Déterminants bis
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

1 Détail sur Hadamard

EXO :rappel sur lemme Hadamard. On le précise en minorant le détermiannt par le produit des $\delta_k := \left(\sum_{i<k} |a_{i,k}|\right) - |a_{k,k}|$.

DEM : résultat et hypothèses invariant par dilatations des lignes. On peut supposer la diagonale égale à 1 puis tuer la première colonne par n transvectios $L_i \longleftarrow L_0 - a_{0,1} L_0$ (on a indexé de 0 à n).

idée : récurrer sur la matrice restante $a'_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,0} a_{0,j}$. Montrons que celle ci est à diag dominnate : deux inégalité traingualire brutes donnent

$$\begin{aligned} \Delta'_i \quad : \quad &= \left|a'_{i,i}\right| - \sum_{\substack{j\neq i \\ j\geq 1}} \left|a'_{i,j}\right| \\ &\geq \quad \left(|a_{i,i}| - |a_{i,0}|\,|a_{0,i}|\right) - \sum_{\substack{j\neq i \\ j\geq 1}} \left(|a_{i,j}| + |a_{i,0} a_{0,j}|\right) \end{aligned}$$

on réordonne

$$= |a_{i,i}| - \left(\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\right) + |a_{i,0}| \left(1 - \sum_{j\geq 1} |a_{0,j}|\right)$$

la second parethèse vaut Δ_0 donc est < 0. On en déduit $\Delta'_i \geq \Delta_i$ pour $i \geq 1$. En bornant les somme à $j < i$ au lieu de $i \neq j$, on trouve de même $\delta'_i \geq \delta_i$. Donc det $\overset{\text{rec}}{\geq} 1 \prod \delta'_k \geq \delta_1 \prod \delta_k$, CQFD. (pour $n = 1$, $\delta_1 = \det$)

2 maximiser le dét sur la boule unité infinie

Montrer que $\sup_{\|A\|\leq 1} \det A$ est un entier multiple de 2^{n-1}

3 Un déterminant

soit A tq $a_{i,j} \neq 0 \implies a_{j,i} = 0$ et $a_{i,j} a_{j,k} \neq 0 \implies a_{i,k} \neq 0$. Que vaut $\det A$?

SOl.
on prend un serpent $\prod a_{i,\sigma(i)}$ non nul associé à un σ décomposée en cycles.... FGN

4 Vandermonde généralisé

Soit $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et $\overrightarrow{\lambda} \neq 0$.
Montrer que $\sum \lambda_i x^{\alpha_i}$ s'annule au plus $n-1$ fois sur R^{++}
POur $0 < t_1 < \cdots < t_n$, mq $\det \left(t_i^{\alpha_j}\right) > 0$

5 Matrices stochastiques

soit $A \in M_n\left(R^+\right)$ de somme 1 sur chaque ligne.
montrer $|\det A| \leq 1$ et étudier le cas d'égalité

(mq par réc que si somme ligne ≤ 1 alors $|\det| \leq 1$)
(les matries de permltation sont solutions)

6 un calcul

soit $A, B \in M_n$ tq $\operatorname{Im} A$ et $B(\operatorname{Ker} A)$ ne sont pas en $\bigoplus$. Notons A_j la matrice A où la j-ièm colonne a été remplacéée par celle de B.

Caculer $\sum \det A_j$

7 Det par blocs

Mq $\det A_{i,j} = \det = \sum \varepsilon(\sigma) \prod A_{i,\sigma(i)}$si les $A_{i,j}$ commutent

8 Formule Sylvester et calcul d'un wronskien

Soit A une matrice.

On note $A_{q_1,\ldots,q_n}^{p_1,\ldots,p_n}$ la matrice obtenues à partir de A en retirant les lignes lignes d'indices les p_i et les colonnes d'indices les q_j.

1. *Montrer la formule de Sylvester*

$$\forall p \neq q,\ |A|^2 \left|A_{p,q}^{p,q}\right| = \left| \begin{array}{cc} \left|A_p^p\right| & \left|A_q^p\right| \\ \left|A_p^q\right| & \left|A_q^q\right| \end{array} \right|.$$

2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose pour tout entier $k \geq -1$*

$$w_k := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & \det\left(f^{(i+j)}(t)\right)_{0\leq i,j\leq k} \end{array} \right. .$$

Montrer pour $n \geq 0$ l'identité

$$w_{n-1}w_{n+1} = \left| \begin{array}{cc} w_n & w_n' \\ w_n' & w_n'' \end{array} \right|.$$

Solution proposée.

