Matrices

Marc SAGE

31 mars 2009

Table des matières

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Comme pour les espaces vectoriels, le corps de base sera souvent omis et l'on notera volontiers M_n pour $M_n(K)$.

Le coefficient d'indice (a, b) d'une matrice X sera noté $[X]_{a,b}$.

L'ensemble des matrices symétriques sera noté S_n ou $S_n(K)$.

L'ensemble des matrices anti-symétriques sera noté AS_n ou $AS_n(K)$.

1 Mise en jambe

1. *Rappeler pourquoi, pour les matrices, un inverse à droite (ou à gauche) est automatiquement un « vrai » inverse.*
2. *Montrer que deux matrices carrées dont la somme et le produit coïncident commutent. Contre-exemples si l'on ne parle pas de matrices ?*
3. *Montrer pour $A, B \in M_n$ l'énoncé d'intégrité « modérée »*
$$(\forall M \in M_n,\ AMB = 0) \implies (A = 0 \text{ ou } B = 0).$$
4. *Soient $A \in M_{i,j}$ et $B \in M_{k,l}$ (où $i, j, k, l \geq 1$). Calculer la codimension du sev*
$$V_{A,B} := \{M \in M_{j,k}\ ;\ AMB = 0\}.$$
5. *Une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dite* à diagonale dominante *si*
$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$
Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.

En déduire, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, une localisation des scalaires λ pour lesquels il existe un sev non nul où A agit par homothétie de rapport λ.

Solution proposée.

1. Soit A une matrice de M_n admettant un inverse à droite, mettons $AA_d = 1$. On veut montrer que A a un inverse à gauche[1], ce qui revient à montrer que l'application $\cdot A : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n & \longrightarrow & M_n \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \right.$ atteint la matrice identité 1. Il suffit donc de montrer que $\cdot A$ est surjective. Or, c'est un endomorphisme de M_n, injectif par existence de l'inverse à droite, donc surjectif, *CQFD*.
2. Notons A et B nos deux matrices. L'hypothèse s'écrit $A + B = AB$, ou encore $A + B - AB = 0$. On rajoute à cette identité le terme manquant pour une bonne factorisation : $(A - 1)(B - 1) = 1$. On en déduit que $B - 1$ est l'inverse de $A - 1$, d'où $(B - 1)(A - 1) = 1$ et $A + B = BA$ en développant. Il vient alors $AB = A + B = BA$ comme souhaité.

   Si l'on n'est pas dans l'anneau M_n, l'argument de la question précédente échoue. Pour un contre-exemple, puisque l'hypothèse se réécrit $(a - 1)(b - 1) = 1$ et que la conclusion équivaut (sous cette hypothèse) à $(b - 1)(a - 1) = 1$, il suffit de trouver deux éléments x et y d'un anneau tels que $xy = 1 \neq yx$, les éléments a et b étant alors définis par $a - 1 = x$ et $b - 1 = y$. C'est le moment de penser aux tapis roulant de $K^{\mathbb{N}}$ définis par $\left\{ \begin{array}{lll} x : & (u, v, w, ...) \mapsto & (v, w, ...) \\ y : & (u, v, w, ...) \mapsto & (0, u, v, ...) \end{array} \right.$. Dans l'anneau $L\left(K^{\mathbb{N}}\right)$, on a bien d'une part $xy = 1$ d'autre part $yx \neq 1$ car la suite $(1, 0, 0, ...)$ est annulée par yx.

[1] Les inverses à droite et à gauche coïncident (propriété valable dans un monoïde quelconque) :
$$A_d = 1A_d = (A_g A) A_d = A_g (AA_d) = A_g 1 = A_g.$$

3. L'hypohtèse se réécrit $AE_{ij}B = 0$ pour tout i, j, d'où à u, v fixés

$$0 = [AE_{ij}B]_{uv} = \sum_{x,y} [A]_{u,x} [E_{i,j}]_{x,y} [B]_{y,v} = [A]_{u,i} [B]_{j,v} .$$

Si A est non nulle, l'un des $[A]_{u,i}$ est non nul, donc tous les $[B]_{j,v}$ sont nuls, *i. e.* $B = 0$.

4. Raisonnant en termes d'applications linéaires, une matrice M satisfait $AMB = 0$ ssi $\operatorname{Im} M_{|\operatorname{Im} B} \subset \operatorname{Ker} A$, autrement ssi $M_{|\operatorname{Im} B} \in L(\operatorname{Im} B, \operatorname{Ker} A)$. En notant S un supplémentaire de $\operatorname{Im} B$ dans K^k, ce qui permet d'identifier[2] $M_{j,k} = L\left(S \oplus \operatorname{Im} B, K^j\right)$ avec $L\left(S, K^j\right) \times L\left(\operatorname{Im} B, K^j\right)$, on en déduit que l'application linéaire injective

$$\begin{cases} V_{A,B} & \hookrightarrow & L\left(S, K^j\right) \times L(\operatorname{Im} B, \operatorname{Ker} A) \\ M & \longmapsto & \left(M_{|S}, M_{|\operatorname{Im} B}\right) \end{cases}$$

est bien définie et est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La dimension de $L\left(S, K^j\right)$ vaut $(k - \operatorname{rg} B)\, j$, tandis que celle de $L(\operatorname{Im} B, \operatorname{Ker} A)$ vaut $(\operatorname{rg} B)(j - \operatorname{rg} A)$. Additionnant, il reste $jk - \operatorname{rg} A \operatorname{rg} B$, d'où le résultat

$$\operatorname{codim} V_{A,B} = \operatorname{rg} A \ \operatorname{rg} B.$$

5. Il revient à montrer que A est injective, autrement dit que $\operatorname{Ker} A$ est nul. Pour $\overrightarrow{\lambda} \in \operatorname{Ker} A$, on a $A\overrightarrow{\lambda} = 0$, d'où (en lisant la i-ième coordonnée)

$$\lambda_i a_{i,i} = \sum_{j \neq i} (-\lambda_j)\, a_{i,j}.$$

Afin d'utiliser l'hypothèse, on prend les modules :

$$|\lambda_i| \, |a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |\lambda_j| \, |a_{i,j}| .$$

Si $\overrightarrow{\lambda} \neq 0$, alors l'une de ses coordonnées est non nulle et l'on peut considérer un tel λ_k de module maximal. Il vient alors

$$|a_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_k|} |a_{k,j}| < \sum_{j \neq k} |a_{k,j}| \text{, contradiction.}$$

Lorque $A = \lambda$ sur un sev V non nul, la matrice $A - \lambda$ n'est pas injective (son noyau contient V), donc n'est pas à diagonale dominante, donc λ appartient à l'un des disques de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Remarques. La méthode de la première question doit être retenue : utiliser des arguments dimensionnels pour transformer une surjectivité *a priori* non évidente en une injectivité quasi triviale.

