Réduction

Marc SAGE

2 juillet 2006

Table des matières

1 Quelques amuses-gueules

a) *Trouver un contre-exemple infirmant la relation "trace = sommes des valeurs propres" trop souvent énoncée sans précaution.*

b) *Soit A une matrice de taille n sur un corps de caractéristique nulle, de trace n, telle que $A^2 = A^3$. Que vaut A ?*

c) *Soit A une matrice réelle telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que* $\det A > 0$.

d) *Soit A une matrice réelle carré de taille n impaire, de déterminant 1, et dont le spectre complexe est inclus dans le cercle unité. Montrer que 1 est valeur propre de A.*

e) *Soit A une matrice telle que tout sev de K^n admet un sev stable par A. Montrer que A est diagonalisable.*

f) *Soit A une matrice complexe inversible dont la k-ième puissance est diagonalisable ($k \geq 1$). Montrer que A est diagonalisable.*

g) *Soit A une matrice diagonalisable. Que dire de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$?*

Solution proposée.

a) On considère un cas pathologique où le spectre est vide, afin que la sommes des valeurs propres valle 0 ; il suffit pour cela de prendre un polynôme caractéristique χ_A sans racines, à l'instar de X^2+1 sur $\mathbb{R}$. Ensuite, la trace se lisant dans le terme de degré $n-1$ de χ_A, il suffit de prendre un polynôme où ce terme est non nul. Ces deux conditions sont par exemple réunies pour $\chi_A = X^2 + X + 1$, avec la matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour être correct, il faudrait énoncer :

$$\textit{si } \chi_A \textit{ est scindé, mettons } \chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (X - \lambda)^{\omega_\lambda}\ , \textit{ alors } \operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \omega_\lambda \lambda$$

(c'est immédiat en trigonalisant A).

b) A est annulée par le polynôme $X^2(X-1)$, donc son spectre (sur un corps où χ_A se scinde) est inclus dans $\{0,1\}$, disons $\chi_A = X^\alpha (X-1)^\beta$. On en déduit $a + b = n = \operatorname{tr} A = b$, d'où $a = 0$ dans le corps, *i.e.* $a = 0$ dans $\mathbb{N}$, ce qui montre que A vaut l'identité.

c) On peut factoriser $I_n = A^3 - A = A(A - I_n)(A + I_n)$, ce qui montre que A est inversible, d'où $\det A \neq 0$. Si ce dernier était négatif, on aurait $\det(A + I_n) = \det A^3 < 0$, d'où $\det(A - I_n) = \frac{1}{\det A(A+I_n)} > 0$. La fonction $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ s'annulerait donc sur $]0,1[$ par le théorème des valeurs intermédiaires, d'où une valeur propre $\lambda \in]0,1[$, qui devrait être racine du polynôme annulateur $X^3 - X - 1$, ce qui impose $\lambda^3 = \lambda + 1 > 1$, *contradiction.*

d) Le polynôme caractéristique de A, qui est à coefficients réels, se scinde sur $\mathbb{C}$ en

$$\chi_A = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \operatorname{Re} \lambda > 0} (X - \lambda)\left(X - \overline{\lambda}\right)$$

en regroupant les valeurs propres non réelles deux par deux. Le déterminant de A vaut donc

$$1 = \det A = 1^\alpha (-1)^\beta \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A,\ \operatorname{Re} \lambda > 0} \underbrace{\lambda \overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2 = 1} = (-1)^\beta\ ,$$

d'où β pair. Comme n est impair, on doit avoir α impair, et en particulier $\alpha \geq 1$, *CQFD.*

e) Si A n'est pas diagonalisable, la somme des sous-espaces propres peut se compléter en un hyperplan, lequel doit admettre un supplémentaire stable, *i.e.* un vecteur propre hors de tout sous-espace propre, *contradiction.*