1. On suppose dans un premier temps A inversible et $(p,q) = (1,2)$.

Pour faire apparaître $A_{1,2}^{1,2}$, on écrit $A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & A_{1,2}^{1,2} \end{pmatrix}$ par blocs où les premières ligne et colonne correspondent aux deux premières lignes et colonnes de A. Par ailleurs, les déterminants apparaissant dans la matrice de droite sont des mineurs : plus précisément, si l'on écrit $\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} X & * \\ x & * \end{pmatrix}$ par blocs de façon adpatée à l'écriture de A ci-dessus, alors $X = \begin{pmatrix} \left|A_1^1\right| & -\left|A_2^1\right| \\ -\left|A_1^2\right| & \left|A_2^2\right| \end{pmatrix}$.

On en déduit que le déterminant de droite vaut celui de X. Pour faire le lien entre X et $A_{1,2}^{1,2}$, on peut invoquer l'identité $({}^t\operatorname{com} A)\, A = |A|$, mais l'on ne pourrait pas extraire $|X|$ de cette dernière. Regardons plutôt le produit de $\begin{pmatrix} {}^tX & {}^tx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$: la seconde ligne sera celle de A et la première sera la première ligne de $({}^t\operatorname{com} A)\, A = |A|$, autrement dit $(|A|, 0)$. Prenant le déterminant dans l'égalité $\begin{pmatrix} {}^tX & {}^tx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ * & A_{1,2}^{1,2} \end{pmatrix}$ sus-établie, il vient $|X|\,|A| = |A|^2 \left|A_{1,2}^{1,2}\right|$, d'où le résultat en simplifiant par $|A|$.

Lorsque A n'est pas supposée inversible, on remplace les coefficients de A par n^2 indéterminée $(X_{i,j})$ de sorte à avoir une matrice inversible dans le corps $K\left((X_{i,j})_{i,j}\right)$ à laquelle s'appliquera la formule de Sylvester ; spécialiser les indéterminées en les coefficients de A donnera alors le résultat.

2. Notons W_k la matrice $\left(f^{(i+j)}(t)\right)_{0\leq i,j\leq k}$ pour tout $k\geq -1$ et fixons un entier $n\geq 0$.

On applique la formule de Sylvester à la matrice $A:=W_{n+1}$ et aux indices $(p,q)=(n,n+1)$. Puisque $A_{n+1}^{n+1}=W_n$ et $A_{n,n+1}^{n,n+1}=W_{n-1}$, on obtient

$$\underbrace{|W_{n+1}|\,|W_{n-1}|}_{=w_{n-1}w_{n+1}}=\begin{vmatrix} |A_n^n| & \left|A_{n+1}^n\right| \\ \left|A_n^{n+1}\right| & w_n \end{vmatrix} \overset{?}{=} \begin{vmatrix} w_n & w_n' \\ w_n' & w_n'' \end{vmatrix}.$$

On est incité à regarder ce qui se passe lorque l'on dérive w_n. Comme il s'agit d'une forme multilinéaire en les colonnes, on a $w_n'=\sum_{j=0,\ldots,n}\delta_j$ où δ_j est le déterminant w_n où l'on a remplacé la j-ième colonne par sa dérivée. Vue la tête de w_n, les δ_j sont nuls sauf pour $j=n$ maximal et δ_n s'obtient alors en barrant la dernière ligne et l'avant-dernière colonne de W_{n+1}, d'où $w_n'=\left|A_n^{n+1}\right|$. En raisonnant cette fois sur les lignes de A_n^{n+1}, on montre que w_n'' s'obtient en barrant les avant-dernières ligne et colonne de A, d'où $w_n''=|A_n^n|$. On conclut en réinjectant les valeurs de w_n' et w_n'' que l'on vient de trouver.

Remarque. Une matrice constante sur les anti-diagonales est dite de *de Hankel*.

9 poly car $A\cdot$

trouver det $(A\cdot)$.dans $L(M_n)$.

