Divers

Marc SAGE

Table des matières

1 une généralisaion de Grassmann

Soient A, B, C, D des sev d'un même ev E. Montrer que

$$\begin{aligned} & \dim(A+B)+\dim(A+C)+\dim(A+D)+\dim(B+C)+\dim(B+D) \\ \geq\ & \dim A+\dim B+\dim(C+D)+\dim(A+B+C)+\dim(A+B+D) \end{aligned}$$

2 Inégalités de Frobenius

For any matrices A, B, C such that ABC exists, then

$$\operatorname{rg} AB+\operatorname{rg} BC \leq \operatorname{rg} ABC+\operatorname{rg} B.$$

se réécrit

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} AB-\operatorname{rg} ABC & \leq \operatorname{rg} B-\operatorname{rg} BC, \text{ ied} \\ \dim\left({}^{\operatorname{Im} AB}\!\big/_{\operatorname{Im} ABC}\right) & \leq \dim\left({}^{\operatorname{Im} B}\!\big/_{\operatorname{Im} BC}\right). \end{aligned}$$

Or, A induit une surjectino $\operatorname{Im} B \twoheadrightarrow \operatorname{Im} AB$ qui passe au quotient ${}^{\operatorname{Im} AB}\!\big/_{\operatorname{Im} ABC} \twoheadrightarrow {}^{\operatorname{Im} B}\!\big/_{\operatorname{Im} BC}$.

Problème de sens ?

3 Une algèbre de Lie non nilpotente dont la forme de Killing est nulle

Let V be a 3-dimensional complex vector space with basis a, b, c.

There's a unique alternating bilinear form $[\cdot,\cdot]$ on V such that $[a,b]=b$, $[a,c]=ic$, $[b,c]=0$. The only non-trivial case of the Jacobi identity is [a[bc]] + [b[ac]] + [c[ab]] = 0, which follows since each of the three terms vanishes individually. Hence V is a Lie algebra.

Let $*$ be the Killing form. Now, $[V,V]=\langle b,c\rangle$ which is abelian, so for any x, y, $[b,[x,y]]=[c,[x,y]]=0$, so $\operatorname{ad}_b \operatorname{ad}_x=\operatorname{ad}_c \operatorname{ad}_x=0$, so $b*x=c*x=0$. Also, $a*a=\operatorname{tr} \operatorname{ad}_a^2=\operatorname{tr} \operatorname{Diag}(0,1,i)^2=\operatorname{tr}(0,1,-1)=0$, so $*$ vanishes.

Finally, V is not nilpotent. Eg. it has trival centre (since $\operatorname{Ker} \operatorname{ad}_a=\langle a\rangle$, $\operatorname{Ker} \operatorname{ad}_b=\operatorname{Ker} \operatorname{ad}_c=\langle b,c\rangle$, so the kernel of the adjoint representation is trivial). Hence the lower central series is identically zero. Alternatively, observe that the $[V,V]=\langle b,c\rangle$ and $[V,\langle b,c\rangle]=\langle b,c\rangle$, so the upper central series stabilises at $\langle b,c\rangle$.

4 Combi sur matrices d'incidences ?

Soit $n>k\geq 1$ fixé, $N:=\{1,2,...,n\}$, $S(k)=\{\text{parties de } N \text{ à } k \text{ éléments}\}$ ordoné arbitrairement en $\{L_1,...,L_m\}$ avec $m:=\binom{n}{k}$.

Soit A la matrice $m\times n$ définie par $a_{i,j}=\chi_{L_i}(j)$. Montrer que $\operatorname{rg} A=n$

Soit $x\in \operatorname{Ker} A$. Alors x vérifie $\sum_{j\in L} x_j=0$ pour tout $L\in S(k)$.

Pour tout couple (i,j), il y a un partie B dans $S(k-1)$ disjointe de $\{i,j\}$

Puisque $\sum_{k\in B\cup\{i\}} x_k=\sum_{k\in B\cup\{j\}} x_k=0$, on trouve $x_i=x_j$, donc $x\in K(1,...,1)$

Mais $A(1,...,1)=(k,...,k)$, d'où $x=0$.

5 Matrice semblable à sa transposée sur un anneau

la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ des petites considérations arithmétiques assez évidentes (le point clé est que 7 et 2 sont premiers entre eux et que ni $2^2 - 1$ ni $2^2 + 1$ n'est un multiple de 7) devraient montré qu'effectivement cette matrice M n'est pas semblable à sa transposée $M\prime$ par une matrice P dans $GL_2(\mathbb{Z})$.