La troisième question montre que, pour avoir ($A = 0$ ou $B = 0$), on peut remplacer la condition (insuffisante) $A1B = 0$ par $A \cdot B = 0$.

La quatrième question mets les points sur les i quant à considérer des matrices commes des applications linéaires. Une matrice de $M_{a,b}$ étant vue comme une application linéaire de K^b vers K^a et non l'inverse, on prendra garde à ne pas se tromper de dimension lorsque l'on appliquera le théorème du rang.

La cinquième quesion est un lemme d'Hadamard qui peut s'interprêter comme suit : une matrice à diagonale dominante a tous ses coefficients hors de la diagonale « négligeables » devant ceux diagonaux, donc est « presque » une matrice diagonale (à coefficients non nuls), donc est presque inversible. Un scalaire λ comme dans l'énoncé est appelé *valeur propre* de A, les disques localisant les valeurs propres sont dits de *Gershgörin.*

[2] Lorsque V et W sont deux sev en somme directe, on a un isomorphisme

$$\begin{cases} L(V \oplus W) & \rightleftarrows & L(V) \times L(W) \\ f & \longmapsto & \left(f_{|V}, f_{|W}\right) \\ \begin{pmatrix} (v + w) \longmapsto \\ \alpha(v) + \beta(w) \end{pmatrix} & \longleftarrow & (\alpha, \beta) \end{cases} .$$

2 Sur la trace

1. *Montrer que la seule forme linéaire centrale*[3] *sur M_n est – à un scalaire près – la trace.*
2. *Montrer que toute forme linéaire sur M_n est du type* $\operatorname{tr}(A\cdot) : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.

Solution proposée.

1. Face à une équation du type $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, il faut commencer par donner des valeurs « simples » aux variables A et B. Prendre $A = 0$ ou ± 1 ou λ n'est pas très intéressant. On est rapidement amené à essayer les matrices élémentaires, mettons $\left\{ \begin{array}{l} A = E_{i,j} \\ B = E_{k,l} \end{array} \right.$.

   On rappelle la formule (qu'il faut connaître...) $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$. On a donc

$$\delta_j^k \varphi(E_{i,l}) = \varphi(E_{i,j}E_{k,l}) = \varphi(E_{k,l}E_{i,j}) = \delta_i^l \varphi(E_{k,l}).$$

   En prenant $\left\{ \begin{array}{l} i \neq l \\ j = k \end{array} \right.$, on obtient $\varphi(E_{i,l}) = 0$, donc φ est nulle pour toute matrice à diagonale nulle. En faisant cette fois $\left\{ \begin{array}{l} i = l \\ j = k \end{array} \right.$, il vient $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j})$, et ceci tenant pour tout i, j, on en déduit que $\varphi(E_{i,i})$ est une constante λ.

   Ainsi, en décomposant une matrice A comme une matrice de diagonale nulle D_0 plus une matrice diagonale, on obtient

$$\varphi(A) = \varphi\left(D_0 + \sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{i,i}\right) = \underbrace{\varphi(D_0)}_{=0} + \sum_{i=1}^n a_{i,i}\underbrace{\varphi(E_{i,i})}_{=\lambda} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \lambda \operatorname{tr} A.$$

2. Vu le résultat à montrer, il est naturel de considérer l'application[4]

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n & \longrightarrow & M_n^* \\ A & \longmapsto & \operatorname{tr}(A\cdot) \end{array} \right.$$

   On veut montrer la surjectivité de f. On va montrer que f est linéaire, injective, puis on concluera par l'égalité des dimensions.

   f est bien définie car, la trace étant linéaire, $\operatorname{tr}(A\cdot)$ l'est aussi :

$$\operatorname{tr}(A(\lambda M + N)) = \operatorname{tr}(\lambda AM + AN) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(AN).$$

   f est de plus linéaire :

$$f(\lambda A + B) = \operatorname{tr}((\lambda A + B)\cdot) = \operatorname{tr}(\lambda A \cdot + B\cdot) = \lambda \operatorname{tr}(A\cdot) + \operatorname{tr}(B\cdot) = \lambda f(A) + f(B).$$

   Vérifions que f est injective :

$$f(A) = 0 \implies \operatorname{tr}(A\cdot) = 0 \implies \forall i, j,\ \underbrace{\operatorname{tr}(AE_{i,j})}_{a_{j,i}} = 0 \implies A = 0.$$

   Enfin, puisque $\dim E^* = \dim E$ pour un espace vectoriel de dimension finie, en particulier pour $E = M_n$, on peut conclure que f est un isomorphisme (en particulier surjectif, ce que l'on voulait).

[3] Une forme linéaire φ sur une algèbre $\mathcal{A}$ est dite *centrale* si $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ pour tous $a, b \in \mathcal{A}$.

[4] On note E^* le dual d'un espace vectoriel , *i. e.* l'ensemble des formes linéaires sur E. Lorsque E est de dimension finie, on a l'égalité

$$\dim E^* = \dim E.$$

Remarques. La propriété $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ est remarquablement pratique, mais attention à ne pas en abuser : en particulier, on ne peut pas réordonner n'importe comment un produit de $k \geq 3$ matrices sous une trace ! Par exemple, en notant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on dispose des relations

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = 0 \times C = 0$$

et

$$ACB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les deux produits ABC et ACB n'ont pas la même trace.

Si l'on peut réordonner tout comme l'on veut sous la trace, mettons $\mathrm{tr}\,(AMN) = \mathrm{tr}\,(ANM)$ pour toute matrice A, alors $\mathrm{tr}\,(\cdot MN) = \mathrm{tr}\,(\cdot NM)$, d'où $MN = NM$ par injectivité de $R \mapsto \mathrm{tr}\,(\cdot R)$ ce qui est un cas trivial où on peut effectivement faire ce que l'on veut sous la trace.

Dans le cas réel, $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\,(A^t B)$ est le produit scalaire canonique sur les matrices : la seconde question ne fait donc qu'énoncer l'isomorphisme canonique d'un espace euclidien avec son dual.

