup>56</sup> pour  $F = K$  et  $u_n = e_n^*$ , on avait pris 1

<sup>57</sup> Si  $\sum \lambda_n x_n = 0$ , pour  $k$  fixé on applique  $u_k$  qui tue tous les  $\lambda_{n \neq k}$ , d'où  $\lambda_k u_k(x_k) = 0$  et  $\lambda_k = 0$  car  $x_k \notin \text{Ker } u_k$ .

<sup>58</sup> la somme comporte au moins une image  $V$  puisqu'on a pris  $|U| \geq 2$

<sup>59</sup> Par exemple, dans  $E = F = \mathbb{R}[X]$ , les projecteurs sur  $\mathbb{R}_n[X]$  pour  $n$  décrivant  $\mathbb{N}$ .

**Remarques.** Tout comme pour les idéaux à droite, on retiendra le lemme (valable en toute dimension)

$$\text{Ker } u_1 \cap \cdots \cap \text{Ker } u_p \subset \text{Ker } f \iff \exists f_1, \dots, f_p, f = f_1 u_1 + \cdots + f_p u_p.$$

Pour  $p = 1$ , le lemme n'est qu'une réécriture de l'identité duale

$$(\text{Ker } u)^\perp = \text{Im } ({}^t u) = F^* \circ ({}^t u).$$

Pour  $F = K$ , on retrouve le lemme de factorisation classique portant sur les formes linéaires d'un ev  $V$  :

$$\forall \psi, \psi_1, \dots, \psi_k \in V^*, \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } \psi_i \subset \text{Ker } \psi \iff \psi \in \sum_{i=1}^k K \psi_i.$$

Lorsque  $E$  et  $F$  est de dim finie, le résultat sur les noyaux peut être montré à partir de celui des images par dualité. En effet, l'inclusion  $\bigcap \text{Ker } u_i \subset \text{Ker } f$  s'écrit en passant dans le dual  $\text{Im } ({}^t f) \subset \sum \text{Im } ({}^t u_i)$ . En utilisant le résultat sur les images, on obtient  ${}^t f = \sum {}^t u_i \circ f_i$  avec  $f_i \in L(E^*)$ , d'où  $f = \sum {}^t f_i \circ u_i$  en écriture matricielle. Évidemment, cela fonctionne également dans l'autre sens.

## 19 Idéaux bilatères de $L(E, F)$

Déduire des deux exercices précédents les idéaux bilatères<sup>60</sup> de  $L(E, F)$  lorsque  $E$  et  $F$  sont de dim finie. Le résultat reste-il valable en dimension infinie ?

**Solution proposée.**

Soit  $I$  un idéal bilatère de  $L(E, F)$ .  $I$  est en particulier un idéal à droite et un idéal à gauche, donc (d'après les deux exercices précédents), il y a deux sev  $V \subset E$  et  $W \subset F$  tels que

$$\begin{aligned} I &= \{f \in L(E) ; \text{Im } f \subset W\} \\ &= \{f \in L(E) ; V \subset \text{Ker } f\}. \end{aligned}$$

Si  $W = F$ , il est clair que  $I = L(E, F)$  en utilisant la première ligne, et si  $V = E$ , il est également clair (sur la seconde ligne) que  $I = \{0\}$ .

Dans le cas contraire, soit  $w \notin W$  et  $v \notin V$ . On construit une application linéaire  $f$  en envoyant  $V$  sur  $\{0\}$  et  $v$  sur  $w$  (qu'importe le reste). Puisque  $f$  s'annule sur  $V$ ,  $f$  appartient à  $I$ , donc son image doit être incluse dans  $W$  ; or, ce n'est pas le cas de  $w = f(v)$ , d'où contradiction.

Finalement, les seuls idéaux bilatères de  $L(E)$  sont  $\{0\}$  et  $L(E)$ .

Comme on l'a déjà vu, le résultat tombe en défaut dès que  $E$  n'est plus de dim finie : il suffit de considérer l'idéal bilatère engendré par les endomorphismes de rang fini.

**Remarque.** On peut prouver ce résultat<sup>61</sup> directement à l'aide de matrices, sans passer par les idéaux à droite/gauche<sup>62</sup>.