Oui. Pour préciser les choses, je pose $M = \begin{pmatrix} n & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où n et m sont deux nombres entiers non nuls (et premiers entre eux).

En tant que matrice à coefficients rationnels, M et sa transposée sont conjuguées par des éléments de $GL_2(Q)$, on peut tous les déterminer et se poser ensuite la question de savoir si parmi ces matrices, il y en a dans $GL_2(\mathbb{Z})$

Les espaces propres de M sont E_n, engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et E_0 engendré par $\begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix}$, les espaces propres de la transposée de M sont E'_n engendré par $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ et E'_0 engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit les deux matrices suivantes $F_n = \begin{pmatrix} n^2 & mn \\ mn & m^2 \end{pmatrix}$ et $F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $F_n(E_n) = E'_n$, $F_n(E_0) = 0$, et $F_0(E_n) = 0$, $F_0(E_0) = E'_0$, à partir de ce moment-là, il est clair que toute matrice inversible g dans $GL_2(Q)$ telle que $gMg^{-1} = {}^tM$ est de la forme $g = aF_n + bF_0$ pour deux nombres rationnels non nuls a et b. M et sa transposée sont donc conjuguées par un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement s'il existe deux nombres rationnels a et b tels que $\begin{pmatrix} an^2 & amn \\ amn & am^2 + b \end{pmatrix}$ appartiennent à $GL_2(\mathbb{Z})$. Supposons maintenant que m et n sont deux nombres premiers distincts. Pour que la première colonne soit formée d'entiers premiers entre eux, on a forcément $an = 1$ ou $an = -1$. Quitte à changer (a, b) en $(-a, -b)$, on peut supposer $an = 1$. On examine alors la deuxième colonne, elle vaut $\left(m, \frac{m^2}{n} + b\right)$. Pour obtenir une matrice à coefficients entiers, il faut que b soit de la forme $b = k - \frac{m^2}{n}$ avec k un entier, on se demande alors s'il existe un entier k tel que la matrice suivante ait un déterminant égal à 1 ou -1 : $\begin{pmatrix} n & m \\ m & k \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $kn - m^2$. Bref, M et sa transposée sont conjuguées par un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $m^2 \pm 1$ est un multiple de n, ce qui est bien la condition que tu évoquais.

6 CAyley Hamilton

soit A un anneau commutatif, M une matrice (n, n) à coefficients dans A. M a un polynôme caractéristique χ_M, le théorème de Cayley-Hamilton dit que $\chi_M(M) = 0$. On peut considérer la situation universelle : ajoutons n^2 indéterminées $M_{i,j}$ à l'anneau $\mathbb{Z}$, la situation précédente (un anneau A, une matrice n^2) correspond exactement à un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[M_{ij}] -> A$. Si on est capable de prouver le théorème de Cayley-Hamilton pour la matrice $(M_{i,j})$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[M_{ij}]$, alors on peut déduire le théorème pour une matrice quelconque à coefficients dans n'importe quel anneau.

[Après, pour prouver le théorème vraiment, tous les moyens sont bons : $\mathbb{Z}[M_{i,j}] -> \mathbb{C}[M_{i,j}]$ est injective, de plus, $\mathbb{C}[M_{i,j}]$ s'injecte dans l'ensemble des fonctions $\mathbb{C}^{n^2} -> \mathbb{C}$, on se ramène à montrer le théorème de Cayley-Hamilton pour des matrices M dans $M_n(\mathbb{C})$ (et là, on peut utiliser une trigonalisation [ou carrément considérer des matrices diagonalisables, qui forment une partie dense...])]

7 Endomorphismes semi simples

On rappelle qu'un endomorphisme u d'un k-espace vectoriel de dimension finie E est dit *semisimple* lorsque tout sous-espace vectoriel stable par u (i.e. "sous-$k[u]$-module") de E admet un supplémentaire de même.

Cela équivaut (via la réduction de Frobenius, c'est-à-dire la décomposition en sous-espaces cycliques) à dire que le polynôme minimal de u n'a que des multiplicités 1 dans sa décomposition en facteurs irréductibles.

Sur un corps k algébriquement clos, cela équivaut à dire que u a un polynôme minimal à racines simples, i.e., que u est diagonalisable.

