Réduction
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Si tu prends un opérateur u dans $L(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie, par exemple, $k[u]$ est isomorphe $k[X]/(\mu_u)$ à, et en particulier, $\mathrm{Sp}(k[u])$, ensemblistement, c'est le spectre de u (ensemble de ses valeurs propres). Schématiquement, on peut aussi y retrouver des morceaux nilpotents (quand ce n'est pas diagonalisable)

Idée :composer un rayon lumineux. L'intensité de chaque raie correspond à la dimension du sev.

On recompose les raies (on met bout à bout les sep) : que reste-il ? SI rien, on est diago, sinon il faut travailler.

Dans mon livre fétiche pour ce genre de question (*Les mots et les maths* de Bertrand Hauchecorne), il est écrit :

Le mot latin **spectrum** est construit sur la racine latine **specere**, **regarder** que l'on retrouve dans **spectacle**. [...] Newton utilise la latin **spectrum** en 1671 pour désigner les raies de décomposition de la lumière blanche. Il fait ainsi renaître le sens originel du mot et considère que chaque raie est une image de la lumière initiale. C'est sans doute par analogie avec cette acception que l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé spectre. La décomposition d'une matrice suivant les espaces propres donne bien une image de cet endormorphisme sur chacun d'entre eux.

1 Généralités

$u \sim \begin{matrix} * & * \\ & * \end{matrix}$ selin $A \oplus B$ ssi A stable par u

u $\sim$diagonale par bloc ssi E est $\oplus$ de se stables

u $\sim$trigonale ssi il y a drapeua stable

$A \subset E$ est une *partie propre* pour $f \in L(E)$ si $f_{|A} \in K$.

Un *sep* est une partie propre maximale, nécessairement de la forme $\mathrm{Ker}(f - \lambda)$.

0 est vecteur sale

RQ Si $E = \{0\}$, tous les spectres sont vides.

inv ssi $0 \notin \mathrm{Sp}$: interpréter avec résoluation système trainagulaire, ou avec le det

nilpotente ssi $\mathrm{Sp} = \{0\}$; alors nilpotent ssi $\sim$triangulaire stricte

recherche vecteur p = déterminer base d'un sev déterminé par équations linéaires –> exemple vital pour la réduction.

EG : $f'' = 2f$, pb d'optimal fev ou paques pour les sep.

EG : spectre des tapis roulant ? si ev de toutes les suites, tout scalaire est vp (suite géométrique). Si ev des suites bornées, alors le spectre est le disque unité fermé.

EG : vp de $P \mapsto \left(X^2 - 1\right) P' + 2nXp$? construire un exemple où $\frac{uP}{P} = \lambda \iff \frac{P'}{P}$ =decomo élts simples gentille

EXO : $A^2 = -1$ –> n pair et $A = \bigoplus \begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}$, donc A est somme direecte de multiplication par i

classse de similitud dans M_2 : scalaire ou $\begin{matrix} & \alpha \\ 1 & \beta \end{matrix}$ avec α et β unique (pas forcément meilluere représentation –> penser aux transvections)

classse de similitud dans $M_2(C)$: $\begin{matrix} \lambda & \\ & \mu \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{matrix}$, dans tous les cas = dgB+nil qui commutent

donner le lemme des noyau tout de suite : on obtient la $\bigoplus$ des sep, d'où au plus n vp

EG : $\left(e^{\lambda \cdot}\right)$ libre car vecp de la dérivation

APP : Supp $[f,g]=\alpha f$ ($\alpha\neq 0$). Par rec, $\left[f^k,g\right]=k\alpha f^k$, donc $\mathrm{Sp}\left[\cdot,g\right]$ contient tous les k tq $f^k\neq 0$. Si $\dim E$ finie et $\mathrm{car}\,K=0$, f doit être nilpotent. (rq : un tel f est vecteur propre pour $[\cdot,g]$)

parler tout de suite de l'effet de la conjugasion ? ? ?

Cas réel/complexe : localisation des vp dans les disques de Gerschgörin : toute vp λ vérifie $|\lambda-a_{i,i}|\leq\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$ (contrposée de lemme d'Hadamard).