## 20 Pour aller plus loin, une incursion dans le bidual

Soit  $E$  un ev. On définit le *bidual*  $E^{**}$  de  $E$  comme le dual  $(E^*)^*$  de son dual  $E^*$ .

Pour  $a \in E$ , on notera  $\hat{a} : \begin{cases} E^* & \longrightarrow & K \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a) \end{cases}$  l'application « évaluation en  $a$  » dans le bidual  $E^{**}$  et

$\hat{A} = \{\hat{a}\}_{a \in A}$  pour une partie  $A$  de  $E$ . On observera que l'application  $\hat{\cdot} : \begin{cases} E & \xrightarrow{\sim} & \hat{E} \\ a & \longmapsto & \hat{a} \end{cases}$  est un isomorphisme.

<sup>60</sup>Un idéal *bilatère* est un idéal à droite et à gauche.

<sup>61</sup>Une structure dont l'étude les quotients est inutile est dite *simple*. Les algèbres se quotientant par des idéaux, une algèbre sera simple si elle n'a pas d'autre idéaux que l'idéal nul et elle-même. C'est le cas de  $\mathcal{L}(E)$  et  $M_n(K)$ .

<sup>62</sup>cf. seconde feuille sur les matrices

Soit  $F$  un ev. La *transposée* d'un  $u \in L(E, F)$  est l'application linéaire

$${}^t u : \begin{cases} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{cases} .$$

Elle vérifie  ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$  pour  $u \in L(E, F)$  et  $v \in L(F, G)$  où  $G$  est un troisième ev.

Pour  $V$  sev de  $E$ , on a un injection canonique  $\begin{cases} V^{**} & \hookrightarrow & E^{**} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha(\cdot|_V) \end{cases}$ . Si  $E$  se casse en  $E = A \oplus B$ , son dual se casse en  $E^* = A^* \oplus B^*$  selon l'isomorphisme canonique

$$\begin{cases} E^* & \longrightarrow & A^* \times B^* \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi|_A, \varphi|_B) \\ (\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \beta) & \longleftarrow & (\alpha, \beta) \end{cases} .$$

Pour  $W$  un sev de  $F^{**}$ , on considère les deux idéaux à droite suivants de  $L(E, F)$  :

$$\begin{aligned} \widehat{I}_W & : = \{f \in L(E, F) ; \widehat{E} \circ ({}^t f) \subset W\}, \\ I_W & : = \{f \in L(E, F) ; E^{**} \circ ({}^t f) \subset W\}. \end{aligned}$$

1. Pour  $f \in L(E, F)$ , montrer le lemme

$$\widehat{E} \circ ({}^t f) = \widehat{\text{Im } f}$$

et en déduire, pour  $W$  sev de  $F^{**}$ , l'égalité

$$\widehat{I}_W = I_{W'}$$

où  $W' := (\widehat{\cdot})^{-1}(W)$  désigne le sev de  $F$  tel que  $W \cap \widehat{F} = \widehat{W'}$ .

2. Montrer le lemme suivant pour  $f \in L(E, F)$  :

$$E^{**} \circ ({}^t f) = (\text{Im } f)^{**} .$$

3. Pour  $W$  sev de  $F$ , montrer les égalités

$$\begin{aligned} I_{\widehat{W}} & = I_W \cap \{\text{rang fini}\}. \\ & = E^* \cdot W_{I_W} \\ & = E^* \cdot W. \end{aligned}$$

4. En déduire que l'application ci-après est un bijection :

$$\begin{cases} \{\text{sev de } F\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{idéaux à droite dont tous les} \\ \text{éléments sont de rang fini} \end{array} \right\} \\ W & \longmapsto & I_{\widehat{W}} = I_W \cap \{\text{rang fini}\} = E^* \cdot W \\ W_I & \longleftarrow & I \end{cases}$$

### Démonstration.

1. Pour  $f \in L(E, F)$  et  $a \in E$ , il est bon de noter l'égalité  $\widehat{a} \circ ({}^t f) = \widehat{f(a)}$  : en effet, on a bien pour tout  $\varphi \in E^*$

$$[\widehat{a} \circ ({}^t f)](\varphi) = \widehat{a}({}^t f(\varphi)) = \widehat{a}(\varphi \circ f) = [(\varphi \circ f)](a) = \varphi(f(a)) = \widehat{f(a)}(\varphi).$$