Lorsque k est parfait, « semisimple » équivaut même à « diagonalisable sur la clôture algébrique ». Attention cependant : si k n'est pas parfait, il existe des endomorphismes semisimples qui ne deviennent pas diagonalisables sur la clôture algébrique (contre-exemple : si P est n'importe quel polynôme irréductible non séparable sur k, alors la multiplication u par t dans $k[t]/(P)$ admet P pour polynôme minimal, elle est donc semisimple sur k, mais quand on passe à la clôture algébrique on voit qu'elle ne l'est plus, et d'ailleurs, si a est la racine de P, $u - a$ est nilpotent).

Si k est un corps algébriquement clos, il est notoire (ça se voit même en prépa) que tout endomorphisme u (d'un k-espace vectoriel de dimension finie) s'écrit de façon unique comme somme $u_s + u_n$ d'un endomorphisme u_s diagonalisable et d'un endomorphisme u_n nilpotent qui commutent. Je remplace « diagonalisable » par « semisimple » dans cette affirmation : c'est vrai pour k un corps algébriquement clos et, comme les propriétés d'être diagonalisable ou semisimple sont préservées par passage à une extension séparable, l'unicité de la décomposition et la théorie de Galois assurent que c'est vrai pour k n'importe quel corps parfait (en effet, je fais la décomposition sur k, elle est invariante par Galois en raison de l'unicité, donc elle existe sur k).

On est alors tenté de se demander si cette décomposition $u_s + u_n$ existe encore, et est unique si elle existe, sur un corps k qui n'est pas parfait.

Voici un contre-exemple à l'existence :

Soit $k = \mathbb{F}_2(a)$ l'extension du corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$ par un transcendant a. Et soit $P(t) = t^2 + a$, polynôme irréductible inséparable sur k. On a $P(t)^2 = t^4 + a^2$. J'appelle $E = k[t]/(P(t)^2)$ et u la multiplication par t. Tout endomorphisme v de E comme k-espace vectoriel qui commute à u s'écrit comme $h(u)$ pour h un certain polynôme de degré < 4 (qui n'est autre que $v(1)$, comme ça c'est évident). Pour que v soit nilpotent, il faut que h ait un facteur commun avec P^2, qui ne peut être que P, autrement dit, il faut et il suffit que v s'écrive $(c + du)P(u)$ avec c et d dans k. Alors $w = u + v$ vérifie $w^2 = u^2$ puisque $v^2 = 0$ (je rappelle que k est de caractéristique 2...). Donc $P(w) = w^2 + a$ n'est pas nul ; en revanche, $P(w)^2 = 0$. Donc P^2 est le polynôme minimal de w, donc w n'est pas semisimple. J'ai donc prouvé qu'il n'existe aucune décomposition $u = v + w$ avec v nilpotent et w semisimple qui commutent (donc commutent à u...).

(En revanche, j'ai l'impression que lorsqu'il y a existence, il y a unicité : en gros, sur tous les facteurs de Frobenius qui correspondent à un polynôme inséparable comme je viens de le présenter, l'existence imposera de toute façon que la multiplicité soit 1 et que le nilpotent soit nul. Je n'ai pas vérifié bien soigneusement.)

* Y a-t-il un truc canonique qui tienne lieu de la décomposition semisimple + nilpotent pour un corps imparfait ?

8 compter des matrices nilpotentes

Apres avoir posé ce problème a plusieurs personnes sans solution pour l'instant, je me decide a poster... Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini, $A = M_n(F_q)$ les matrices $n \times n$ sur F_q ; la question porte sur le nombre de matices de A nilpotentes. On peut mener le calcul de la manière suivante : on sait que toute matrice nilpotentes est conjuguee a une matrice de jordan, en calculant le centralisateur de chacune de ces matrices de jordan dans GL_n, on peut donc calculer cette abominable somme et on trouve... q^{n^2-n} ce qui est assez surprenant. La densite des matrices nilpotentes est donc $\frac{1}{q^n}$, la question est de trouver un argument simple qui redonne le resultat.

Il y a plusieurs pistes qui ne marchent pas : si on change de polynome caracteristique (ici X^n), la densite n'est pas $\frac{1}{q^n}$ (ex les matrices inversibles n'ont pas une densite de $1 - \frac{1}{q}$), si on cherche un groupe à q^n éléments agissant sans points fixe sur A et dont chaque orbite ne contiendrait aucune nilpotente, les matrices diagonales ne marchent (clairement) pas (actions $D, M- > D + M$), pas plus qu'un sous-corps maximal de A, pour la meme action (on s'en convainc par exemple avec $n = 2$).