f) A^k est diagonalisable, donc annulée par un polynôme scindé simple, disons $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A^k. On en déduit que $P = \prod_{i=1}^r \left(X^k - \lambda_i\right)$ annule A. En extrayant une racine k-ième des λ_i, mettons $\lambda_i = \mu_i^k$, on voit que $P = \prod_{i=1}^r \left(X^k - \mu_i^k\right)$ se scinde simplement : déjà $X^k - \mu_i^k = \mu_i^k \left(\left(\frac{X}{\mu_i}\right)^k - 1\right)$ est scindé simple (les λ_i sont non nuls car A est inversible !), et pour $i \neq j$ les polynômes $X^k - \mu_i^k$ et $X^k - \mu_j^k$ n'ont pas de racines en commun (la puissance k-ième d'une racine de $X^k - \mu_i^k$ vaut $\lambda_i \neq \lambda_j$ par hypothèse). Il en résulte que A est diagonalisable.

Noter l'importance des trois hypothèses : on ne peut rien dire si $k = 0$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable tandis que son carré $-I_n$ l'est, et tout nilpotent N non nul n'est pas diagonalisable tout en vérifiant $N^n = 0$ diagonalisable.

g) Il y a plein de méthodes différentes pour résoudre cet exercice. L'une d'elles consiste à exhiber une base de vecteurs propres. On pourrait également mener le calcul du polynôme caractéristiques.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de K^n de vecteurs propres de A. Alors on vérifie que

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} e_n \\ e_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} e_n \\ -e_n \end{pmatrix}$$

forment une base de K^{2n} de vecteurs propres pour $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

Déjà, si $Ae_i = \lambda_i e_i$, on a

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i \\ \pm e_i \end{pmatrix} = (1 \pm 1)\,\lambda_i \begin{pmatrix} e_i \\ \pm e_i \end{pmatrix},$$

ce qui montre que l'on a bien une famille de $2n$ vecteurs propres.

Ces derniers sont par ailleurs libres :

$$\sum \alpha_i \begin{pmatrix} e_i \\ e_i \end{pmatrix} + \sum \beta_i \begin{pmatrix} e_i \\ -e_i \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \sum (\alpha_i + \beta_i)\, e_i = 0 \\ \sum (\alpha_i - \beta_i)\, e_i = 0 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i) = 0 \\ (\alpha_i - \beta_i) = 0 \end{cases} \implies (\alpha_i) = (\beta_i) = 0.$$

2 Lemme de Schur

Soit E un ev de dimension finie sur un corps algébriquement clos. On considère une partie A de $\mathcal{L}(E)$ tels que les seuls sev stables par A sont triviaux ($\{0\}$ et E). Montrer que le commutant de A est réduit aux homothéties.

Solution proposée.

Soit u qui commute avec A. Le corps de K étant algébriquement clos, u admet une valeur propre λ. Puisque u commute avec A, $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ commute avec A, donc son noyau est stable par A, donc est ou bien $\{0\}$ (à rejeter car λ est une valeur propre), ou bien l'espace tout entier, ce qui implique $u = \lambda\,\mathrm{Id}$.

3 Deux caractérisations utiles des matrices nilpotentes

Montrer qu'un matrice de taille n est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est X^n, i.e. *ssi son spectre est réduit à $\{0\}$.*

Montrer qu'une matrice sur un corps de caractéristique nulle est nilpotente ssi les traces de toutes ses puissances sont nulles.

Solution proposée.

• Soit A nilpotente. On considère λ une valeur propre dans un corps de décomposition de χ_A. Soit x un vecteur propre associé : $Ax = \lambda x$. Par itération, il vient $0 = A^n x = \lambda^n x$, d'où $\lambda^n = 0$ et $\lambda = 0$. Ceci montre que χ_A vaut X^n dans le corps de décomposition, donc X^n dans le corps de base.

La réciproque est donnée par Cayley-Hamilton.

• Le sens direct est immédiat en trigonalisant notre matrice dans un corps de décomposition de χ_A (ce qui montre que les valeurs propres de A^k sont les puissances k-ièmes des valeurs propres de A) et en utilisant le premier point.

Soit maintenant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de notre matrice A dans un corps de décomposition de χ_A. Les hypothèses se traduisent, en trigonalisant A, par

$$\forall k \geq 1,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0.$$

Deux méthodes (au moins) sont alors possibles.