3 Un calcul de rang

Pour a et b des scalaires, calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

Solution proposée.

On va faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, opérations qui simplifie la matrice et que nous savons conserver le rang. On s'autorisera dans un premier temps à marcher à pieds joints sur les quelques divisions par zéro qui nous embêtent ; nous les traiterons à part plus tard.

La matrice étant homogène en (a, b), on a envie de poser $c := \frac{b}{a}$ et de diviser toutes les lignes par a^2, ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & c & c & c^2 \\ c & 1 & c^2 & c \\ c & c^2 & 1 & c \\ c^2 & c & c & 1 \end{pmatrix}$. On a un 1 tout en haut à gauche, ce qui permet de tuer les coefficients en dessous à l'aide des opérations $\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - cL_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - cL_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - c^2 L_1 \end{cases}$: on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & c & c & c^2 \\ & 1-c^2 & 0 & c-c^3 \\ & 0 & 1-c^2 & c-c^3 \\ & c-c^3 & c-c^3 & 1-c^4 \end{pmatrix}$, dont le rang vaut 1 plus le rang de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1-c^2 & 0 & c\left(1-c^2\right) \\ 0 & 1-c^2 & c\left(1-c^2\right) \\ c\left(1-c^2\right) & c\left(1-c^2\right) & \left(1-c^2\right)\left(1+c^2\right) \end{pmatrix}$. Divisant toutes les colonnes par $1 - c^2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & c \\ c & c & 1+c^2 \end{pmatrix}$. On tue le c de la première colonne via $L_3 \longleftarrow L_3 - cL_1$, ce qui donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ & 1 & c \\ & c & 1 \end{pmatrix}$, dont le rang vaut 1 plus le rang de $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$, laquelle est de rang 2.

Finalement, on trouve un rang 4 lorsque tout ce qui précède est légitime. Listons les illégalités que nous avons commises : $a = 0$, $c^2 = 1$, $c = 1$. Il suffit de les traiter à part.

Lorsque $a = 0$, la matrice devient $\begin{pmatrix} & & & b^2 \\ & & b^2 & \\ & b^2 & & \\ b^2 & & & \end{pmatrix}$ qui est de rang 4 si $b \neq 0$ et de rang 0 si $b = 0$.

Lorsque $a \neq 0$ et $c^2 = 1$, la matrice 3×3 avant division par $1 - c^2$ est nulle, donc le rang cherché vaut 1.

Le cas $c=1$ est un cas particulier de $c^2=1$.

Finalement, on peut résumer de manière concise :

$$\begin{array}{cc} \text{(condition)} & \text{(rang)} \\ a^2 \neq b^2 & 4 \\ a^2 = b^2 \neq 0 & 1 \\ a^2 = b^2 = 0 & 0 \end{array}.$$

4 Sur un isomorphisme

Soient $p,q \geq 1$. On note P la matrice complexe $\begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$ avec p scalaires 1 et q scalaires i.

Soit $S_{p,q}$ l'ensemble des matrices A complexes telles que ${}^tAJ + JA = 0$ avec $J := P^2$.

Montrer que l'on a un isomorphisme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} AS_{p+q}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & S_{p,q} \\ A & \longmapsto & PAP^{-1} \end{array} \right. .$$

Solution proposée.

L'application ci-dessus étant clairement linéaire et injective (d'inverse $A \mapsto P^{-1}AP$), il s'agit de montrer qu'elle est bien définie et que les dimensions au départ et à l'arrivée coïncident.

Vérifions que, pour A antisymétrique, on a bien $PAP^{-1} \in S_{p,q}$. Remarquant que P est symétrique, on veut

$$\begin{array}{rcl} {}^t\left(PAP^{-1}\right)J & \stackrel{?}{=} & -JPAP^{-1} \\ \iff P^{-1}(-A)PJ & \stackrel{?}{=} & -JPAP^{-1} \\ \iff A(PJP) & \stackrel{?}{=} & (PJP)A \end{array}$$

ce qui est vrai car $PJP = P^4 = 1$.

Pour calculer la dimension (complexe) de $S_{p,q}$, on décrit ses éléments par blocs. Étant donné une matrice $M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ découpée par blocs comme J et P, on a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} & \in & S_{p,q} \\ \iff {}^t\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} {}^t\alpha & -\gamma \\ \beta & -{}^t\delta \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ \iff \alpha \in AS_p \text{ et } \beta & = & \gamma \text{ et } \delta \in AS_q. \end{array}$$

On en déduit un paramétrage de $S_{p,q}$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} AS_p \times M_{p,q} \times AS_q & \twoheadrightarrow & S_{p,q} \\ (\alpha,\beta,\delta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

qui est clairement injectif. Il en résulte

$$\begin{array}{rcl} \dim S_{p,q} & = & \dim AS_p + \dim M_{p,q} + \dim AS_q = \dfrac{p(p-1)}{2} + pq + \dfrac{q(q-1)}{2} \\ & = & \dfrac{p^2 - p + 2pq + q^2 - q}{2} = \dfrac{(p+q)^2 - (p+q)}{2} \\ & = & \dim AS_{p+q},\ \textit{CQFD}. \end{array}$$

5 L'inverse est-il une fonction polynomiale ?

Soit A une matrice inversible. Montrer que son inverse est un polynôme en A. En d'autres termes :

$$A \in GL_n(K) \implies A^{-1} \in K[A].$$

Montrer cependant qu'en supposant le corps de base K infini l'inverse n'est pas une fonction polynomiale, i. e. *qu'il n'y a pas de $P \in K[X]$ tel que*

$$A^{-1} = P(A) \text{ pour toute matrice } A \text{ inversible.}$$

Qu'en est-il du cas K fini ?

Solution proposée.

M_n étant de dimension finie n^2, la famille $\left(I, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$ est liée, donc il y a des scalaires (λ_i) non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i A^i = 0$, d'où un polynôme P annulateur de A. Quitte à multiplier par A^{-1} assez de fois, on peut supposer que la valuation de P est de 0 :

$$a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 = 0$$

avec a_d et a_0 non nuls et $d \geq 1$. On en déduit, en composant une fois de plus par A^{-1} et en isolant a_0 :

$$A^{-1} = \frac{-a_d A^{d-1} - \cdots - a_2 A - a_1}{a_0}$$

qui est bien un polynôme en A.