COR : le spectre complexe des mat stochast est inclus dans la boule uunité

EXO : si A stocas à coeff tous >0, alors la seul vp du cercle unité est 1. Si des coeff peuvent s'annuler, λ est quand même racine de 1.

2 Polynome caractéristique

pour les cycliques, être semblables équivaut à avoir même poly car (on a un représentant canonque, la matrce compagnon)

EXO : si $PA=BP$, alors $\deg\left(\chi_A\wedge\chi_B\right)\geq\mathrm{rg}\,P$ (le fair par blocs). En particulier, si P inv, $\chi_A=\chi_B$.

Récriproque (sur $K=\overline{K}$) : si A et B ont au moins r valeurs propres communes (avec multiplicité), alors il y a une matrice carré X de rang r telle que $AX=XB$. DEM : poser $X=\sum x_i\ {}^t y_i$ si $Ax_i=\lambda_i x_i$ et ${}^tBy_i=\lambda_i y_i$

l'écrire $\det_{b.c.}\left(Xe_1-C_1,...,Xe_n-C_n\right)$ où (e_i) bc de $K\left(X\right)^n$.

Rq : on peut avoir besoin de la continuité des racines. Si $P_k=\prod\left(X-\lambda_{k,i}\right)\longrightarrow P$ dans $\mathbb{K}_n\left[X\right]$ unitaire, alors $\overrightarrow{\lambda}_k$ bornée (par somme des coeff), donc on peut extraire cv $\overrightarrow{\lambda}$ où λ^i racine de P pour tout i ; en passant à la dérivée, on récupée les ordres au moins. Ainsi, les poy dont une des racines est multple est fermé, donc les poly à racines simples est ouvert.

Formule gén ; pour le cas $n=3$, le terme en X est la somme des trois mineurs diagonaux.

Connais-tu l'algorithme de Kaprekar du calcul du polynome caracteristique ? Voir Souriau,Calcul lineaire (il n'en donne pas le nom).

En plus cet algorithme donne les coefficients du poynome Adj(A-XI).

Le polynome caracteristique obtenu, le calcul du pgcd avec son polynome derive donne les racines multiples a factoriser eventuellement pour obtenir le polynome minimal..

Soit x une racine multiple. Le nombre de fois qu'il doit etre factorise est donne par la valuation du polynome Adj(A-(x+Y)I) en Y a coefficients matriciels.

EXO : *poly car de matrice compagnon ?*

EXO : *poly car de* $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & C\\ 1 & & & b_n\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & b_1\end{pmatrix}$ *? Notons-le* $\chi^C\binom{a_1\cdots a_n}{b_1\cdots b_n}$ *et mq il vaut*

$$X^{n+1}+\sum_1^n\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j-a_k-b_k\right)X^{n+1-k}+\sum_{i+j=n+1}a_ib_j-C$$

DEM : pour $n=0$, on a $\chi(C)=X-C$, ok. Pour $n\geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
\chi^{C}\begin{pmatrix} a_1\cdots a_n \\ b_1\cdots b_n \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} X-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n & -C \\ -1 & X & & & -b_n \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -b_2 \\ & & & -1 & X-b_1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{selon } C_1}{\overset{\text{développer}}{=}} (X-a_1) \begin{vmatrix} X & & & -b_n \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & X & -b_2 \\ & & -1 & X-b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n & -C \\ -1 & X & & & -b_{n-1} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -b_2 \\ & & & -1 & -b_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

On reconnaît à gauche un poly car de matrice compagnon, tandis qu'à droite on peut faire apparaitre un χ à l'ordre inférieur en bricolant la première colonne, ce qui fait apparaître une autre matrice compagnon :

$$
\begin{aligned}
&= (X-a_1)\,\chi\begin{pmatrix} & & & b_n \\ 1 & & & \\ & \ddots & & b_2 \\ & & 1 & b_1 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} X & -a_3 & \cdots & -a_n & -C \\ 0 & X & & & -b_{n-1} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & -b_2 \\ & & & -1 & -b_1 \end{vmatrix} + \chi^{C}\begin{pmatrix} a_2 \ldots a_n \\ b_1 \ldots b_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (X-a_1)\left(X^n - b_1X^{n-1} - b_2X^{n-2} - \cdots - b_n\right) - X\left(X^{n-1} - b_1X^{n-2} - b_2X^{n-3} - \cdots - b_{n-1}\right) \\
&\quad + X^n + \sum_{1}^{n-1} X^{n-k}\left(\sum_{i+j=k} a_{i+1}b_j - a_{k+1} - b_k\right) + \sum_{i+j=n} a_{i+1}b_j - C
\end{aligned}
$$