Quitte à introduire leurs multiplicité ω_i, on suppose les λ_i distincts. Les hypothèses se réécrivent sous la forme

$$\forall k \geq 1,\ \sum_{i=1}^{r-1} \omega_i \lambda_i^k = 0$$

avec $r \geq 1$ le nombre de valeurs propres (on ne fait pas apparaître la valeur propre 0 dans la somme). Si 0 n'est pas la seule valeur propre, on obtient un système de Vandermonde de taille $r-1 \geq 1$, qui est inversible car les λ_i sont tous supposés non nuls et distincts, ce qui impose $\omega_i = 0$ pour tout $i < r$ (égalité valable dans le corps, donc dans $\mathbb{N}$ par hypothèse sur la caractéristique), d'où 0 seule valeur propre, ce qui est exclu.

Une autre méthode consiste à se rappeler des relations reliant les sommes de Newton S_k et les fonctions symétriques élémentaires σ_k :

$$\forall 1 \leq p \leq n,\ S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \sigma_2 S_{p-2} - ... + (-1)^{p-1} S_1 \sigma_{p-1} + (-1)^p p\sigma_p = 0.$$

On applique cela aux $S_k = \sum \lambda_i^k$ et σ_k associées aux λ_i, ce qui donne $\sigma_k = 0$ par une récurrence immédiate (on simplifie par p, ce qui est autorisé puisqu'on est en caractéristique nulle). On en déduit $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k X^{n-k} = X^n$, d'où A nilpotente par Cayley-Hamilton.

Remarque. Noter pour le premier point qu'il est indispensable de passer par un corps plus gros où χ_A se scinde, sinon le raisonnement "on prend une valeur propre puis..." est creux en général (il se peut qu'il n'y ait aucune valeur propre, même sur les corps usuels comme $\mathbb{R}$).

Par ailleurs, l'hypothèse de caractéristique nulle dans le second point est indispensable. En effet, sur le corps $\mathbb{F}_2$, les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ sont A et I_n selon la parité de la puissance, donc A n'est pas nilpotente tandis que toutes les traces de ses puissances sont nulles.

4 Une caractérisation (inutile) des matrices non inversibles

Soit A une matrice complexe. Montrer que A est non inversible ssi il y a une matrice de passage P telle que $P - \lambda A$ est inversible pour tout complexe λ.

Solution proposée.

Simplifions la condition proposée :

$$\begin{array}{rl} & \exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ P - \lambda A \in GL_n(\mathbb{C}) \\ \Longleftrightarrow & \exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ I_n - \lambda AP \in GL_n(\mathbb{C}). \end{array}$$

De plus, si l'on trigonalise $AP = Q^{-1}TQ$, on a les équivalences

$$\begin{array}{rl} & \forall \lambda \in \mathbb{C},\ I_n - \lambda AP \in GL_n(\mathbb{C}) \\ \Longleftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{C}, Q^{-1}(I - \lambda T) Q \in GL_n(\mathbb{C}) \\ \Longleftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{C}, I - \lambda T \in GL_n(\mathbb{C}) \\ \Longleftrightarrow & T \text{ est de diagonale nulle} \\ \Longleftrightarrow & AP \text{ nilpotente.} \end{array}$$

Il s'agit par conséquent de montrer l'équivalence suivante :

$$A \notin GL_n(\mathbb{C}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ AP \text{ nipotente.}$$

Cet exercice de pure algèbre linéaire a déjà traité dans la feuille sur la dimension finie, aussi nous en donnerons une preuve succincte.

Le sens $\boxed{\Longleftarrow}$ est immédiat : si A était inversible, AP le serait aussi, donc ne pourrait être nilpotente.

