Réduction et topologie

Marc SAGE

2 juillet 2006

Table des matières

On introduit maintenant un peu de topologie afin (surtout) de pouvoir parler d'exponentielle. La réduction de Dunford intervenant à peu près tout le temps, on commence par rappeler celle-ci.

1 Réduction de Dunford

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie tel que μ_u soit scindé, disons $\mu_u = \prod (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On définit les *sous-espaces caratéristiques* de u par

$$N_i = \operatorname{Ker}(u-\lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$$

(N comme "**n**ilpotent").

• *Montrer à l'aide de ces derniers que u se décompose en $u = d+n$ où d est diagonalisable, n est nilpotent, d et n commutant.*

• *Montrer que d et n sont uniques (sous l'hypothèse qu'ils commutent).*

• *Montrer que d et n sont des polynômes en u.*

Solution proposée.

• Le lemme des noyaux permet d'écrire $E = \operatorname{Ker} \mu_u(u) = \bigoplus N_i$. Par ailleurs, $(u-\lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ est un polynôme en u, donc commute avec u, donc son noyau N_i est stable par u. Sur chaque N_i, on peut écrire

$$u_{|N_i} = \underbrace{\lambda_i \operatorname{Id}}_{:=d_i} + \underbrace{u-\lambda_i \operatorname{Id}}_{:=n_i}$$

où n_i est nilpotent par construction de N_i. On a donc $\chi_{n_i} = X^{\dim N_i}$ qui est scindé, donc n_i est trigonalisable. Dans cette base de trigonalisation, d_i est scalaire et n_i est triangulaire supérieure stricte. Il est de plus évident que d_i et n_i commutent. On conclut en recollant les bases ci-dessus (puisque $E = \bigoplus N_i$).

• Pour l'unicité, soit (d', n') un autre couple qui convient. On écrit

$$d - d' = u = n' - n.$$

d' commute avec $d' + n' = u$, donc avec tout polynôme en u, donc les N_i sont stables par d'. Puisque d est scalaire sur N_i et d' diagonalisable, $d - d'$ est diagonalisable sur tous les N_i, donc sur l'espace tout entier. De plus, $n = u - d$ et $n' = u - d'$ commutent, donc $n' - n$ est nilpotent (développer le binôme à l'ordre $2n$). Par conséquent, l'endomorphisme $d - d' = n' - n$ est nilpotent et diagonalisable, donc nul, d'où l'unicité.

• d est trivialement un polynôme P_i en u sur chacun des N_i (le polynôme constant λ_i). On peut donc écrire (dans une base adaptée aux N_i)

$$u \sim \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \text{ et } d \sim \begin{pmatrix} P_1(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P_r(A_r) \end{pmatrix}.$$

Pour recoller, on va rajouter des multiples des $\chi_{A_i} = (X-\lambda_i)^{\dim N_i}$, ce qui ne changera rien au résultat d'après Cayley-Hamilton. Plus précisément, on cherche P solution de $P \equiv P_i \ [\chi_{A_i}]$. Une telle solution existe par le lemme chinois et fournit un polynôme P tel que $d = P(u)$. Il est alors clair que n est un polynôme en u (considérer $X - P$).

Remarque. Matriciellement, Dunford nous dit qu'une matrice est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \operatorname{Id} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \operatorname{Id} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix}$$

où les T_i sont triangulaires supérieures strictes (et donc nilpotentes). Les deux matrices ci-dessus commutent trivialement vu que celle de gauche est formée de blocs scalaires.

Attention, la décomposition de Dunford n'est pas toujours celle que l'on croît. Ainsi, la partie nilpotente de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$! Pour s'en convaincre, remarquer que la matrice considérée est diagonalisable (deux valeurs propres distinctes), donc par l'unicité dans Dunford la partie nilpotente est nulle...

2 Diagonalisabilité d'une exponentielle

Montrer qu'une matrice complexe est diagonalisable ssi son exponentielle l'est.