9 inj et surj d'endo sur les anneaux

cf. leçon d'Olivier Benoist, et

Pourquoi $\det B \mid 0 => B$ non injective (où B est une matrice à valeurs dans un anneau).

Tu développes le déterminant de la matrice B par rapport à sa première ligne : tu obtiens $c_1 b_{1,1} + c_2 b_{1,2} + ... + c_n b_{1,n} = \det B$ où les c_j sont au signe près les déterminants des mineurs par rapport à la première ligne. Comme $\det B$ est diviseur de zéro, il existe $a \neq 0$ tel que $ac_1 b_{1,1} + ac_2 b_{1,2} + ... + ac_n b_{1,n} = 0$.

Mais par ailleurs on a $c_1 b_{i,1} + c_2 b_{i,2} + ... + c_n b_{i,n} = 0$ pour tout i autre que 1 : ça c'est parce que c'est le développement par rapport à la première ligne du déterminant de la matrice $B\prime$ obtenue en remplaçant la première ligne de B par une copie de la i-ième, et cette matrice $B\prime$ est trivialement liée (elle a deux lignes égales).

Bref, pour tout i, on en déduit $ac_1 b_{i,1} + ac_2 b_{i,2} + ... + ac_n b_{i,n} = 0$, c'est-à-dire que le vecteur $(ac_1, ..., ac_n)$ est annulé par la matrice B. Si ce vecteur est non nul, on a fini. Sinon, on a trouvé un a qui annule les déterminants de tous les mineurs gnagnagna et on conclut par une récurrence soigneusement posée sur la taille de la matrice (que je te laisse la peine d'écrire proprement).

10 Cardinalité des bases

Soit M un A-module libre. Soient $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ des bases de M.
Est-il alors vrai que $|I| = |J|$?
Ou de maniere equivalente, $\left|A^{(I)}\right| = \left|A^{(J)}\right|$ implique $|I| = |J|$?

Je pense que Sylvain entendait par « base » une famille libre et génératrice et pas une famille génératrice minimale comme on l'entend parfois et comme c'est le cas dans ton exemple.

Si l'anneau A est commutatif, la réponse est oui : si $A^{(I)}$ est isomorphe à $A^{(J)}$, en prenant pour $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A on a $(A/\mathfrak{m})^{(I)}$ isomorphe à $(A/\mathfrak{m})^{(J)}$ comme $(A/\mathfrak{m})$-espace vectoriel donc I et J ont même cardinal (fini ou infini).

À présent, si k est un corps (pas forcément commutatif, il me semble), on peut exprimer chaque f_j comme une combinaison linéaire d'un nombre fini des e_i, et pour un même ensemble fini des e_i il n'y a qu'un nombre fini des f_j qui puissent intervenir s'exprimer comme combinaison d'eux (sinon un f_j est lié aux autrse). Donc on a une application de J vers l'ensemble des parties finies de I telle que chaque fibre ait un cardinal fini ; or si I est infini l'ensemble des parties finies de I a le même cardinal que I, et on en déduit que J a un cardinal inférieur ou égal à celui de I (fois $\aleph_0$, ce qui ne change rien). Et inversement, I a un cardinal inférieur ou égal à celui de J.

11 lci dans ev

j'ai un ev de dimension finie E, et dessus une lci bilinéaire associative. je suppose que il n'y a pas d'unite a droite. Est-il vrai qu'alors, $\exists x \in E$ tel que la multiplication a gauche par x est nulle ou la mul a droite par x est nulle ?

C'est vrai si E est nul (car une loi sans unité à droite n'existe alors pas), et c'est faux sinon. Prends par exemple la loi x*y=u, où u est un vecteur constant non nul. Mais je crois que tu as oublié une hypothèse de compatibilité entre ta loi et la structure d'ev (sinon, ça servirait à quoi de dire que E est un ev ?)...

Application au produit vectoriel...

12 valeur propre de matrices symétriques

montrer que la matrice $S := \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 1 & & & \\ 1 & a_2 - 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & a_{n-1} - 2 & 1 \\ & & & 1 & a_n - 1 \end{pmatrix}$ a un vp ≥ 0 sachant que les a_i sont des réels ≥ 0.