Pour le sens $\boxed{\Longrightarrow}$, soit $(k_1, ..., k_p)$ une base de $\operatorname{Ker} A$, avec $p \geq 1$ car A n'est pas injective ! On complète avec $(e_{p+1}, ..., e_n)$, où A est un isomorphisme, disons A envoie e_i sur un f_j, et on définit P en envoyant la famille libre $(k_1, ..., k_p, f_{p+1}, ..., f_n)$ sur la base $(k_2, ..., k_p, e_{p+1}, ..., e_n, k_1)$. On voit alors que PA envoie tous les e_i sur 0 au bout d'au plus n étapes :

$$e_{p+1} \overset{PA}{\mapsto} e_{p+2} \overset{PA}{\mapsto} e_{p+3} \overset{PA}{\mapsto} ... \overset{PA}{\mapsto} e_n \overset{PA}{\mapsto} k_1 \overset{PA}{\mapsto} 0.$$

Les k_i étant tués en une étape, PA est nilpotente, donc AP également (noter que $(AP)^{n+1} = A(PA)^n P$)

5 Des générateurs du groupe linéaire

Soit K un corps ayant strictement plus de deux éléments. Montrer que les matrices diagonalisables inversibles engendrent $GL_n(K)$. Que se passe-t-il si $K = \mathbb{F}_2$?

Solution proposée.
Puisque les transvections et les dilatations engendrent GL_n, il suffit de montrer que les diagonalisables engendrent les tranvections. Soit donc T une transvection.

Si K a plus de n éléments, on peut considérer D une matrice diagonale dont les coefficients sont non nuls et distincts. Alors T s'écrit $D^{-1}(DT)$ où DT est triangulaire avec des termes distincts sur la diagonale, donc DT est diagonalisable, *CQFD*.

Dans le cas général, on s'en sort autrement. En effet, toute transvection étant semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$, il suffit d'engendrer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$. En cherchant une décompostion du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1},$$

mettons avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ & 1 \end{pmatrix}$ pour faire simple, on trouve que $\mu = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}-1}$ convient avec λ un scalaire autre que 0 et 1.

Pour le cas $K = \mathbb{F}_2$, on remarque que la seule matrice diagonalisable inversible est l'identité, laquelle ne peut évidemment pas engendrer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$.

6 Une formule explicite pour le polynôme caractéristique

Pour une matrice A de taille $n \times n$ et I une partie de $\{1, ..., n\}$, on notera A_I la matrice extraite $(a_{i,j})_{i,j \in I}$.

Montrer la formule suivante :

$$\det(A + tI_n) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (\det A_I)\, t^{n-|I|}.$$

Commenter le rapport avec le polynôme caractéristique.

Solution proposée.
Notons $D(A)$ la quantité de droite ("D" comme "**d**éterminant"). On peut déjà esayer de montrer le résultat pour des matrices gentilles. Si A est diagonale, et même triangulaire, les déterminants extraits sont triviaux à calculer :

$$\det A_I = \prod_{i \in I} a_{i,i}.$$

En sommant sur les parties I ayant un cardinal fixé, on tombe sur les fonctions symétriques élémentaires des $a_{i,i}$, d'où le résultat :

$$D(A) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{|I|=k} \det A_I \right) t^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k t^{n-k} = \prod_{i=1}^{n} (t + a_{i,i}) = \det(A + tI_n).$$

Il s'agit maintenant de se ramener à ce cas simple. Il suffit pour cela de trigonaliser $A = PTP^{-1}$ dans un corps de décomposition. Il reste donc à montrer que D est invariante par conjugaison, ce qui concluera au vu du calcul

$$D(A) = D\left(PTP^{-1}\right) = D(T) = \det(T + tI_n) = \det\left(P(T + tI_n)P^{-1}\right) = \det(A + tI_n).$$

On revoit pour cela à la feuille sur les déterminants (exercice 12).

Appliqué au polynôme caractéristique, on trouve ainsi

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{|I|=k} \det A_I \right) X^{n-k}.$$

Pour $k = 0$, la contribution est celle du déterminant de la matrice vide, lequel vaut 1, et on retrouve que χ_A est unitaire. Pour $k = 1$, on retrouve le coefficient sous-dominant $-\operatorname{tr} A$ et pour $k = n$ on retrouve le terme constant $(-1)^k \det A$.

Remarque. On aurait également pu procéder par un calcul direct en développant $\det (A + tI_n)$ et en regroupant les mêmes puissances de t (cf. feuille sur les déterminants).