Solution proposée.
Le sens direct est immédiat : $A = PDP^{-1} \implies e^A = Pe^D P^{-1}$.

Soit maintenant A telle que e^A soit diagonalisable. Regardons ce qui se passe sur un sous-espace caractéristique (bloc de Dunford) où $A = \lambda \operatorname{Id} + N$ avec N nilpotent. e^A étant diagonalisable, sa restriction au sev étudié l'est : $e^{\lambda \operatorname{Id} + N} = e^\lambda e^N$ est diagonalisable, donc e^N aussi ; le spectre de e^N étant réduit à $e^{\{0\}} = \{1\}$, on obtient $e^N = \operatorname{Id}$, ce qui s'écrit aussi

$$N + \frac{N^2}{2!} + ... + \frac{N^n}{n!} = 0.$$

En notant X^α le polynôme minimal de N (où α est son indice de nilpotence), X^α doit diviser le polynôme annulateur $X + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^n}{n!}$, ce qui impose $\alpha = 1$ et $N = 0$. Finalement, la composante nilpotente de A sur chaque bloc de Dunford est nulle, donc A est diagonalisable, *CQFD*.

3 Logarithme de l'identité

Résoudre $e^A = I_n$ dans $M_n(\mathbb{C})$ puis dans $M_n(\mathbb{R})$.

Solution proposée.
• Soit A une matrice complexe telle que $e^A = \operatorname{Id}$. En cassant $\mathbb{C}^n$ selon les sous-espaces caractéristiques de A, on est ramené au cas où $A = \lambda \operatorname{Id} + N$ avec N nilpotente. On obtient alors $\operatorname{Id} = e^A = e^\lambda e^N$, ce qui impose déjà $e^\lambda = 1$ en regardant le spectre, d'où $e^N = \operatorname{Id}$. Ceci s'écrit encore

$$\operatorname{Id} = e^N = \operatorname{Id} + N + \sum_{k \geq 2} \frac{N^k}{k!} \implies N = -\sum_{k \geq 2} \frac{N^k}{k!}.$$

Ainsi, le polynôme $X + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^n}{n!}$ annule N, donc est un multiple de son polynôme minimal, lequel est de la forme X^α (il doit diviser $\chi_N = X^n$), ce qui impose $\alpha = 1$ et $N = 0$.

Finalement, A doit être diagonalisable sur chacun de ses sous-espaces caractéristiques et de spectre inclus dans le noyau de l'exponentielle complexe, donc A est diagonalisable de spectre dans $2\pi i\mathbb{Z}$. Il est de plus clair qu'une telle matrice convient.

• Soit maintenant A une matrice réelle vérifiant $e^A = \operatorname{Id}$. Par ce qui précède, A est semblable à une matrice diagonale à coefficients dans $2\pi i\mathbb{Z}$. Le polynôme caractéristique de A étant réel, on peut regrouper les valeurs propres non nulles par deux, mettons $\pm 2k\pi i$, et former des blocs de $2k\pi \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$. Pour se ramener à des matrices réelles, on remarque que le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$ vaut $X^2 + 1$, et *la* matrice typique réelle de polynôme caractéristique $X^2 + 1$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (penser par exemple à une matrice compagnon). Cette dernière est diagonalisable (puisque $X^2 + 1$ est scindé simple) de spectre $\{-i, i\}$, donc est semblable à $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$. Ainsi, en notant $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, A est semblable dans $M_n(\mathbb{C})$ à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 2\pi k_1 R & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2\pi k_p R \end{pmatrix};$$

A étant réelle, elle reste semblable à la matrice ci-dessus dans $M_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, la diagonalisation complexe de R montre que les matrices ci-dessus sont des logarithmes de l'identité.

4 Logarithme et exponentielle sont dans $GL_n(\mathbb{C})$

• *Montrer que l'exponentielle matricielle complexe atteint les matrices triangulaires supérieures avec que des* 1 *sur la diagonale.*

• *En déduire l'existence d'un logarithme sur $GL_n(\mathbb{C})$, puis la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$.*

• *Montrer que le logarithme d'un matrice peut être pris polynomial en cette matrice, et en déduire que l'image de l'exponentielle réelle est l'ensemble des carrés de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Solution proposée.