Supposons maintenant que $A^{-1} = P(A)$ pour un même polynôme P valable pour tout matrice A inversible. On doit donc avoir $P(\lambda I) = \frac{1}{\lambda} I$ pour tout scalaire λ non nul. Si P s'écrit $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, en ne regardant qu'une coordonnée sur la diagonale, on doit avoir

$$\sum_{i=0}^{d} a_i \lambda^{i+1} = 1.$$

Ceci tenant pour tout λ dans K^* supposé infini, on en déduit $a_i = 0$ pour tout i, d'où contradiction, P ne pouvant être nul (il représente un inverse...).

Si K est supposé fini, alors $M_n(K)$ est fini de cardinal $(\#K)^{n^2}$, donc le groupe $GL_n(K)$ est d'ordre fini, mettons g, donc toute matrice A inversible élevée à la puissance g donne l'identité, ce qui s'écrit aussi $A^{g-1} = A^{-1}$, d'où un polynôme universel X^{g-1}.

6 Idéaux bilatères de M_n

1. *Déterminer tous les idéaux bilatères*[5] *de M_n.*
2. *En déduire que les morphismes d'algèbres de M_n vers une algèbre non nulle sont toujours injectifs.*

Solution proposée.

1. Soit I un idéal bilatère. On va multiplier les éléments de I par des $E_{i,j}$ pour tuer plein de coefficients et espérer récupérer tous les $E_{k,j}$, ce qui montrera que I contient des générateurs de $M_n(K)$, donc vaudra $M_n(K)$ tout entier.

   Déjà, l'idéal nul $\{0\}$ convenant, on supposera que I contient une matrice non nulle A. Quitte à échanger des lignes et colonnes, ce qui se fait par multiplication par des matrices et donc permet de rester dans notre idéal, on peut supposer $a_{1,1} \neq 0$. I doit alors contenir $\frac{1}{a_{1,1}} E_{1,1} A E_{1,1} = E_{1,1}$, donc tous les $E_{i,j}$ par échange de lignes et colonnes, donc I vaut $M_n(K)$.

   Les seuls idéaux bilatères sont donc $\{0\}$ et $M_n(K)$.

[5] Dans un anneau A, un *idéal bilatère* I est un sous-groupe additif de A tel que $IA \subset A$ et $AI \subset I$.

2. Soit $\varphi : M_n \longrightarrow A$ un tel morphisme. Son noyau est un idéal bilatère de M_n, donc vaut $\{0\}$ ($CQFD$) ou M_n. Dans ce dernier cas, le morphisme est nul, d'où $1_A = \varphi(1) = 0$ et l'algèbre A est nulle, contradiction.

Remarque. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Rappelons que l'on peut munir l'espace vectoriel quotient $\mathcal{A}/I$ d'une structure d'algèbre compatible avec celle de $\mathcal{A}$ ssi I est un idéal bilatère. Une algèbre $\mathcal{A}$ dont les seuls idéaux bilatères sont triviaux ($\{0\}$ et $\mathcal{A}$) est dite *simple*. La terminologie est la même que pour les groupes *simples* (sans sous-groupes distingués non triviaux) car les conséquences sont identiques : l'étude des quotients ($\mathcal{A}$ et $\{0\}$) est triviale.

7 Centres de quelques sous-algèbres de M_n

Déterminer dans M_n le centre[6] *de la sous-algèbres formées des matrices :*

1. *quelconques ;*
2. *triangulaires (supérieures) ;*
3. *triangulaires (supérieures) strictes ;*
4. *diagonales.*

Solution proposée.

Il peut être utile de noter que les matrices scalaires commutent toujours avec[7] tout le monde. Lorsque $n = 1$, il n'y a que des (matrices) scalaires, et l'étude systématique des commutants devient triviale. On suppposera donc $n \geq 2$.

1. Soit A une matrice commutant avec tout le monde. C'est dire (par bilinéarité) qu'elle commute aux $E_{i,j}$, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} \forall i, j,\ \forall x, y,\ [AE_{i,j}]_{x,y} &= [E_{i,j}A]_{x,y} \\ \forall i, j, x, y,\ \sum_k [A]_{x,k} [E_{i,j}]_{k,y} &= \sum_k [E_{i,j}]_{x,k} [A]_{k,y} \\ \forall i, j, x, y,\ \delta_y^j a_{x,i} &= \delta_x^i a_{j,y}. \end{aligned}$$

Prendre $x \neq i$ (on peut car $n \geq 2$) et $y = j$ donne $a_{x,i} = 0$, ce qui montre que A est diagonale. Prendre $x = i$ et $y = j$ donne $a_{i,i} = a_{j,j}$, ce qui montre que A est scalaire, ce qui réciproquement convient.

2. Le même raisonnement restreint aux $E_{i,j}$ pour $i \leq j$ conduit aux mêmes conclusions : prendre $x \neq i$ et $y = j = n$ montre que A est diagonale et l'égalité $a_{i,i} = a_{j,j}$ valable pour $i \leq j$ signifie encore que A est constante sur sa diagonale.

3. On continue : prendre $x \neq i$ et $y = j = n > i$ donne $a_{x,i} = 0$, donc A est diagonale à l'exception peut-être de sa dernière colonne. Mais prendre $y \neq j$ et $x = i = 1 < j$ donne $a_{j,y} = 0$, donc A est diagonale à l'exception peut-être de sa première ligne. Par conséquent, A vaut une matrice diagonale plus un $\lambda E_{1,n}$. Enfin, l'égalité $a_{i,i} = a_{j,j}$ valable pour $i < j$ signifie encore la diagonale de A est constante. Réciproquement, $E_{1,n}$ n'intervient pas dans le calcul d'un produit contre une matrice triangulaire stricte, ce qui montre que le commutant de ces dernières est tout l'espace $\mathrm{Vect}\{E_{1,1}, ..., E_{n,n}, E_{1,n}\}$. On trouve autre chose que les matrices scalaires !

4. Les matrices diagonales étant engendrées par les $E_{i,i}$, une matrice A commmutera avec celles-ci ssi $AE_{i,i} = E_{i,i}A$ pour tout i, ce qui s'écrit

$$\forall i, x, y,\ \delta_y^i a_{x,i} = \delta_x^i a_{i,y}.$$

Prendre $x \neq i = y$ donne $a_{x,i} = 0$, ce qui montre que A est diagonale. Réciproquement, l'algèbres des matrices diagonales est commutative[8].

[6] Le *centre* d'une algèbre A est

$$Z(A) := \{z \in A,\ \forall a \in A,\ az = za\}.$$

[7] L'usage dans la langue mathématique est de dire « commuter à ».