On en déduit l'identité

$$\widehat{E} \circ ({}^t f) = \{\widehat{a} \circ ({}^t f)\}_{a \in E} = \{\widehat{f(a)}\}_{a \in E} = \widehat{\text{Im } f},$$

d'où les équivalences

$$f \in I_{\widehat{E}, W} \iff \widehat{E} \circ {}^t f \subset W \iff \widehat{\text{Im } f} \subset W \iff \widehat{\text{Im } f} \subset W \cap \widehat{F} = \widehat{W'} \xrightarrow{\widehat{\text{injectif}}} \text{Im } f \subset W' \iff f \in I_{W'}.$$



2. Soit  $(a_i)$  une base d'un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  et  $(\varphi_j)$  une base de  $(\text{Im } f)^*$ . Puisque  $f$  induit un isomorphisme  $\langle a_i \rangle \cong \text{Im } f$ , la transposée  ${}^t f$  induit un isomorphisme  $(\text{Im } f)^* \cong \langle a_i \rangle^*$ , donc les images  $\varepsilon_j := \varphi_j \circ f$  de la base  $(\varphi_j)$  forment une base de  $\langle a_i \rangle^*$ . Puisque  $E$  se casse en  $\text{Ker } f \oplus \langle a_i \rangle$ , son dual se casse en

$$E^* = (\text{Ker } f)^* \oplus \langle a_i \rangle^* = (\text{Ker } f)^* \oplus \left( \bigoplus K\varepsilon_j \right).$$

□ Pour  $\alpha \in E^{**}$ , on a pour toute forme  $\varphi$

$$[\alpha \circ ({}^t f)](\varphi) = \alpha(\varphi \circ f) = \alpha(\varphi|_{\text{Im } f} \circ f),$$

donc  $\alpha \circ ({}^t f)$  coïncide avec la forme  $\varphi \mapsto \alpha(\varphi|_{\text{Im } f} \circ f)$  de  $(\text{Im } f)^{**}$ , CQFD.

□ Soit  $\beta : \varphi_j \mapsto \lambda_j$  une forme de  $(\text{Im } f)^{**}$ . Posons  $\alpha : \varepsilon_j \mapsto \lambda_j$  dans  $E^{**}$  (définie n'importe comment sur  $(\text{Ker } f)^*$ ). On a alors pour tout  $k$

$$[\alpha \circ ({}^t f)](\varphi_k) = \alpha(\varphi_k \circ f) = \alpha(\varepsilon_k) = \lambda_k = \beta(\varphi_k),$$

donc  $\beta = \alpha \circ ({}^t f)$  sur  $(\text{Im } f)^*$ ; or, la première inclusion montre que  $\alpha \circ ({}^t f)$  est déjà dans  $(\text{Im } f)^{**}$ , ce qui permet d'affirmer l'égalité  $\beta = \alpha \circ ({}^t f)$  sur tout  $E^{**}$ , d'où  $\beta \in E^{**} \circ ({}^t f)$ , CQFD.

3. Pour  $I$  idéal à droite de  $L(E, F)$ , la question 1.(b) de l'exercice précédent nous dit que  $I \cap \{\text{rang fini}\} = E^* \cdot W_I$ , d'où la seconde égalité. Par ailleurs, on a toujours  $W_{I_W} = W$  pour  $W$  sev de  $F$  (c'est la toute première question de l'exercice précédent), d'où la troisième égalité.

Soit  $f \in I_W$  de rang fini. Pour montrer  $E^{**} \circ ({}^t f) \subset \widehat{W}$ , il suffit de le faire pour  $f$  de rang 1, mettons  $f = \lambda(\cdot)w$  avec  $w \in W$ . Mais alors, pour  $\alpha \in E^{**}$ , on a  $\alpha \circ ({}^t f) = \alpha(\lambda) \widehat{w} \in \widehat{W}$ , CQFD.