• Soit $A = I_n + N$ une telle matrice où N est nilpotente. L'idée est se calquer sur le logarithme d'un réel n-nilpotent :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}.$$

On pose naturellement $\ln(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} N^k$, et il s'agit de vérifier que

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} N^k\right) = I_n + N.$$

Or, si l'on effectue un DL de $e^{\ln(1+x)}$ dans $\mathbb{R}$, on va trouver $1+x$, donc tous les coefficients de degré > 1 vont être nuls ; mais ce qui est fort, c'est que ces coefficients sont les *mêmes* que ceux du développement de $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} N^k\right)$ puisqu'on fait le même calcul formel. Ploum, *CQFD*. On remarquera de plus que le logarithme trouvé est polynomial.

• Soit A une matrice inversible dont on considère les blocs de Dunford $\lambda I + N$. D'après ce qui précède, et en utilisant la surjectivité de l'exponentielle complexe pour atteindre λ (qui est non nul, vu que A est inversible), on peut écrire

$$\lambda I + N = \lambda\left(I + \frac{N}{\lambda}\right) = e^{\mu} e^{P\left(\frac{N}{\lambda}\right)} = e^{Q(\lambda I + N)}$$

où P et Q sont des polynômes. En recollant les blocs, on a gagné.

Pour en déduire la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$, on relie deux points $A = e^L$ et $A = e^{L'}$ par un segment "exponentiel" : $\gamma(t) = e^{tL + (1-t)L'}$.

• On vient de montrer, en désignant les blocs de Dunford de A par $A_1, \dots, A_r$, qu'il y a un logarithme de A de la forme $\begin{pmatrix} P_1(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P_r(A_r) \end{pmatrix}$ où $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes. On aimerait trouver un polynôme P qui donne les même matrices, à savoir qui vérifie $P(A_i) = P_i(A_i)$ pour tout i. Noter qu'en rajoutant à P_i un multiple du polynôme caractérisitque χ_i de A_i, on ne change pas la valeur de $P_i(A_i)$. Ceci nous invite à chercher P comme solution du système de congruences $P \equiv P_i\ [\chi_i]$. Or, si λ_i est l'unique valeur propre de A_i, on voit que les $\chi_i = (X - \lambda_i)^?$ sont deux à deux étrangers, donc le lemme chinois s'applique, d'où un P solution à notre problème. Ploum.

Soit A un carré dans $GL_n(\mathbb{R})$, disons $A = C^2$. D'après ce qui précède, C vue comme matrice complexe admet un logarithme $P(C)$ où P est un polynôme à coefficients complexes. On en déduit

$$A = C^2 = C\overline{C} = e^{P(C)}\overline{e^{P(C)}} = e^{P(C) + \overline{P(C)}} = e^{\left[P + \overline{P}\right](C)},$$

ce qui montre que A est bien l'exponentielle d'un matrice réelle. Réciproquement, si $A = e^L$, on peut toujours écrire $A = \left(e^{\frac{L}{2}}\right)^2$, ce qui conclut.

5 Calcul du rayon spectral

Soit A une matrice complexe, et ρ son rayon spectral, i.e. *le plus grand module de son spectre. Montrer que*

$$\rho = \lim_{q\infty} \sqrt[q]{\|A^q\|}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. On pourra considérer la norme triple hermitienne et la norme 1.

Solution proposée.

On notera génériquement ϑ toute fonction de limite 1 en l'infini.

Tout d'abord, la norme 1, qui fait apparaître les termes diagonaux – et donc le rayon spectral –, est équivalente toute norme considérée, mettons

$$\|\cdot\| \geq \alpha \|\cdot\|_1 .$$

On en déduit

$$\sqrt[q]{\|A^q\|} \geq \sqrt[q]{\alpha} \|A^q\|_1 \geq \vartheta(q) \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n D_{ii}^q} \xrightarrow{q\infty} \max_{i=1,\ldots,n} |D_{ii}| = \rho(A).$$

Il reste par conséquent à montrer l'autre inégalité.