[8] Elle est isomorphe à une algèbre produit K^a, voir la feuille suivante pour déterminer toutes les façons de « représenter » K^a dans $M_n(K)$.

8 Générateurs de l'algèbre M_n

1. *L'algèbre M_n peut-elle être monogène*[9] *?*
2. *Montrer que M_n est engendrée en tant qu'algèbre par les deux matrices J et ${}^tJ$ avec*

$$J := \sum_{1\leq i<n} E_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution proposée.

1. Une algèbre monogène est décrite comme l'ensemble des polynômes évalués en un même élément : elle est donc commutative, ce qui n'est pas le cas de M_n pour $n \geq 2$. Le cas $n = 1$ est trivial : $M_n(K)$ est réduite à K qui est évidemment engendrée par n'importe quel scalaire non nul.
2. Il suffit de montrer que les $E_{i,j}$ sont algébriquement engendrés par J et ${}^tJ$.

   Il est classique de calculer $J^k = \sum_{1\leq i\leq n-k} E_{i,i+k}$ (on « pousse » k fois vers le haut la diagonale de 1)[10]. En transposant, on trouve ${}^tJ^k = \sum_{1\leq j\leq n-k} E_{j+k,j}$. On peut donc calculer, pour $a, b \geq 0$, le produit de monômes

$$J^a\ {}^tJ^b = \sum_{1\leq i\leq n-a} E_{i,i+a} \sum_{1\leq j\leq n-b} E_{j+b,j} = \sum_{\substack{a<i+a\leq n \\ b<j+b\leq n}} \delta_{j+b}^{i+a} E_{i,j}.$$

   Pour réaliser l'égalité $i + a = j + b$, il faut faire attention aux indices. Si $a \leq b$, pour $b < j + b \leq n$ fixé, l'indice $i + a$ peut prendre la valeur $j + b$, donc il restera $\sum_{1\leq j\leq n-b} E_{j+b-a,j}$. Dans le cas $a \geq b$, c'est $j + b$ qui prendra la valeur $i + a$ et il restera $\sum_{1\leq i\leq n-a} E_{i,i+a-b}$.

   Dans les deux cas, on obtient une diagonale de 1 de longueur $n - a$ ou $n - b$ décalée $a - b$ fois vers le haut. Pour récupérer $E_{k,k+l}$, il suffit de prendre (pour $a - b = l$) deux telles diagonales dont les longueurs sont k et $k - 1$ (prendre $a = n - k$ et $n - k + 1$) ; par le calcul, cela s'écrit

$$E_{k,k+l} = \sum_{i\leq k} E_{i,i+l} - \sum_{i\leq k-1} E_{i,i+l} = J^{n-k}\ {}^tJ^{n-k-l} - J^{n-k}\ {}^tJ^{n-k-l}$$

   (les puissances de J et J' sont toutes positives puisque $k + l \leq n$).

9 Modulo le groupe linéaire, toute matrice est un projecteur

Soit A une matrice. Montrer qu'il existe une matrice inversible M telle que AM soit un projecteur.

Solution proposée.

Le problème portant sur des multiplications par des matrices inversibles, il est naturel de réduire $A = PJ_rQ$ où P et Q sont inversibles. On cherche M inversible telle que $(AM)^2 = AM$. Pour prendre le carré de PJ_rQ, on aimerait bien remplacer Q par P^{-1} – contrairement à la relation d'équivalance, la relation de similitude sur les matrices se comporte bien vis-à-vis des opérations polynomiales. Il suffit pour cela de poser $M = Q^{-1}P^{-1}$:

$$(AM)^2 = \left(PJ_rQQ^{-1}P^{-1}\right)^2 = \left(PJ_rP^{-1}\right)^2 = PJ_r^2P^{-1} = PJ_rP^{-1} = AM, \text{ CQFD.}$$

Remarque. Une autre démarche est de raisonner en terme d'endomorphismes. Soit u l'endomorphisme de $E = K^n$ canoniquement associé à A. On cherche $\varphi \in GL(E)$ tel que $u\varphi$ soit un projecteur (*cf.* exercices sur la dimension finie).

[9] Une structure est dite *monogène* lorsqu'elle est engendrée par un seul élément.
[10] faire $k = 0$ et $k = 1$ pour être sûr du décalage

J'encourage le lecteur à chercher une telle solution, tout en gardant à l'esprit que, même si l'on utilise deux formalismes différents, on fait *exactement* la même chose : tisser les parallèles entre les deux démarches ne peut être que formateur.

Les deux chemins sont souvent possibles : la voie endomorphismes est un peu plus conceptuelle mais naturelle, tandis que la démarche matricielle est plus du ressort du jeu et de l'astuce. Il faut pouvoir sentir quelle démarche est plus adaptée au problème posé et savoir au besoin mêler les deux... Et puis on peut aussi avoir ses préférences :-).

10 Modulo le groupe linéaire, les matrices non inversibles sont les nilpotentes

Soit A une matrice de M_n avec $n \geq 1$. Montrer que A est non inversible ssi il existe une matrice inversible M telle que AM soit nilpotente.

Solution proposée.

Tout comme le problème précédent, il est naturel de réduire $A = PN_rQ$ où N_r est une matrice nilpotente de même rang que A, par exemple r scalaires 1 au-dessus de la diagonale, ce qui conclut le sens direct (prendre $M = Q^{-1}P^{-1}$).

Pour la réciproque, si AM est nilpotente, elle n'est pas inversible (car $n > 0$), donc A n'est pas inversible (puisque M l'est).

Remarque. Comme pour l'exercice précédent, une démarche en terme d'endomorphismes serait parfaitement valable (*cf.* feuille sur la dimension finie) et je ne peux que conseiller de comparer les deux chemins pour voir en quoi ils sont « moralement » complètement identiques.

11 Modulo conjugaison, les nilpotentes sont les triangulaires strictes

1. *Que vaut la trace d'une matrice nilpotente ?*
2. *Soit A nilpotente dans M_n. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire stricte.*

Solution proposée.

1. Sur des exemples simples de nilpotents, à savoir les matrices triangulaires strictes, on voit que la trace est nulle. Montrons cela pour tous les nilpotents de M_n par récurrence sur n.

   Pour $n = 0$, c'est tautologique.