7 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit $a_0, ..., a_{n-1}$ des complexes et f une application complexe définie sur un intervalle I. Résoudre

$$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + ... + a_1 f' + a_0 f = 0.$$

Solution proposée.
Introduisons δ l'opérateur de dérivation et P le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. L'équation se réécrit alors sous la forme $f \in \operatorname{Ker} P(\delta)$, ce qui nous invite à scinder $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et à appliquer le lemme des noyaux :

$$\operatorname{Ker} P(\delta) = \bigoplus \operatorname{Ker} (\delta - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}.$$

Il reste donc à déterminer les noyaux $\operatorname{Ker} (\delta - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$.

En notant $g = f e^{-\lambda \operatorname{Id}}$, on remarque que

$$[\delta - \lambda \operatorname{Id}] \left(g e^{\lambda \operatorname{Id}} \right) = e^{\lambda \operatorname{Id}} (g' - \lambda g) - \lambda g e^{\lambda \operatorname{Id}} = g' e^{\lambda \operatorname{Id}},$$

d'où par une récurrence immédiate

$$[\delta - \lambda \operatorname{Id}]^\alpha \left(g e^{\lambda \operatorname{Id}} \right) = g^{(\alpha)} e^{\lambda \operatorname{Id}}.$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned} f \quad \in & \quad \operatorname{Ker} (\delta - \lambda \operatorname{Id})^\alpha \iff [\delta - \lambda \operatorname{Id}]^\alpha \left(g e^{\lambda \operatorname{Id}} \right) = 0 \\ \iff & \quad g^{(\alpha)} e^{\lambda \operatorname{Id}} = 0 \\ \iff & \quad g \in \mathbb{C}_{\alpha-1} [X] \\ \iff & \quad f \in e^{-\lambda \operatorname{Id}} \mathbb{C}_{\alpha-1} [X]. \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation sont donnés par

$$\operatorname*{Vect}_{1 \leq i \leq n} \left(x^j e^{-\lambda_i x} \ ; \ 0 \leq j < \alpha_i \right).$$

Remarque. On résoudrait de même les suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

8 Une CNS pour que noyau et image soient en somme directe

Soit u un endomorphisme d'un ev E de dimension finie. On note μ_u son polynôme minimal. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$ *;*
b) $\operatorname{Ker} u$ *admet un supplémentaire stable par u ;*
c) $\operatorname{val} \mu_u \leq 1$.

Solution proposée.
$\boxed{a) \implies b)}$ Immédiat.
$\boxed{b) \implies c)}$ $\operatorname{Im} u$ étant un supplémentaire du noyau, $u_{|\operatorname{Im} u}$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u$, donc n'a pas 0 dans son spectre ; en notans μ son polynôme minimal, dont la valuation en X est non nulle par ce qui précède, on voit que le polynôme $X\mu$ annule u : μ tue ce qu'il y a sur l'image tandis que le X s'occupe du noyau. μ_u doit par conséquent diviser $X\mu$ et est donc de valuation ≤ 1.
$\boxed{c) \implies a)}$ Écrivons le polynôme minimal de u :

$$\mu_u = X^{\alpha} P \text{ où } \alpha = 0 \text{ ou } 1.$$

Si $\alpha = 0$, u est inversible et on se convaincra sans peine que son noyau et son image sont en somme directe. Si $\alpha = 1$, on applique le lemme des noyaux :

$$E = \operatorname{Ker} \mu_u (u) = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} P (u) .$$

On aimerait bien que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} P (u)$. Or, on dispose de l'inclusion $\boxed{\subset}$ vu que

$$P (u) (u (x)) = XP (u) (x) = \mu (u) (x) = 0,$$

et l'on conclut par égalité des dimensions.

On aurait aussi pu raisonner en prenant un $u (x)$ dans l'intersection de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$, dire que $0 = \mu (u) (x) = P (u (x)) = a_0 u (x) + 0$ où a_0 est le terme contant de P, avec a_0 non nul car X ne divise pas P, d'où $u (x) = 0$.