Pour cela, on dunfordise la matrice $A = PTP^{-1}$ où $T = D+N$ avec D diagonale et N triangulaire supérieure stricte qui commutent. Pourquoi ce recours à Dunford ? Parce que les puissances de A s'explicitent aisément par la formule du binôme vu que D et N commutent. On prend ensuite une norme triple (pour avoir une norme d'algèbre).

Si $A = D$ était diagonale, on prendra la norme triple hermitienne pour faire apparaître le rayon spectral :

$$\|A\| = \max_{\sum x_i^2=1} \|Dx\|_2 = \max_{\sum x_i^2=1} \sqrt{\sum d_i x_i^2} \leq \max_{\sum x_i^2=1} \sqrt{\sum \rho(D) x_i^2} = \rho(A).$$

Si A était déjà sous forme de Dunford, *i.e.* sans matrice de passage, on calculerait et majorerait

$$\begin{aligned}
\sqrt[q]{\|A^q\|} &= \sqrt[q]{\left\|\sum_{i=0}^q \binom{q}{i} D^{q-i} N^i\right\|} = \sqrt[q]{\left\|\sum_{i=0}^n \binom{q}{i} D^{q-i} N^i\right\|} \text{ pour } q > n \text{ car } N \text{ nilpotente} \\
&\leq \sqrt[q]{\left\|D^{q-n} \sum_{i=0}^n \binom{q}{i} D^{n-i} N^i\right\|} \leq \sqrt[q]{\|D\|^{q-n}} \sqrt[q]{\sum_{i=0}^n \binom{q}{i} \underbrace{\|D\|^{n-i} \|N\|^i}_{\text{borné par un } M}} \\
&\leq \|D\|^{1-\frac{n}{q}} \sqrt[q]{M} \sqrt[q]{\sum_{i=0}^n \binom{q}{i}} \leq \vartheta(q) \|D\| \sqrt[q]{2n \binom{q}{n}} \text{ pour } q > 2n \\
&\leq \|D\| \sqrt[q]{\frac{q^n}{n!}} \vartheta(q) = \|D\| \sqrt[q]{q^n} \vartheta(q) = \|D\| e^{\frac{n}{q} \ln q} \vartheta(q) \xrightarrow{q\infty} \|D\| \geq \rho(A).
\end{aligned}$$

Il reste à tenir compte de la matrice de passage :

$$\sqrt[q]{\|A^q\|} = \sqrt[q]{\|PT^qP^{-1}\|} \leq \sqrt[q]{\|T^q\|} \sqrt[q]{\|PP^{-1}\|} \xrightarrow{q\infty} \rho(T) = \rho(A).$$

Toutes les normes étant équivalentes, on peut conclure.

6 Rang et degré du polynôme minimal

Montrer qu'en dimension finie tout endomorphisme u de rang r possède, quitte à plonger dans un corps assez gros, un polynôme annulateur P de degré au plus $r + 1$.

Solution proposée.

Si u est inversible, Cayley-Hamilton nous donne un polynôme annulateur de degré le rang de u (qui est alors la dimension de l'espace), ce qui conclut.

Si u est nilpotent, u admet dans une bonne base une matrice de la forme

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

où $\varepsilon_i = 0$ ou 1. Il est clair que

$$r := \operatorname{rg} A = \#\{\varepsilon_k = 1\}.$$

De plus, A^{r+1} vaut 0 ; en effet, dans le calcul de

$$\left[A^{r+1}\right]_{i,j} = \sum_{i_1,...,i_r=1}^{n} [A]_{i,i_1} [A]_{i_1,i_2} ... [A]_{i_{r-1},i_r} [A]_{i_r,j} ,$$

les conditions sur les indices pour avoir une contribution non nulle à la somme imposent successivement $i_1 = i+1$, $i_2 = i+2$, ..., $i_r = i+r$, donc le produit contient $r+1$ termes distincts de A – or, au plus r sont non nuls. Ceci conclut le cas u nilpotent.