10 déragnements

comparer nb dérangement pairs/impairs.
(la différence vaut det $\left(1-\delta_i^j\right)$)

11 Dans $M_n(Z)$

cns sur un vecteur de $\mathbb{Z}^n$ pour être une colonne d'une matrice inversible ?

coef $1,1$ doit donne $\sum a_i ?=1$, donc les a_i doivent être premire entr eux.

12 des poids

soit A réelle de diag nulle à coef dans $\{\pm 1\}$. Si n pair, mq A inversible

On a $2n+1$ caillours. OS chaque paquets de $2n$ cailoux se décompose en deux paquets de n cailloux de même masse totale. Mq tous les cailloux ont la même masse

pour tout i, $\exists J$ tq $2\sum_j x_j+x_i=X$ où X poids total. On sait que $x_i=\frac{X}{2n+1}$ est solution . C'est la seule car matrice inversible $2-\mathrm{Id}$: son det est non nul mod 2, donc non nul :-)

13 décomposition LU

cns pour que $A=LU$? (det $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}\neq 0$ pour tout p)

14 Sur la comatrice

Pour une matrice A, on pose $\widetilde{A} := {}^t\operatorname{com} A$.

1. Que valent $A\widetilde{A}$ et $\widetilde{A}A$?
2. Calculer le rang de la comatrice ainsi que ses noyau et image.
3. Que vaut le déterminant de la comatrice ?
4. Montrer l'égalité $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ pour toutes matrices A et B.
   En déduire que, si deux matrices A et B sont semblables, alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ également.
5. Montrer que les sous-espaces propres de A sont des sous-espaces propres de $\widetilde{A}$.
6. Que vaut $\widetilde{\widetilde{A}}$?
7. Evaluer $\chi_{\widetilde{A}} = \chi_{{}^tA} = \frac{(-X)^n}{|A|}\chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ (diag inversible sont dense)
8. Montrer $\widetilde{A}$ est un poynôme en A ; en déduire $\operatorname{Comm} A \subset \operatorname{Comm} \widetilde{A}$
9. résoudre $A = \widetilde{A}$ dans $\mathbb{R}$

1. Le cours donne $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|$.
2. Discutons selon le rang de A.
   Lorsque A est inversible, $\widetilde{A}$ l'est également, d'où les rang, noyau et images de $\widetilde{A}$.
   Lorsque A est de rang $\leq n-2$, tous les mineurs sont nuls, donc $\widetilde{A}$ est nulle ?
   Lorsque A est de rang $n-1$, les égalités $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 0$ s'écrivent $\begin{cases} \operatorname{Im}\widetilde{A} \subset \operatorname{Ker} A \\ \operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker}\widetilde{A} \end{cases}$. Prenant les dimensions et sommant, il vient $n \leq n$ par le théorème du rang, donc on avait déjà égalité au niveau des inclusions. En particulier, $\operatorname{rg}\widetilde{A} = \dim\operatorname{Ker} A = 1$.
3. Prendre le déterminant dans l'égalité ci-dessus donne $|A|\left|\widetilde{A}\right| = |A|^n$. Si $|A| \neq 0$, on trouve $\left|\widetilde{A}\right| = |A|^{n-1}$. Si $|A| = 0$, le rang de A n'est pas n, donc le rang de $\widetilde{A}$ vaut 1 ou 0, d'où $\left|\widetilde{A}\right| = 0 = |A|^{n-1}$ pour $n \geq 2$. (Pour $n = 1$, la condition $|A| = 0$ se réécrit $A = 0$, d'où $\left|\widetilde{A}\right| = 0$.)
4. L'égalité est claire pour des matrices inversibles puisqu'alors

$$\widetilde{AB} = \frac{1}{|AB|}{}^t(AB)^{-1} = \frac{1}{|A|\,|B|}\left({}^tA^{-1}\right)\left({}^tB^{-1}\right) = \widetilde{A}\widetilde{B}.$$