9 Problème de Burnside

Soit G un sous-groupe de $GL_n (\mathbb{C})$ d'exposant fini (l'exposant d'un groupe est le ppcm des ordres de ses éléments). On veut montrer que G est fini.

• *Justifier l'existence d'éléments $g_1, ..., g_r$ de G qui engendrent linéairement G.*
On considère alors l'application

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^r \\ g & \longmapsto & (\operatorname{tr} (gg_1) , ..., \operatorname{tr} (gg_r)) \end{array} \right. .$$

• *Montrer que l'image de G par τ est finie.*
• *Montrer que τ est injective. Pour cela, supposant $\tau (a) = \tau (b)$, montrer que $I_n - ab^{-1}$ est nilpotent (considérer les traces de ses puissances) et diagonalisable.*
• *Conclure.*

Solution proposée.
• $\operatorname{Vect} G$ est un sev de $M_n (\mathbb{C})$, donc est de dimension finie. Soit $v_1, ..., v_s$ un système de générateurs. Chaque v_i se décompose dans $\operatorname{Vect} G$ selon des éléments de G. On récupère tous ces éléments, qui engendrent alors clairement $\operatorname{Vect} G$.
• Désignons par e l'exposant du groupe. L'hypothèse de travail se réécrit $\forall g \in G,\ g^e = I_n$. En particulier, tous les $g \in G$ sont diagonalisables et leur spectre est à valeurs dans l'ensemble μ_e des racines e-ièmes de l'unité. Les traces des $g \in G$ ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs (au plus e choix pour chaque valeur propre), donc l'image de G est finie (de cardinal $\leq ner$).

• Soit a et b dans G tels que $\tau(a) = \tau(b)$. Puisque les g_i engendrent G et que la trace est linéaire, on en déduit $\operatorname{tr}(ag) = \operatorname{tr}(bg)$ pour tout $g \in G$. Faisant $g = b^{-1}h$, on obtient $\operatorname{tr}(h) = \operatorname{tr}(ch)$ en posant $c = ab^{-1}$, d'où en itérant

$$\operatorname{tr}\left(c^k h\right) = \text{constante indépendante de } k.$$

En prenant ensuite $h = I_n$, on a que $\operatorname{tr}\left(c^k\right)$ est une constante t (comme "**t**race"). Suivons l'énoncé en montrons que les traces des puissances de $I_n - c$ sont nulles :

$$\operatorname{tr}\left((I_n - c)^k\right) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^k c^{n-k}\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^k \underbrace{\operatorname{tr}\left(c^{n-k}\right)}_{=t} = t \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^k = t(1-1)^k = 0.$$

Il en résulte que $I_n - c$ est nilpotent (cf. exercice 3). De plus, c est diagonalisable en tant qu'élément de G, donc $I_n - c$ l'est également. Finalement $I_n - c = 0$, d'où $c = I_n$ et $a = b$ comme souhaité.

• On a montré que G s'injecte dans son image qui est finie, ce qui suffit pour conclure quant à la finitude de G.

Remarque. Nous avons ici apporté une réponse positive au problème de Burnside (un groupe d'exposant fini est-il fini ?) dans le cas des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$. Il y a cependant dans la nature des groupes d'exposant fini *non finis*, dont la construction – nécessitant une centaine de pages pour le plus simple – dépasse largement le cadre de nos compétences.

10 Un problème de combinatoire

Soit un cube dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et n un entier positif. Compter le nombre de chemins formés de n arêtes du cubes reliant deux sommets donnés.

Solution proposée.