Le second poly car vient tuer dans la seconde ligne le X^n et les termes en $-b_k$. Il reste

$$
= X^{n+1} - (a_1+b_1)\,X^n + \sum_{1}^{n-1} X^{n-k}\,(a_1b_k - b_{k+1}) + a_1b_n + \sum_{1}^{n-1} X^{n-k}\left(\sum_{i+j=k} a_{i+1}b_j - a_{k+1}\right) + \sum_{i+j=n} a_{i+1}b_j - C.
$$

En opérant un chagnement d'indice $i'=i+1$, on obtient le bon coefficient constant $\sum_{i'+j=n+1} a_{i'}b_j - C$; de même pour les termes en X^{n-k} qui valent (poser $K:=k+1$) $X^{(n+1)-K}\sum_{i'+j=K} a_{i'}b_j - a_K - b_K$, CQFD.

Sanity check pour $n=1$: on a $\chi\begin{pmatrix} a & C \\ 1 & b \end{pmatrix} = (X-a)(X-b) - C = X^2 - (a+b)\,X + (ab-C)$, ok.

3 poly min

EXo : mq $\begin{matrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{matrix}$ n'est pas un carré dans $M_2(\mathbb{R})$.

DEM : le poly min de la matrice est $(X+1)^2$; si elle estun carré C^2, alors μ_C divise $\left(X^2+1\right)^2$ donc (étant de degré ≤ 2 et irred) vaut X^2+1, d'où $0=C^2+1$, abs

l'idéal annulateure est invariatn de sim, donc le poly min aussi.

RQ : rajoutons des itérés tant que libre : alors $\dim K_i[u]$ croît stt puis stationne à partir d'un $d-1$. Alors $u^d \in K_d[u] = K_{d-1}[u]$, donc $r := \deg\mu \leq d$. Par ailleurs, $u^r \in K_{r-1}[u]$, donc $d \leq r$. Ainsi,

$$
\deg\mu_u = \max\left\{k\ ;\ \left(u^i\right)_{0\leq i<k} \text{ libre}\right\}.
$$

RQ utile : pour tout x tq $\left(u^i x\right)_{0\leq i<k}$libre, on a $\deg\mu_u \geq k$.

EXO : coef du poly sont dans le corps engendré par les coef de la matrice.

Pour calculer le poly min :

Connais-tu l'algorithme de Kaprekar du calcul du polynome caracteristique ? Voir Souriau,Calcul lineaire (il n'en donne pas le nom). En plus cet algorithme donne les coefficients du poynome Adj(A-XI).

Le polynome caracteristique obtenu, le calcul du pgcd avec son polynome derive donne les racines multiples a factoriser eventuellement pour obtenir le polynome minimal. Soit x une racine multiple. Le nombre de fois qu'il doit etre factorise est donne par la valuation du polynome Adj(A-(x+Y)I) en Y a coefficients matriciels.

mq $Z(\mu_A) = \operatorname{Sp} A$.
pour $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, λ est racine de tout poy annul, en particulier μ_A
pour $\lambda \notin \operatorname{Sp} A$, $A - \lambda$ inversible, donc $P(A) = 0 \iff \frac{P}{(X-\lambda)^?}(A) = 0$.

Rq : $P(u) \in GL$ ssi $P \wedge \mu_u = 1$.
=> l'inverse de $P(u)$ est un polynôme Qen u, d'o $PQ(u) = 1$, donc $PQ - 1$ multipl de μ_u, donc $P \wedge \mu_u = 1$
<= Bézout :$AP + B\mu = 1 \Rightarrow A(u) P(u) = 1$

COR : si P polynôme unvieserl pour l'inverse, alors P ets prmier avec tous les $X^n - \lambda^n$ pour λ non nul (réalisé pour les cycliques), donc n'a pas de racine non nulle : $P = X^r$ sur $K = \overline{K}$, qui ne marche que si K fini.