   Soit $n \geq 1$ et A nilpotente de M_n. Pour récurrer, on va mettre des zéros sur les premières colonnes de A. Pour ce faire, on remarque que $\operatorname{Ker} A$ n'est pas le sev nul (sinon A serait inversible et d'une égalité $A^p = 0$ l'on déduirait $A = 0$ qui n'est pas inversible pour $n \geq 1$), donc, en regardant la matrice de A dans une base adaptée à une décomposition $K^n = \operatorname{Ker} A \oplus S$, on obtient

   $$A \sim \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ où } A' \in M_k \text{ pour un } k < n.$$

   Puisque A est nilpotente, le calcul par blocs montre que A' l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, il y a une matrice de passage P telle que $B = PCP^{-1}$ avec C de trace nulle. On en déduit

   $$A \sim \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & PCP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ? \\ & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & ? \\ & T \end{pmatrix}$$

   dont la trace vaut $0 + \operatorname{tr} T = 0$, *CQFD.*
2. Il suffit de reprendre la démonstration ci-dessus en remplaçant « de trace nulle » par « triangulaire stricte ».

12 Une généralisation des classes d'équivalence

On définit un préordre[11] $\sqsubset$ sur M_n par

$$A \sqsubset B \iff (\exists U, V \in M_n,\ A = UBV).$$

Montrer l'équivalence suivante pour A et B dans M_n :

$$A \sqsubset B \iff \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} B.$$

Solution proposée.
Le sens direct est immédiat : si A s'écrit UBV, alors $\operatorname{rg} UBV \leq \operatorname{rg} UB \leq \operatorname{rg} B$.
Pour la réciproque, on observera l'équivalence

$$A \sqsubset B \iff A' \sqsubset B'$$

dès que A et A' sont équivalentes ainsi que B et B'. En effet, il suffit de montrer un seul sens par symétrie de la relation « être équivalent » sur M_n, ce qui est aisé :

$$\left.\begin{array}{l} A = UBV \\ A' = PAQ \\ B' = RBS \end{array}\right\} \implies A' = PAQ = PUBVQ = \left(PUR^{-1}\right) B' \left(S^{-1}VQ\right) \sqsubset B'.$$

Supposons à présent $\operatorname{rg} A =: a \leq b := \operatorname{rg} B$. On veut $A \sqsubset B$, ce qui équivaut par ce qui précède à $J_a \sqsubset J_b$, ce qui est immédiat en écrivant $J_a = J_a J_b \sqsubset J_b$.

Remarque. Exercice à refaire avec des endomorphismes, sans matrices !

13 Pourquoi la structure vectorielle du groupe linéaire n'est pas passionante

Montrer que le groupe linéaire suffit à engendrer linéairement toutes les matrices. En d'autres termes :

$$\operatorname{Vect} GL_n = M_n.$$

Attention aux pathologies du corps de base...

Solution proposée.
Soit une matrice A que l'on cherche à écrire comme combinaison linéaire de matrices inversibles. On commence déjà par simplifier le problème en écrivant $A = PJ_rQ$ avec P et Q inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \operatorname{rg} A$. Le problème revient maintenant à montrer que le groupe linéaire engendre tous les J_r. Cela n'est pas bien difficile, écrire par exemple

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci ne marche que si $2 \neq 0$.
Pour y remédier, écrivons

$$\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-a) I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

où a est un scalaire différent de 0 et 1 ; ceci sera possible si K au moins trois éléments.

[11] relation réflexive et transitive

Dans le cas contraire, *i. e.* si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on est sauvé grâce aux matrices de permutation (qui marchent d'ailleurs pour n'importe quel corps K) :

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Pour voir que les deux matrices ci-dessus sont inversibles, on se ramène à celle de droite (qui est clairement de rang n) en tuant tous les 1 de la (grande) diagonale de celle de gauche par opération sur les lignes $L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = r, r-1, ..., 1$. Le seul 1 que l'on ne pourrait pas éliminer de la sorte serait le 1 tout en bas à droite, mais alors $r = n$ et $J_r = 1$ serait déjà un isomorphisme.

Remarque. Si l'on ne connaît pas l'équivalence de toute matrice avec un J_r, on peut s'en sortir autrement. En effet, pour montrer $\operatorname{Vect} GL_n = M_n$, il suffit de montrer que $\operatorname{Vect} GL_n$ contient les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Lorsque $i \neq j$, il suffit d'écrit $E_{i,j}$ comme différence de la transvection $1 + E_{i,j}$ et de l'identité 1. Lorsque $i = j$, on ruse en remplaçant 1 par la matrice cyclique $J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}$, de sorte que $E_{i,i} = (J + E_{i,i}) - J$. Pour voir que $J + E_{i,i}$ est inversible, on peut par exemple voir que les colonnes de $J + E_{i,i}$ sont génératrices : le Vect de la colonne de $J + E_{i,i}$ contenant deux 1 et d'une colonne voisine est le même[12] que celui des deux mêmes colonnes de J, donc le Vect de toutes les colonnes de $J + E_{i,i}$ vaut celui de celles de J, à savoir tout K^n, ce qui conclut.

14 Sous-espace engendré par les projecteurs, les nilpotents

1. *Montrer que M_n possède une base formée de projecteurs. Explicter une telle base.*
2. *Quel est le sev engendré par les matrices nilpotentes ?*

Solution proposée.

1. Il suffit de trouver une famille génératrice de projecteurs. Pour cela, il suffit de montrer que les $E_{i,j}$ sont tous combinaisons linéaires de projecteurs.

   Commençons par exhiber des exemples simples de projecteurs : les $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (donc les $E_{i,i}$), mais également les $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout λ. En particulier, $E_{i,i} + E_{i,j}$ est un projecteur (pour $i \neq j$), ce que l'on peut vérifier par le calcul :

$$\begin{aligned} (E_{i,i} + E_{i,j})^2 &= E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,i} + E_{i,j}^2 \\ &= E_{i,i} + E_{i,j} + 0 + 0. \end{aligned}$$

   On en déduit que les $E_{i,j}$ pour $i \neq j$ sont différences de deux projecteurs, *CQFD*.