   Lorsque le corps de base K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on prolonge cette identité par densité de GL_n et par continuité de $A \mapsto \widetilde{A}$ (la comatrice est polynomiale en chaque coordonnée, donc C^∞). Dans le cas général, on rend les matrices A et B inversibles en considèrant $2n^2$ indéterminées $X_{i,j}$ et $Y_{i,j}$ et en se plaçant dans le corps $K(X_{i,j}, Y_{i,j})$ où les matrices $X := (X_{i,j})$ et $Y := (Y_{i,j})$ sont inversibles (car de déterminant non nul) : on évalue ensuite l'identité $\widetilde{XY} = \widetilde{X}\widetilde{Y}$ en spécialisant les $X_{i,j}$ en les $a_{i,j}$ et les $Y_{i,j}$ en les $b_{i,j}$.
   Si $B = PAP^{-1}$, on écrit $BP = PA$, d'où $\widetilde{B}\widetilde{P} = \widetilde{P}\widetilde{A}$ avec $\operatorname{rg}\widetilde{P} = n$ car $\operatorname{rg} P = n$, d'où $\widetilde{B} = \widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{P}^{-1}$.
5. si $|A| \neq 0$, on a l'équivalence $Ax = \lambda x \iff \frac{|A|}{\lambda}x = \widetilde{A}x$. D'où $\operatorname{Sp}\widetilde{A} = \left\{\frac{|A|}{\lambda}\right\}_{\lambda\in\operatorname{Sp} A}$
   SI $\operatorname{rg} A < n-1$, tout vep de A est vep de $\widetilde{A} = 0$.
   Si $\operatorname{co}\operatorname{rg} A = 1$, partons de $Ax = \lambda x$. Deux cas : $\lambda \neq 0 \implies 0 = \lambda\widetilde{A}x \implies x \in \operatorname{Ker}\widetilde{A}$, ou bien $\lambda = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}\widetilde{A}$ qui est une droite, donc $\left(x, \widetilde{A}x\right)$ lié.
6. $= |A|^{n-2} A$, ok pour $n = 2$, et même pour $n = 1$ si $A \neq 0$.
7. $\chi_{\widetilde{A}} = \chi_{\operatorname{Com} A} = \frac{(-X)^n}{|A|}\chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ (diag inversible sont dense)
8. ...
9. oN A $A^tA = A^t comA = |A|$. Si $A \neq 0$, l'un des colonnes est dnon nulle, donc un coef diag de A^tA est > 0, donc $|A| > 0$, donc $\frac{A}{\sqrt{|A|}} \in O_n$. Or, $|A| > 0$, donc $\frac{A}{\sqrt{|A|}} \in SO_n$, ie $|A|^{1-n/2} = 1$. Pour $n \neq 2$, on trouve $|A| = 1$, donc SOL=SO_n. Sinon, RSO_2 fonctionne.

15 Uen équation

Dans $M_n(C)$ où $n \geq 2$, résoudre $A + \widetilde{A} \in C$.

16 Sur le diamètre transfini des parties bornées du plan

Soit A une partie du plan.
On note $d_n := \sup_{\overrightarrow{a} \in A^n} \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<j} |a_i - a_j|}$ le *diamètre d'ordre* n de A.
On rappelle que la suite (d_n) est décroisante. On note d sa limite, appelée *diamètre transfini* de A.
On souhaite donner une autre expression de d

Pour $n \geq 0$, on note U_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{C}_n[X]$ et on pose

$$\delta_n = \inf_{P \in U_n} \sup_A |P|.$$

Par commodité, on notera $D_n := d_n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $\Delta_n := \delta_n^n$.

1. *Montrer que la suite* $(\ln \Delta_n)$ *est sous-additive et en déduire que* δ_n *converge vers son infimum que l'on notera* δ.
2. *On considère le Vandermonde* $V(\overrightarrow{a})$ *en* $n+1$ *variables* $a_0, ..., a_n$. *En remplaçant la rangée de* a_i^n *par une rangée de* $P(a_i)$ *pour un polynôme* P *à choisir, montrer les inégalités*

$$1 \leq \frac{1}{\Delta_n} \frac{D_{n+1}}{D_n} \leq n+1.$$

3. *Conclure* $d = \delta$.

Solution proposée.