EXO : pour $n \geq 2$, poly min de (que des 1) est $X^2 - nX$ (annule et on n'a pas un scaia).

EXO : si $\operatorname{rg} A = 1$, A est semblable à $\begin{matrix} 0 & ? \\ 0 & \lambda \end{matrix}$, d'où $\mu_A = X^2 - (\operatorname{tr} A) X$

4 endo diagonalis

critèe dgb ssi poly annl scindé simple.
Si dgb, poser $P = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}} (X - \lambda)$
démo matricielle : un 0 sur chaque terme de la diag
démo par les endo : puisque$E = \bigoplus E_\lambda$, il suffit de mq $P(u) = 0$ sur chaque E_λ. Or, $P(u)(x) = P(\lambda) u = 0$, CQFD.

EXO :*dans* $K_n[X]$*, fixer un polynôme* π *et donner une CNS pour la DZ de* $P \mapsto [\pi P]^{(n)}$.

DEM : $\deg [\pi P]^{(n)} \leq \deg P + \deg \pi - n$, donc nilpotent pour $\deg \pi < n$ (donc pas DZ). Supposons $\deg A = n$. Alors $\deg [\pi P]^{(n)} = \deg P$, avec $X^k \mapsto \left[a_n X^n X^k\right]^{(n)} = a_n \frac{(n+k)!}{n!}$, donc matrice trigo avec coef diag 2à2 distincts.

ordre de multiplicité algébrique ω_λ et géométrique δ_λ. On peut calculer $\delta_\lambda = \operatorname{codim} E_\lambda$ -> donner un exemple où diagonilisable par le critère χ_u scindé et $\omega_\lambda = \delta_\lambda$.

eg $X_{n+1} = \begin{matrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & \end{matrix} X_n$ (on trouve $X_n = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1}$)

CP de ce critère : $|\operatorname{Sp} u| = n$ ssi u dgB et ts sep sont des dtes
CP de ce critère : si $|\operatorname{Sp} u| = 1$, alors u dgB ssi u homothètie
$\begin{matrix} \lambda & * \neq 0 \\ & \lambda \end{matrix}$ n'est jamais diagon, sinon de spectre λ et $= \lambda$.

Question : est-ce que $\begin{matrix} A & B \\ & A \end{matrix}$ diag équivaut à $B = 0$?

Plus génértl, cns pour que $\begin{matrix} A & B \\ & C \end{matrix}$ diag ? il faut A (et C) diag, mettons $A = P \Lambda P^{-1}$ où $\Lambda = (\lambda_i \operatorname{Id})_{i=1,..,p}$
Posons $X = P^{-1} B$ que l'on casse en blocs $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$. Alors l'égalité des corg équivaut à : lignes de X_i dans le vect de celles de $C - \lambda_i$.

EXO : si $\lambda \neq \mu$, $\begin{matrix} \lambda + N & * \\ & \mu + N' \end{matrix}$ dgzB ssi $N = 0 = N'$. Le poly car vaut $(X - \lambda)^\alpha (X - \mu)^\beta$, la martic A eest dgz ssi $\operatorname{corg}(A - \lambda) = \alpha$ (et β..). Or, $A - \lambda = \begin{matrix} N & * \\ & (\mu - \lambda) + N' \end{matrix}$ est de rang $\geq \beta$ (avec = ssi $N = 0$) et de même $\operatorname{rg}(B - \mu) \geq \alpha$ avec ssi $N' = 0$, CQFD.