   Vu le cardinal des familles considérées, on a directement une base de projecteurs :

$$E_{i,i} + \left(1 - \delta_i^j\right) E_{i,j} \text{ pour } i, j = 1, ..., n.$$

[12] Il s'agit juste de voir que

$$\operatorname{Vect}\left\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\} = \operatorname{Vect}\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}.$$

2. Les $E_{i,j}$ pour $i \neq j$ étant de carré nul, ce sont des nilpotents. Ces derniers étant libres, le Vect cherché est de dimension $\geq n^2 - n$

Il semble difficile de récupérer les $E_{i,i}$ sans autre coefficient sur la diagonale. Pour pallier ce problème, on va conjuguer[13] un $E_{i,j}$ nilpotent. Pour faire simple, on regarde le cas où l'on conjugue par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & a \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}.$$

Prendre $a = c = 1$ donne $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Revenant à n quelconque, le calcul par blocs nous dit que la matrice $\begin{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de carré nul donc nilpotente ; en réordonnant la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de K^n en $(e_i, e_j, ...)$, on obtient les nilpotents[14] $E_{i,j} + E_{j,j} - E_{i,i} - E_{j,i}$ pour $i \neq j$. En retirant les $E_{k,l}$ pour $k \neq l$, on récupère ainsi dans le Vect cherché les $E_{i,i} - E_{j,j}$, ce qui rajoute (en fixant $i = 1$ par exemple) $n - 1$ vecteurs non liés aux $(E_{i,j})_{i \neq j}$.

On ne peut pas faire mieux : en effet, les nilpotents sont tous de trace nulle[15], donc les éléments de leur Vect aussi, donc ce dernier est contenu dans l'hyperplan $\mathrm{tr}^{-1}(\{0\})$ des matrices de trace nulle. Ce qui précède montre, en prenant les dimensions, qu'il y a égalité.

15 Tout hyperplan de M_n intersecte GL_n

Soit n un entier ≥ 2. Montrer que tout hyperplan de M_n intersecte GL_n.

Solution proposée.

Un hyperplan étant le noyau d'une forme linéaire φ non nulle, on cherche une matrice inversible A telle que $\varphi(A) = 0$. Cherchons A inversible sur une forme simple, disons très proche de l'identité, par exemple une matrice de transvection.

Puisque φ est non nulle, il y a un couple (i, j) pour lequel $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$, et il suffit de considérer la matrice

$$A = 1 - \frac{\varphi(1)}{\varphi(E_{i,j})} E_{i,j}$$

qui est clairement dans le noyau de φ. Le problème sera donc réglé si on peut trouver des indices $i \neq j$ tels que $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$, car A sera alors une transvection donc inversible.

Supposons à présent $\varphi(E_{i,j}) = 0$ pour tous $i \neq j$. Toujours parce que $\varphi \neq 0$, on peut trouver un indice i tel que $\varphi(E_{i,i}) \neq 0$, et l'on regarde la matrice

$$A = 1 - \frac{\varphi(1)}{\varphi(E_{i,i})} E_{i,i}.$$

A est inversible ssi $1 - \frac{\varphi(1)}{\varphi(E_{i,i})} \neq 0$, donc le problème sera résolu s'il y a un i tel que $\varphi(E_{i,i}) \neq \varphi(1)$.

Dans le cas contraire, *i. e.* $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(1) =: \lambda$ pour tout i, φ vaut $\lambda\,\mathrm{tr}$ et il suffit de trouver une matrice inversible de trace nulle. On essaie naturellement des matrices diagonales du type $\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & -(n-1) \end{pmatrix}$, mais il se peut que $n = 1$ dans le corps K. On contourne cette difficulté en prenant une matrice avec que des 0 sur la diagonale, par exemple la matrice de permutation $\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 1 & \end{pmatrix}$.

Remarque. Pour $n = 1$, l'unique hyperplan de $M_1(K) \simeq K$ est le sev trivial $\{0\}$, qui évidemment ne contient aucune matrice inversible.

[13] Un endomorphisme « simple » peut avoir des matrices « compliquées » dans certaines bases tordues ; trouver une telle base revient à trouver une « bonne » matrice de passage.

[14] Les calculateurs pourront s'amuser à écrire les seize termes du développement.

[15] *cf.* exercice 9

On aurait également pu donner une solution de cet exercice en utilisant deux résultats de la feuille présente. φ étant une forme linéaire sur M_n, elle s'écrit $\mathrm{tr}\,(A\cdot)$ pour une certaine matrice A (*cf.* exo 2). On cherche donc une matrice P inversible telle que $\mathrm{tr}\,(AP) = 0$. Si A n'est pas inversible, elle vaut un nilpotent modulo le groupe linéaire (*cf.* exo 8), et les nilpotents étant de trace nulle on a le résultat. Si A est inversible, il suffit de poser $P = A^{-1}Q$ où Q est inversible de trace nulle, et on termine comme dans la première solution.

Une autre formulation de cet exercice est la suivante : la dimension maximale d'un sev de M_n ne contenant aucune matrice inversible est $< n^2 - 1$. En fait, la dimension maximale est $n\,(n-1)$: le lecteur est encouragé à chercher la généralisation suivante (*cf.* la feuille suivante) : tout sev de M_n formé de matrices de rang $\leq r$ est de dimension $\leq rn$.

16 Sous-matrices et serpents nuls

Fixons une matrice $A \in M_n$. On appelle *serpent*[16] associé à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ le produit

$$S_\sigma := a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

1. *Montrer que les serpents de A sont tous nuls ssi A contient une sous-matrice nulle (non vide) de taille $p \times q$ avec $p + q > n$.*
2. *Montrer que, si A est bistochastique*[17]*, alors A contient un serpent non nul.*

Solution proposée.

1. Noter tout de suite que chacun des deux énoncés (dont on veut montrer l'équivalence) est invariant par permutation arbitraire de lignes ou de colonnes.

   Le sens $\Longleftarrow$ est aisé. Soient p et q de somme $> n$ tels que $\forall\,(i,j) \in I \times J$, $a_{i,j} = 0$ avec $\left\{ \begin{array}{l} I := \{1, ..., p\} \\ J := \{1, ..., q\} \end{array} \right.$. Alors, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'ensemble $\sigma\,(I)$ rencontre J puisque la somme de leurs cardinaux est $> n$, d'où un $a_{i,\sigma(i)}$ nul dans S_σ, *CQFD*.

   Pour le sens $\Longleftarrow$, on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, tout est clair.

   Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n$ dont tous les serpents sont nuls. Si A est nulle, il n'y a rien à faire. Sinon, quitte à permuter lignes et colonnes, on peut supposer $a_{1,1} \neq 0$. Notons A' la matrice obtenue en privant A de ses premières ligne et colonne. Considérons S un serpent de A'. En lui rajoutant $a_{1,1}$, on obtient un serpent de A, lequel doit être nul. Puisque le $a_{1,1}$ rajouté est non nul, c'est que S était déjà nul. Ainsi, par hypothèse de récurrence, A' contient une sous-matrice nulle de taille $p \times q$ avec $p + q \geq n$. Quitte à permuter lignes et colonnes, on peut envoyer ce paquets de zéros en bas à gauche de A, de sorte que cette dernière s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} P & V \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ avec $(P, Q) \in M_p \times M_q$.

   Pour conclure, il suffit de montrer que P a une ligne nulle ou que Q a une colonne nulle. Mieux : il suffit d'extraire de P une matrice nulle de taille $x \times y$ avec $x + y > p$, car on en déduira alors une sous-matrice nulle de A de taille $(x + q) \times y$ avec $x + q + y > p + q \geq n$; il suffit également d'extraire de Q une matrice nulle de taille $x \times y$ avec $x + y > q$. Si ce n'était pas possible, par hypothèse de récurrence P et Q contiendraient chacune un serpent non nul, mais en réunissant ces derniers on obtiendrait un serpent de A non nul, *contradiction*.
2. La question précédente invite à raisonner par l'absurde. Quitte à permuter ligne et colonne, ce qui ne change pas la somme commune sur les ligne et les colonnes, on peut supposer notre matrice bistochastique de la forme $\begin{pmatrix} P & V \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ avec $(P, Q) \in M_p \times M_q$ et $p + q > n$. Mais alors la somme sur chaque colonne de

[16] Prendre son crayon, cocher les facteurs du produit S_σ dans la matrice puis relier deux facteurs consécutifs par un trait : que dessine-t-on ? On voit ainsi que le déterminant

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon\,(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

est la somme alternée de tous les serpents, ce qu'exprime exactement la règle de Sarrus.

[17] Une matrice réelle est *bistochastique* lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme sur chaque ligne et chaque colonne fait 1.

P vaut 1, donc la somme des coefficients de P vaut p et de même la somme des coefficients de Q vaut q. On en déduit que la somme n des coefficients de notre matrice bistochastique vaut au moins $p+q$, ce qui est impossible.

Remarque. Ce résultat est attribué à Frobenius (1912) et König (1915). Il montre que l'infimum du permanent[18] sur le corps convexe[19] B_n des matrices bistochastiques[20] est strictement positif. On a montré beaucoup plus tard (1981) que ce minimum vaut $\frac{n!}{n^n}$ et n'est atteint qu'en la matrice dont tous les coefficients valent $\frac{1}{n}$. Le lecteur intéressé par une preuve de ce résultat pourra consulter le joli problème posé aux ÉNS Lyon-Cachan en 1996.

17 Matrices et arithmétique

1. *Soit $\{A_1, ..., A_k\}$ un ensemble de k matrices de M_n inversibles stable par multiplication. Montrer que k divise $\operatorname{tr}(A_1 + \cdots + A_k)$ (on pourra évaluer le carré de $A_1 + \cdots + A_k$).*
2. *Déterminer l'entier $\frac{1}{k} \operatorname{tr} \sum_{i=1}^k A_i$ en fonction de l'ensemble F des points de K^n fixes par tous les A_i. On introduira le projecteur $\pi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_i$ et on montrera que $F = \operatorname{Im} \pi$.*

Solution proposée.

1. Au vu des hypothèses, on ne doit n'avoir qu'une envie : montrer que $G = \{A_1, ..., A_k\}$ est un groupe. On sait déjà que G est stable par multiplication, donc on peut définir les translations τ_i : $\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ M & \longmapsto & MA_i \end{array} \right.$, qui sont injectives car les A_i sont inversibles, donc surjectives par finititude de G, donc A_i est atteint, mettons $MA_i = A_i$, d'où $1 = M \in G$ (le seul point non trivial à vérifier). Ensuite, 1 est atteit par τ_i, disons $MA_i = 1$, d'où $A_i^{-1} = M \in G$, ce qui montre que G est stable par inverse. G est donc bien un groupe.
2. Calculons comme suggéré le carré de $S = \sum_{i=1}^k A_i$:

$$S^2 = \left(\sum_{A \in G} A \right) \left(\sum_{B \in G} B \right) = \sum_{A \in G} \sum_{B \in G} AB = \sum_{A \in G} \sum_{C \in AG = G} C = \sum_{C \in G} \sum_{A \in G} C = \sum_{C \in G} kC = kS,$$

de sorte que $\frac{S}{k}$ est un projecteur, dont on connaît la trace : c'est son rang, donc un entier r, ce qui s'écrit $\operatorname{tr} \frac{S}{k} = r$, d'où $\operatorname{tr} S = kr \in k\mathbb{N}$ et le résultat.

Pour mieux comprendre d'où vient cette relation de divisibilité, introduisons (dans K^n) le projecteur $\pi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_i$. On vient de montrer que $\pi^2 = \pi$. On dispose de la propriété immédiate :

$$A_i \pi = \frac{1}{k} \sum_{A \in G} A_i A = \frac{1}{k} \sum_{B \in A_i G = G} B = \frac{1}{k} \sum_{B \in G} B = \pi.$$

Ainsi, tout élément de $\operatorname{Im} \pi$ est fixe par tous les A_i, d'où $\operatorname{Im} \pi \subset F$. Réciproquement, si x est fixe par tous les A_i, alors

$$\pi(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_i x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x = x$$

d'où $x = \pi(x) \in \operatorname{Im} \pi$. On a donc l'inclusion réciproque $F \subset \operatorname{Im} \pi$.

---

[18] Le *permanent* d'une matrice A est défini par

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Il s'agit d'un déterminant sans considérations de signes, ce qui perd beaucoup de son intérêt mais soulève toutefois des questions intéressantes.

[19] Un *corps convexe* d'un espace vectoriel normé désigne tout compact convexe. (On impose parfois qu'il soit également d'intérieur non vide.)

[20] qui est atteint par compacité de B_n et par continuité du permanent

Pour conclure, on remarque que le r cherché est le rang de π, *i. e.* la dimension de son image, donc la dimension de F :

$$\frac{1}{k}\operatorname{tr}\sum_{i=1}^{k} A_i = \dim F.$$

Remarque. Un groupe fini G d'endomorphismes étant donné, le projecteur $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$ est un outil redoutable pour envoyer des combinaisons linéaires dans l'espace des points fixes par G. Une idée très fructueuse en théorie des groupes.