Réciproquement, on a clairement l'inclusion  $I_{\widehat{W}} \subset \widehat{I_W}$ , lequel vaut  $I_W$  d'après la question 1. Reste à montrer la finitude du rang des éléments de  $I_{\widehat{W}}$ .

Soit  $f \in I_{\widehat{W}}$ . L'hypothèse  $\widehat{E} \circ ({}^t f) \subset W$  ayant déjà été traitée ci-dessus (elle nous dit que  $\text{Im } f$  est inclus dans  $W$ ), il va falloir utiliser l'hypothèse  $\alpha \circ ({}^t f) \in W$  pour  $\alpha$  une forme autre qu'une forme évaluation, par exemple une forme coordonnée.

Prenons une base  $(x_i)$  d'un supplémentaire de  $\text{Ker } f$ , de sorte que les  $y_i := f(x_i)$  forment une base de  $\text{Im } f$ . Complétons n'importe comment les  $x_i$  et les  $y_i$  pour pouvoir parler des  $x_i^*$  et des  $y_i^*$ , lesquelles formes vérifient

$$\forall i, x_i^* = {}^t f(y_i^*) = y_i^* \circ f$$

(en effet,  $x_i^*$  et  $y_i^* \circ f$  coïncident sur  $\text{Ker } f$  (elles y sont nulles) et en chaque  $x_k$  (elles y valent  $\delta_i^k$ ), donc sont égales). Complétons enfin les  $x_i^*$  en une base de  $E^*$  pour pouvoir parler de formes  $x_i^{**}$ .

Par hypothèse, la forme  $x_i^{**} \circ ({}^t f)$  vaut un  $\widehat{w}_i$  où  $w_i \in W$ , mettons  $w_i = \sum \lambda_i^k y_k + s_i$  dans une décomposition  $W = \text{Im } f \oplus S$  (d'où  $y_j^*(s_i) = 0$  pour tout  $j$ ). Évaluer  $x_i^{**} \circ ({}^t f) = \widehat{w}_i$  en un  $y_j^*$  donne

$$\begin{aligned} \text{d'une part } [x_i^{**} \circ ({}^t f)](y_j^*) &= x_i^{**}({}^t f(y_j^*)) = x_i^{**}(x_j^*) = \delta_i^j, \\ \text{d'autre part } \widehat{w}_i(y_j^*) &= y_j^*(w_i) = y_j^*\left(\sum \lambda_i^k y_k + s_i\right) = \lambda_i^j, \end{aligned}$$

d'où  $w_i = y_i + s_i$ .

Puisque  $\widehat{y}_i = \widehat{f(x_i)} = x_i^{**} \circ ({}^t f)$ , on en déduit

$$\widehat{s}_i = (x_i^{**} - \widehat{x}_i) \circ ({}^t f),$$

de sorte que toute forme linéaire  $\varphi$  nulle sur  $\text{Im } f$  le sera aussi en  $s_i$ . Si  $s_i \in S$  était non nul, on pourrait compléter une base de  $\text{Im } f \oplus Ks$  et parler d'une forme  $s^*$ , laquelle serait nulle sur  $\text{Im } f$  mais pas en  $s$ , contradiction.

On obtient finalement l'égalité  $x_i^{**} = \widehat{x}_i$  sur  $\text{Im } ({}^t f)$ .

Si les  $x_i$  sont infinis, les  $x_i^*$  aussi, de sorte que la forme diagonale  $\delta : x_i \mapsto 1$  ne leur est pas liée. On peut donc rétrospectivement mettre  $\delta$  parmi les formes linéaires complétant les  $x_i^*$ , ce qui permet d'obtenir  $x_i^{**}(\delta) = 0$  pour tout  $i$ . En écrivant  $\delta = \varepsilon \circ f \in \text{Im } ({}^t f)$  avec  $\varepsilon : y_i \mapsto 1$ , on en déduit  $x_i^{**}(\delta) = \widehat{x}_i(\delta) = \delta(x_i) = 1$ , contradiction, ce qui conclut.