Soit $X = (1, ..., 1)$. On a $SX = (a_1, ..., a_n)$, d'où $\langle SX, X\rangle = \sum a_i \geq 0$, qui serait < 0 si toute les vp de S (qui est diagoz) étiet < 0.

13 une série convergente

On a une application $f : A^2 \longrightarrow R^{++}$ où A est fini (et $0 \in A$) tq $f(a, a) < 1$.
Notons F la matrice $(f(a, b))_{a,b \in A}$
Montrer que $\sum_{w \in A^{(\mathbb{N})}} \prod_{n \geq 0} f(w_n, w_{n+1})$ cv ssi $\rho(F) < 1$.

Soit $s_{l,a}$ la somme ci-dessus prise pour les mots w de longueur $l + 1$ commençant par a et S_l le vecteur correspondant. Alors $S_0 = (1, ..., 1)$ et

$$FS_l = S_{l+1}, \text{ d'où } S_l = F^l S_0 = F^l (1, ..., 1).$$

Si la somme converge, le TG de $\sum_{l \geq 0} \sum_a s_{l,a}$ (puisque F est a coef positifs) tend vers 0, donc tous les coef de $S_l = F^l S_0$ tendent vers 0, ce qui n'est possible que si $\rho(F) < 1$.

Reciproquement, si ce rayon est < 1, la somme $\sum_{l \geq 0} (1, ..., 1) F^l S_0$ converge vers $1 + {}^tS_0 (1 - F)^{-1} S_0$, *i. e.* la somme des coefficients de l'inverse de $1 - F$, plus 1 (pour le mot vide).

(il est facile de voir pour la variante ou f n'aurait qu'un argument que la condition est $\sum_{a \in A} f(a) < 1$)

14 CNS sur k pour que toute matrice symétrique soit diagonalisable

comment caractériser les corps k (caractéristique différente de 2) et les formes quadratiques q sur un espace vectoriel de dimension finie, telles que pour toute forme quadratique q' sur E, q et q' possèdent une base orthonormale commune (appelons une telle forme quadratique q *universelle*).

Je n'ai pas de réponse encore complétement satisfaisante, mais :

- si q est universelle, alors dans une base convenable elle est, après multiplication par un scalaire convenable de la forme : $\mathrm{Diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0)$

En effet, si $q = 0$ il n'y a rien à prouver, sinon on multiplier q par un scalaire de telle façon qu'il existe e_1 tel que $q(e_1) = 1$.

1er cas : $q(x)$ est un carré pour tout x. On complète en une base orthogonale (e_1,...,e_k) d'un supplémentaire de Ker(q). Comme les $q(e_i)$ sont tous des carrés, on peut choisir quitte à multiplier e_i par un scalaire que $q(e_i) = 1$. On complète la base avec une base de Ker(q), la matrice de q y est bien $\mathrm{Diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0)$.

2e cas : il existe x tel que q(x) n'est pas un carré. Sur le plan de base (e_1,x), la matrice de q est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & q(x) \end{pmatrix}$ qui est de déterminant non nul car $q(x)$ n'est pas un carré. Soit e_2 dans ce plan, orthogonal à e_1. Dans la base (e_1,e_2) q s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et l'existence de x dit qu'il existe u, v tels que $u^2 + av^2$ n'est pas un carré. On définit q' sur le plan $<e_1,e_2>$ par $B = \begin{pmatrix} u & av \\ av & -au \end{pmatrix}$ et on le prolonge comme nul sur le q-orthogonal de ce plan.Alors $A^{-1}B = \begin{pmatrix} u & av \\ v & -u \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (le discriminant réduit du polynôme caractéristique étant justement $u^2 + av^2$). Donc q n'est pas universelle.

La preuve ci-dessus montre que non seulement q doit s'orthonormaliser (sur un supplémentaire du noyau), mais que Im(q) est inclus dans l'ensemble des carrés. Dès que la dimension d de $E/\mathrm{Ker}(q)$ est au moins 2, cela implique que dans le corps k, l'ensemble des carrés est stable par somme.

Le problème du noyau pouvant facilement être réglé (une forme quadratique est universelle si et seulement si elle est universelle sur un supplémentaire de son noyau), on est ramené à :

(*) * Caractériser les corps de caractéristique différente de 2 dans lesquels toute matrice symétrique dxd est diagonalisable *

Cela fait pas mal de conditions nécessaires.