RQ : dgB + nilmpotent = 0

RQ : R_θ dgB sur C mais pas sur R

EXO : si rg $A = 1$,alors A dgB sssi tr $A \neq 0$

EXO : $\begin{pmatrix} & & & * \\ * & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \end{pmatrix}$ dgB sur C, et plus généralement les matrices de permutation (décomposer en cycles)

EXO : étudier $\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ lorsque $a_i \neq 0$ pour un $i < n$. LE rang est deux, il manque deux vp -> tr A et tr A^2, ontrouve les racines de $X^2 - a_n X + \sum_{1 \leq i < n} a_i^2$

EXO : A dgB ssi $\cdot A$ dgB ssi $A\cdot$ dgB (dans $L(M_n)$)

dem 1 :exmplicter les vp de $A\cdot$: $AM = \lambda M \iff \operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda)$, donc sep $= L(K^n, \operatorname{sep} A)$, d'où $\omega_\lambda(A) = n\omega_\lambda(A)$

dem 2 : si $A = P\Lambda P^{-1}$, $A\cdot$ agit par $PMP^{-1} \mapsto PM\Lambda P^{-1}$, donc les $E_{i,j}$ son vep

dem 3 : dans bonne base, $\operatorname{Mat}(A\cdot) = A^{\oplus n}$et $\operatorname{Mat}(\cdot A) = {}^t A^{\oplus n}$, donc poly annu scindé simple conclut

EXO : traces de toutes les pusisance nulles => nilpotente. On retrouve $[A, B] = \alpha A \implies \alpha = 0$ ou A nilpotente ($\alpha k A^k$ ets un crochet)

EXO : CNS pour que Comm $A \cap$Sim A fini ? pou $n = 2$, c'est A dz, pour $n \geq 3$, si A dgz, c'est $\iff |\operatorname{Sp} A| = 1$ ou n

EXO : *Soit $M \in Mn(C)$ une matrice diagonalisable a valeurs propres distinctes non nulles. Combien l' equation $X^2 = M$ a-t-elle de solutions ?* DEM : Xcommute avec $X^2 = M$; soit P poly annulateuer sindé simple pour M. Alors $P(X^2)$ annule X ; si M inversible, $P(X^2)$ est aussi scindé simple, donc X est dZ. On a donc 2^n solution.

(GEN : *Soit A une matrice complexe inversible dont la k-ième puissance est diagonalisable ($k \geq 1$). Montrer que A est diagonalisable.) (réduc 1)*

4.1 sev stables

EXO : pour f dz, CNS pour avoir un nb fini de sev stables ? combien ?

point fdemntal : V sev stablee ssi $V = \bigoplus V \cap E_\lambda$.

DEM : $\Longleftarrow$ clair : si $v = \sum e_\lambda$, $f(v) = \sum \lambda e_\lambda$,et plus générlement $V \ni P(f)(v) = \sum P(\lambda) e_\lambda$. Pour récpérer e_λ, on prend $P = \prod_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} f \\ \mu \neq \lambda}} (X - \mu)$.

COnséquence : les sev stables sont les $\bigoplus V_\lambda$ où V_λ sev de E_λ. Il y en a donc $\sum_\lambda \#\{sev$ de dim $\omega_\lambda\}$.

si Sp u simple, 2^n sev stable. Sinon, il y a un plan stable, donc une infinité de droites (si K infini !)

AInsi, nb ffin de sev stable $\iff$ toutes vp simples.

EXO dur : CNS pour admettre nb fini sev stables ?

Si K fini, ok. Supp K infini. Les $K[u](x)$ sont stables et $E = \bigcup K[u](x)$. L'un d'eux doit être E, d'où u cyclique.

Réciproque : dans $\overline{K}$, Dunford dit que $u = \bigoplus u_\lambda$ avec μ_{u_λ}delaforme $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ et donc $\chi_u = \mu_u = \bigvee \mu_{u_\lambda} = \bigvee (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} = \prod (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$, d'où égalité partout, donc tous les u_λ sont cycliques, donc valent $\lambda + J$ où J nilpotent de corg 1, donc avec nombre fini de sev stables. Par somme directe, il y n'y qu'un nombre fini de sev de $\overline{K}^n$ (donc de K^n) stables

CP : on suppose u dg. Alors la cyclicité impose que tous les sec soient de dim 1, ie toute les vp simples : on retrouve critèe ci-dessus.