1. Soit $p, q \geq 0$ et $(P, Q) \in U_p \times U_q$. On a

$$\Delta_{p+q} \leq \sup_A |PQ| = \sup_A |P| |Q| \leq \sup_A |P| \sup_A |Q|.$$

On prend ensuite l'infimum sur les $P \in U_p$, d'où $\Delta_{p+q} \leq \Delta_p \sup_A |Q|$, puis l'infimum sur les $Q \in U_q$, d'où $\Delta_{p+q} \leq \Delta_p \Delta_q$, *CQFD.*

2. Le Vandermonde perturbé que l'on demande de considérer vaut le Vandermonde sans perturbation du moment que le polynôme P est de degré $\leq n$ (soustraire à la dernière rangée une combinaison linéaire des rangées précédentes). Par ailleurs, en développant selon la rangée de $P(a_i)$, on trouve

$$V(\overrightarrow{a}) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) V\left((a_j)_{j \neq i}\right),$$

d'où la majoration

$$|V(\overrightarrow{a})| \leq \sum \sup_A |P| \sup_{\overrightarrow{x} \in A^n} |V(\overrightarrow{x})| = (n+1) \sup_A |P| \cdot D_n.$$

En prenant le supremum sur les $\overrightarrow{a} \in A^{n+1}$, puis l'infimum sur les $P \in U_n$, on en déduit

$$D_{n+1} \leq (n+1) \Delta_n D_n,$$

ce qui est l'inégalité de droite à montrer.

Par ailleurs, une récurrence immédiate donne

$$\begin{aligned} |V(\overrightarrow{a})| &= |V(a_1, ...a_n)| \prod_1^n |a_0 - a_i| \\ &\geq . \end{aligned}$$

Le facteur de droite est continu en a_0 et minoré, donc atteint ? ? ? ?

3. On va encadrer d_n à l'aide des δ_k afin de la faire converger vers δ.

Minoration. L'inégalité de gauche se réécrit $D_{n+1} \geq \Delta_n d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}$, ce qui se minore par $\Delta_n d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ vue la décroissance des d_k. Simplifiant par d_{n+1}, il vient

$$d_{n+1} \geq \Delta_n,$$

ce qui est très synpathique. Si par malheur d_{n+1} était nul, cela signifierait que A contient au plus n points, mais alors le polynôme $\prod_{a\in A}(X-a)$ est dans U_n et permet d'obtenir $\delta_n \leq \sup_{z\in A}\prod_{a\in A}|z-a| = 0$, ce qui sauve l'inégalité souhaitée.

Majoration. On multiplie les inégalités de droite de 1 à $n-1$, d'où $\frac{1}{\Delta_1\cdots\Delta_{n-1}}\frac{D_n}{D_1} \leq n!$. Passant à d_n, il vient (on sait que $D_1 = 1$)

$$d_n \leq \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{n!}\ \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\delta_1\cdots\delta_{n-1}^{n-1}}.$$

Puisque $n! \leq n^n$, le facteur de gauche se majore par $\sqrt[\frac{n-1}{2}]{n} = e^{\frac{\ln n}{2(n-1)}} \longrightarrow 1$. Par ailleurs, la suite $\left(\underline{\delta_1}, \underline{\delta_2, \delta_2}, \underline{\delta_3, \delta_3, \delta_3}, ...\right)$ converge vers δ, donc son logarithme tend vers ∞ ; par Cesàro, sa moyenne aussi ; en particulier, la moyenne $\ln\left(\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\delta_1\cdots\delta_{n-1}^{n-1}}\right)$ de ses $\frac{n(n-1)}{2}$ premiers termes tend vers $\ln\delta$. Passant à l'exponentielle, on en déduit que $\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\delta_1\cdots\delta_{n-1}^{n-1}}$ converge vers δ.

Finalement, on a encadré δ_n par deux suites de limite δ, ce qui conclut.

17 Déterminant de Fredholm

Pour K fonction de deux variables, on pose

$$\det(1+tK) = \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n}\int \det\left(K(x_i,x_j)_{1\leq i,j\leq n}\right)dx_1\cdots dx_n$$

(on somme les mineurs).

on identifie K avec $f \mapsto \int K(\cdot,x)f(x)\,dx$

Alors $\det(1+tK)$ converge si K opérateur borné

prop :

$$\begin{aligned}\det[(1+K)(1+K')] &= \det(1+K)\det(1+K')\\ \det(1+K) &= \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,K}(1+\lambda)\end{aligned}$$

le faire pour opérateur de rang finis, puis les opératuer compacts, opérateurs à trace ? ? ? ?