- l'ensemble des carrés de k est stable par addition

- on ne peut pas écrire non trivialement 0 comme somme de d carrés [cf mon précédent post : q universelle implique q anisotrope]

Mais ce n'est pas tout. Considérons le plus gros sous-corps K de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et stable par racines carrées de nombres positifs. Alors dans K, l'ensemble des carrés est stable par somme.Cependant, la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \end{pmatrix}$ a son polynôme caractéristique $X^3 - 6X - 3$ irréductible sur $\mathbb{Q}$; il reste donc irréductible sur K qui est une composition d'extensions quadratiques. Donc elle n'est pas diagonalisable.

Ainsi, sur K, la forme quadratique "euclidienne" n'est pas universelle en dimension > 2 (elle l'est en dimension 2, car le discriminant du polynôme caractéristique d'une matrice symétrique 2x2 peut s'écrire comme somme de 2 carrés).

La condition de (*) est équivalente à :

"0 n'est pas somme non triviale de d carrés ; et pour toute matrice symétrique $d \times d$, le polynôme caractéristique admet une racine".

Cet énoncé étant du 1er ordre en théorie des corps, il est satisfait par tout corps réel-clos. Je ne sais pas si le fait qu'il soit vrai pour tout d caractérise les corps réel-clos !

Avec Xavier Caruso on a finalement réussi à trouver un corps non réel clos, sur lequel cependant toute matrice symétrique est diagonalisable.

Un tel corps est $\mathbb{R}\left((t)\right)$. Un autre est $R(\{t\})$ (notation ?), le corps des germes de fonctions analytiques réelles en 0.

Ces corps ne sont pas réel clos, tout simplement parce qu'il existe un élément qui n'est pas un carré, ni son opposé : l'élément t.

Bon alors, montrons ça (i.e. que toute matrice symétrique est diagonalisable) pour $\mathbb{R}\left((t)\right)$:

soit $k\left((t^*)\right)$ la réunion des $k\left(\left(t^{\frac{1}{n}}\right)\right)$ pour n entier positif.

On sait que $\mathbb{C}\left((t^*)\right)$ est algébriquement clos ; par conséquent $\mathbb{R}\left((t^*)\right)$ est réel clos, et par conséquent toute matrice symétrique de $\mathbb{R}\left((t)\right)$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}\left((t^*)\right)$. Pour voir qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}\left((t)\right)$, il faut vérifier que les valeurs propres sont dans $\mathbb{R}\left((t)\right)$. Cela découle facilement du lemme suivant :

Lemme : soit p premier. Soit A une matrice symétrique dans $\mathbb{R}\left((t^p)\right)$, et $u(t)$ une valeur propre dans $\mathbb{R}\left((t)\right)$. Alors $u(t)$ est en fait dans $\mathbb{R}\left((t^p)\right)$.

preuve :

- p impair. Soit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, alors on vérifie que $u(\omega t)$ est aussi une valeur propre. Donc il appartient à $\mathbb{R}\left((t^*)\right)$. Mais il est aussi dans $\mathbb{C}((t))$, donc il est dans $\mathbb{R}\left((t)\right)$. Comme ω^k n'est pas dans $\mathbb{R}$ dès que p ne divise pas k, on en déduit que $u(t)$ est dans $\mathbb{R}\left((t^p)\right)$.

- $p = 2$. on écrit $A(t)X(t) = u(t)X(t)$; on a alors de même $A(t)X(-t) = u(-t)X(-t)$. Si $u(t)$ n'est pas dans $\mathbb{R}\left(\left(t^2\right)\right)$, alors ce sont deux valeurs propres distinctes. Donc les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux. On écrit $X(t) = Y(t^2) + tZ(t^2)$. Alors X(-t)=Y(t^2)-tZ(t^2). Alors

0=<X(t),X(-t)>=$\left\langle Y(t^2), Y(t^2)\right\rangle - t^2 \left\langle Z(t^2), Z(t^2)\right\rangle$

Donc <Y(t),Y(t)>=t<Z(t),Z(t)>

Soit $v(Y)$ la valuation de Y(t), c'est un entier. Alors la valuation de <Y(t),Y(t)> est $2v(Y)$, et idem pour Z. Ainsi on obtient $2v(Y) = Zv(Z) + 1$, ce qui est absurde.