4. La question précédente montre que l'application considérée est bien définie.  
Soit  $W$  un sev de  $F$ . Montrons  $W_{I_{\widehat{W}}} = W$ . L'inclusion  $\subset$  est immédiate :

$$W_{I_{\widehat{W}}} \subset W_{\widehat{I_{\widehat{W}}}} = W_{I_W} = W.$$

Quant à l'inclusion  $\supset$ , il s'agit de montrer

$$W \stackrel{?}{\subset} \sum_{(\text{Im } f)^{**} \subset \widehat{W}} \text{Im } f.$$

Prenons un  $w \in W$  et un  $a \in E$  non nul (complété en une base). L'application  $f := a^*(\cdot)w$  nous sera bien utile. Elle vérifie en effet  ${}^t f = \widehat{w}(\cdot)a^*$  (évaluer en une forme  $\varphi$ ), d'où

$$\forall \alpha \in E^{**}, \alpha \circ ({}^t f) = \alpha(a^*)\widehat{w} \in \widehat{W},$$

ce qui montre  $\text{Im } f \subset W_{I_{\widehat{W}}}$ . Or,  $w$  est clairement dans  $\text{Im } f$ , ce qui conclut<sup>63</sup>.

Soit  $I$  un idéal dont tous les éléments sont de rang finis. D'après les questions précédentes, on peut écrire

$$I_{\widehat{W_I}} = I_{W_I} \cap \{\text{rang fini}\} = E^* \cdot W_{I_{W_I}} = E^* \cdot W_I = I \cap \{\text{rang fini}\} = I, \text{ CQFD.}$$

**Remarques et questions ouvertes.** Nous avons introduit des idéaux à droite

$$I_W = \{f \in L(E, F) ; f(E) \subset W\} \text{ où } W \text{ sev de } F$$

et des idéaux à gauche

$$J_S = \{f \in L(E, F) ; F^* f \subset S\} \text{ où } S \text{ sev de } E^*.$$

Passant dans le bidual, nous avons introduit les idéaux à droite (pour  $W$  sev de  $F^{**}$ )

$$\begin{aligned} \widehat{I}_W &= \{f \in L(E, F) ; \widehat{E} \circ ({}^t f) \subset W\} \\ \text{et } I_W &= \{f \in L(E, F) ; E^{**} \circ ({}^t f) \subset W\}. \end{aligned}$$

Nous avons vu que les  $\widehat{I}_W$  se ramènent aux  $I_W$  où  $W \subset F$  et que les  $I_{\widehat{W}}$  décrivent les idéaux à droite dont tous les éléments sont de rang finis. Mais les  $I_W$  suffisent-ils à décrire tous les idéaux à droite ?

Si non, on remplacera  $E^{**}$  ou  $\widehat{E}$  par toute partie  $P$  de  $E^{**}$  stable<sup>64</sup> par  $\circ ({}^t u)$  pour tout  $u \in L(E)$ . Pour une telle  $P$ , on posera<sup>65</sup>

$$I_{P,W} := \{f \in L(E, F) ; P \circ ({}^t f) \subset W\}.$$

Noter qu'une telle  $P$ , si elle contient une forme  $\widehat{a}$  non nulle, les contient toutes (elle devra contenir  $\widehat{a} \circ ({}^t u) = \widehat{u(a)}$  pour tout  $u \in L(E)$ ). On est en droit de se demander s'il y a d'autres  $P$  que  $\{0\}$ ,  $\widehat{E}$  et  $E^{**}$ .

La discussion continue...

---

<sup>63</sup>On a en fait montré l'égalité

$$W = \bigcup_{f \in I_{\widehat{W}}} \text{Im } f.$$

Ainsi, si un idéal  $I$  est un  $I_{\widehat{W}}$ , alors nécessairement  $\bigcup_{i \in I} \text{Im } i$  est un sev, ce qui n'a rien d'évident *a priori*.

<sup>64</sup>Les idéaux à droite de  $E^{**} = L(E^*, K)$  sont des bons candidats, mais il n'y que l'idéal nul et l'idéal total (ce sont des  $I_W$  où  $W$  sev de  $K$ ).

<sup>65</sup>Si  $P$  n'est pas stable par  $\circ ({}^t L(E))$ , il suffira de remplacer la condition définissant  $I_{P,W}$  par

$$P \circ ({}^t L(E)) \circ ({}^t f) \subset W.$$