L'aspect réduction n'est pas immédiat, mais il viendra en temps voulu... Un dessin montre qu'il y a quatre types de paires de sommets à dinstiguer : deux sommets confondus (cas 0), formant une arête (cas 1), formant une diagonale d'une face (cas 2) ou formant une diagonale du cube (cas 3). On va dénombrer ces derniers par récurrence. En effet, en notant $c_i(n)$ le nombre de chemins formés de n arêtes entre deux sommets situés dans la configuration i, il est facile de constater les relations de récurrence suivantes en regardant où peut se terminer un chemin donné dont on a éliminé la dernière arête (il est inutile de préciser que dessiner un cube peut aider à la résolution de l'exercice...) :

$$\begin{cases} c_0(n+1) = 3c_1(n) \\ c_1(n+1) = c_0(n) + 2c_2(n) \\ c_2(n+1) = 2c_1(n) + c_3(n) \\ c_3(n+1) = 3c_2(n) \end{cases}.$$

En introduisant le vecteur colonne des $c_i(n)$ – appelons-le $C(n)$ –, et en traduisant la relation de récurrence ci-dessus de façon matricielle, on obtient

$$C(n) = A^n \cdot C(0) = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A := \begin{pmatrix} & 3 & & \\ 1 & & 2 & \\ & 2 & & 1 \\ & & 3 & \end{pmatrix}.$$

On va donc réduire la matrice A pour pouvoir calculer ses puissances. Le calcul du polynôme caractéristique donne

$$\chi_A = X^4 - 10X^2 + 9 = \left(X^2 - 1\right)\left(X^2 - 9\right) = (X-1)(X+1)(X-3)(X+3)$$

qui est scindé simple, donc A est diagonalisable : c'est une bonne nouvelle. En cherchant à la main les quatre droites propres, on trouve

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 3 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$C(n) = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^n & & \\ & & 3^n & \\ & & & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, il suffit de trouver la première colonne de P^{-1}, *i.e.* décomposer $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base de vecteurs propres donnée par P. Un calcul donne $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour la colonne voulue. En substituant dans l'expression de $C(n)$, on trouve finalement

$$C(n) = \begin{pmatrix} 3\frac{3^{n-1}+1}{4} \\ 0 \\ \frac{3^n-1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair et } \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3^n+1}{4} \\ 0 \\ 3\frac{3^{n-1}-1}{4} \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

On vérifiera que les 0 sont bien à leur place pour des questions d'invariants, que les nombres écrits sont bien entiers selon les parités et que les petites valeurs de $n \geq 0$ donnent les bons résultats : cela fait toujours plaisir !

Remarque. On pourrait se poser la même question pour les quatres autres solides de Platon : tétréaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre. La démarche ci-dessus s'adapte bien.

Proposons toutefois une solution alternative pour le cube, issue de la théorie des graphes. Lorsque l'on dispose d'un graphe numéroté, il est intéressant de regarder sa *matrice d'adjacence* dont le coefficient d'indice (i, j) compte le nombre d'arêtes allant du sommet i au sommet j. Il alors aisé de constater que le terme (i, j) de sa puissance n-ième compte le nombre de chemins du sommet i au sommet j suivant n arêtes du graphe : c'est exactement ce qui nous intéresse. On va donc choisir une numérotation du cube qui simplifie le calcul des puissances de la matrice d'adjacence.

Choisissons un sommet 1, puis numérotons $2, 3, 4$ les sommets situés à distance 2 du sommet 1. On numérote les sommets restants $5, 6, 7, 8$ de sorte que la différence des numéros de deux sommets diamétralement opposés fasse 4. La matrice d'adjacence s'écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & J_4 - I_4 \\ J_4 - I_4 & \end{pmatrix}$$

avec les notations évidentes. Les puissances sont alors aisées à obtenir :

$$A^n = \begin{pmatrix} & B \\ B & \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} & B^n \\ B^n & \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ impair} \\ \begin{pmatrix} B^n & \\ & B^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad \text{avec } B = J - I.$$

Or J et I commutent, donc le binôme s'applique :

$$\begin{aligned} (J-I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-1)^{n-k} = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1} J (-1)^{n-k} \\ &= (-1)^n I + \frac{(4-1)^n - (-1)^n}{4} J = \frac{3^n - (-1)^n}{4} J + (-1)^n I. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$c_0(n) = [A^n]_{1,1} = \begin{cases} \text{si } n \text{ pair : } \frac{3^n-1}{4} + 1 = 3\frac{3^{n-1}+1}{4} \\ \text{si } n \text{ impair : } 0 \end{cases}$$

et on retrouve de même les autres coefficients.