RQ : il peut toutà fait y avoir des vp doubles

Concret : prendre $\left(X^2+1\right)^2$ dans R qui a une vp double dans C. on lui associe $\begin{matrix} & & & -1 \\ 1 & & & 0 \\ & 1 & & -2 \\ & & 1 & 0 \end{matrix}$. Si plan stable, $\chi_{u_P} = X^2+1$, donc $u_P^2 \sim -1$, d'où tout vecteur de P est propre pour u^2 (pour la vp -1) : un tel vp est (résoudre) dans le plan engendré par $(1,0,1,0)$ et $(0,1,0,1)$. Il ny a donc qu'un seul sev stable non trivial : le plan trucmuche. Et par construction u ets cyclique. En complétant la base avec $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$, on trouve $\begin{matrix} & -1 & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{matrix}$.

En revanche, pour deux blocs $\begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}$, tout vecter $\lambda a + \mu c$ est envoyé sur $\lambda b + \mu d$ puis sur son opposé, d'où une infinité de plans stable lorsque λ et μ varient.

EXO soit u dz sur C. cns pour admettre un nb fini de racines k-ième pour tout $k \geq 1$?

Si plan propre, alors $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda} & \alpha \\ & \omega \sqrt[k]{\lambda} \end{pmatrix}^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\omega^k = 1$. Donc toutes les vp sont simples.

Récipriquement, exo début conclut.

EXO : si u dz sur R, cns pour admettre des racines caréeés ?

Soit r une telle racine. Alors $r^2 = \lambda$ sur E_λ, d'où $(\det r)^2 = \det \lambda = \lambda^{\omega_\lambda}$: si $\lambda < 0$ vp, ω_λ pair.

Réciproqumeetnt, en calquant $i^2 = \begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix} = 1$, on voit que $\lambda = \begin{pmatrix} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda} & \end{pmatrix}^2$.

(marche sur tout corps où λ ou $-\lambda$ ets un carré $\forall \lambda$)

5 Endo trigon

$\operatorname{Sp} u^k = \left\{\lambda^k \; ; \; \lambda \in \operatorname{Sp} u\right\}$ dans un corps de décomosition du poly car.

Contre exemple dans R : pour $A = \begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}$, on a (dans R) $\operatorname{Sp} A^2 = \{-1\} \neq \emptyset = \operatorname{Sp} A$.

EXO :deux matrices complexes sont toujours cotrigonalisables (avec chgt base au déaprt **et** à l'arrivée)

CN : en regardant case en haut à gauche, il y a un $a \neq 0$ dont les images sont colinéaires. Preuve : si A ou B non inj, un vecteur non nul dans un noyau convient. Sinon $A^{-1}B$ a une vp, d'où $Ax = \lambda Bx$.

CN : soit $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ...b_n$ les bases de cotrigo. FIxons $p \geq 1$: alors Aa_{p+1} et Ba_{p+1} doivent se projeter sur un supp S de $b_1, ..., b_p$ en deux vecteurs colinéaire. Preuve : soitet $\pi : E \twoheadrightarrow S$. Alors πA et πB sont dans $L(S)$, donc (lemme) il y a un $s \in S$ tq $\pi A(s) \operatorname{col} \pi B(s)$.

CQFD.

LE résultat est faux pour trois endo : prendre Id et tapis roulant γ, δ (en dim 2) : la première CN ne peut être vérifiée.

6 Dunford

EXO *Si* $u = d + n$, *mq* $\operatorname{ad}_u = \operatorname{ad}_d + \operatorname{ad}_n$ *et que c'est la décomp de dunford.*

COR : , ad_u DZ/nilpotent ssi u l'est

7 le th spectral

voir différentes preuves.

Stuss : si on connait équation d'un hyperlan stable par un symétrique réel, alors les coef donnent les coordonné d'un vecteur normal à cet hyperplan stsable, donc un vecteur propre.

8 PLus loin (ou juste après lemme noyaux)

Si $\chi = \prod \chi_i$ où 2 à 2 étraner, alors on peut définir les sec $X_i := \operatorname{Ker} \chi_i(u)$ puis $u_i := u_{|X_i}$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_u &= \prod \chi_{u_i} \\ \mu_u &= \bigvee \mu_{u_i} \end{aligned}$$

La première s'obitnet par bloc. La seconde également !

post PLM sur poly min