Par ailleurs, pour un scalaire λ, on dispose de l'identité

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \lambda \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \end{array}\right. = \#\left\{\varepsilon_i = 1\right\} + \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \lambda \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \end{array}\right. .$$

Soit à présent A une matrice non inversible, que l'on met sous forme de Jordan (quitte à plonger le corps de base dans un corps de décomposition du polynôme caratéristique de A pour avoir l'existence des sous-espaces caratéristiques) afin de se ramener au cas nilpotent :

$$A \sim \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & \varepsilon_1^{(1)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n_1-1}^{(1)} \\ & & & \lambda_1 \end{matrix}}}_{\text{taille } n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_p & \varepsilon_1^{(p)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n_p-1}^{(p)} \\ & & & \lambda_p \end{matrix}}}_{\text{taille } n_p} \end{pmatrix}$$

où $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\} = \operatorname{Sp} A$ et où les $\varepsilon_i^{(j)}$ valent 0 ou 1. En notant

$$r_i = \#\left\{\varepsilon_k^{(i)} = 1 \text{ où } k \in \{1, ..., n_i - 1\}\right\},$$

on a d'une part

$$\operatorname{rg} A = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_1^{(i)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n_i-1}^{(i)} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p}\left(\#\left\{\varepsilon_k^{(i)} = 1\right\} + \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \lambda_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_i = 0 \end{array}\right.\right) = \left(\sum_{i=1}^{p}(r_i+1)\right) - 1$$

car A n'est pas inversible, d'autre part (en appliquant le cas précédent et en multipliant par blocs) on a

$$\prod_{i=1}^{p}(A - \lambda_i)^{r_i+1} = 0,$$

d'où un polynôme annulateur de degré

$$\sum_{i=1}^{p}(r_i+1) = \operatorname{rg} A + 1, \ \textit{CQFD}.$$

Remarque. On vient de montrer que le degré du polynôme minimal était majoré par le rang plus un. Il est clair, en regardant des nilpotents, que cette majoration est optimale.

En fait, l'hypothèse nécessaire pour utiliser Jordan est superflue. En utilisant la réduction de Frobenius, dont découle celle de Jordan, on arrive au même résultat.

Soit en effet $\begin{pmatrix} \mathcal{C}(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(\mu_r) \end{pmatrix}$ la réduite de Frobenius de A où $\mu_1 \mid ... \mid \mu_r = \mu_A$. Posons $\mu_0 = 1$ et soit s le plus petit indice tel que X ne divise pas μ_s, de sorte que X divise les $r-s$ polynômes $\mu_{s+1}, \mu_{s+2}, ..., \mu_r$.

Il est aisé de calculer le rang d'une matrice compagnon :

$$\operatorname{rg} \mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -P(0) \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & ? \\ & & 1 & ? \end{pmatrix} = \begin{cases} \deg P - 1 \text{ si } P(0) = 0 \\ \deg P \text{ sinon} \end{cases} = \deg P - [X \mid P].$$

En notant n_i les degrés des μ_i, et en remarquant que $\deg \mu_A = n_r$, il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A &= \sum_{i=1}^{r} (n_i - [X \mid \mu_i]) = \left(\sum_{i=1}^{r} n_i \right) - (r-s) \geq n_r + (r-1) - (r-s) = \deg \mu_A + (s-1) \\ &\geq \deg \mu_A - 1, \ \mathit{CQFD}. \end{aligned}$$

7 Réduction de Frobenius – Invariants de similitude

Concluons cette feuille de réduction par une excursion en dimension infinie au pays des Hilbert, où l'on retrouve le théorème spectral sous une forme plus générale. Il vaut mieux savoir ce qu'est une espace vectoriel normé pour s'aventurer plus loin...

8 Une expression de la norme subordonnée dans les Hilbert

9 Une valeur propre pour un opérateur compact

10 Le théorème spectral version Hilbert